

عنوان درس: روشهای چند متغیره گسسته

استفاده از ماشین حساب ساده مجاز است

۱- ۱۶۵ نفر به دو سوال جواب دادند که ۱۲ نفر آنها به سوال اول جواب غلط و به سوال دوم جواب درست و ۳۲ نفر از آنها به سوال اول جواب درست و به سوال دوم جواب غلط دادند. مقدار عددی آماره آزمون همگنی دو سوال برابر با کدام گزینه است؟

۱. ۳۸ ۲. ۲۲ ۳. ۱۲/۵۶ ۴. ۹/۰۹

۲- اگر $X_1, X_2, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با توزیع برنولی با پارامتر θ باشند، آنگاه حوزه تعریف مدل چیست؟

۱. $(-\infty, \infty)$ ۲. مجموعه اعداد طبیعی ۳. مجموعه اعداد صحیح ۴. $(-\infty, 0)$

۳- اگر $X_1, X_2, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با توزیع برنولی با پارامتر θ باشند، آنگاه تکیه گاه مدل چیست؟

۱. $(0, 1)$ ۲. مجموعه اعداد صحیح ۳. $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ ۴. مجموعه اعداد طبیعی

۴- اگر $X_1, X_2, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با توزیع پواسن با پارامتر θ باشند، آنگاه پارامتر کانونی مدل لگ خطی چیست؟

۱. وجود ندارد ۲. $\ln \theta$ ۳. $\ln(\theta - 1)$ ۴. $\ln(2\theta - 1)$

۵- اگر $X_1, X_2, \dots, X_n$ توزیع چند جمله ای با پارامترهای n و $p_1, \dots, p_n$ داشته باشند، آنگاه بعد مدل لگ خطی چند است؟

۱. $n-1$ ۲. n ۳. ۲ ۴. ۱

۶- در یک مدل لگ خطی اگر بین پارامترهای آن ۵ قید وجود داشته باشد، آنگاه توزیع حدی آماره آزمون نسبت درستنمایی تبدیل یافته چه توزیعی دارد؟

۱. کای دو با ۵ درجه آزادی ۲. کای دو با ۴ درجه آزادی ۳. پواسن با پارامتر ۵ ۴. پواسن با پارامتر ۴

۷- اگر $X_1, X_2, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با تابع احتمال زیر باشند، آنگاه برآورد درستنمایی ماکسیمم θ چیست؟

$$f(x; \theta) = \left(\frac{1+\theta}{4}\right)^{\frac{1+x}{2}} \left(\frac{3-\theta}{4}\right)^{\frac{1-x}{2}}, \quad x = -1, 1, \quad -1 < \theta < 3$$

۱. $2\bar{X} + 1$ ۲. $2\bar{X} - 1$ ۳. $2\bar{X}$ ۴. ۱

۸- اگر $X_1, X_2, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با تابع احتمال زیر باشند آنگاه پارامتر کانونی چیست؟

$$f(x; \theta) = \left(\frac{1+\theta}{4}\right)^{\frac{1+x}{2}} \left(\frac{3-\theta}{4}\right)^{\frac{1-x}{2}}, \quad x = -1, 1, \quad -1 < \theta < 3$$

$$\begin{array}{llll} ۱. \sqrt{\frac{1+\theta}{3+\theta}} & ۲. \ln \sqrt{\frac{1+\theta}{3+\theta}} & ۳. \ln \sqrt{\frac{1+\theta}{3-\theta}} & ۴. \sqrt{\frac{1+|\theta|}{3+|\theta|}} \end{array}$$

۹- اگر $X_1, X_2, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با تابع احتمال زیر باشند آنگاه برآورد درستنمایی ماکسیمم θ چیست؟

$$f(x; \theta) = \binom{x+k-1}{k-1} \theta^{2k} (1-\theta^2)^x, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

$$\begin{array}{llll} ۱. \frac{k}{k+\bar{X}} & ۲. \frac{k}{k-\bar{X}} & ۳. \sqrt{\frac{k}{k+\bar{X}}} & ۴. \bar{X}/k \end{array}$$

۱۰- اگر $X_1, X_2, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با تابع احتمال زیر باشند آنگاه آماره بسنده θ چیست؟

$$f(x; \theta) = \binom{x+k-1}{k-1} \theta^{2k} (1-\theta^2)^x, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

$$\begin{array}{llll} ۱. \sum_{i=1}^n X_i^2 & ۲. \prod_{i=1}^n X_i^2 & ۳. \left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i^2 \right) & ۴. \sum_{i=1}^n X_i \end{array}$$

۱۱- اگر در یک طرح نمونه‌گیری اندازه نمونه از قبل مشخص باشد. آنگاه مشاهدات جدول توافقی مربوطه دارای چه توزیعی هستند؟

$$\begin{array}{ll} ۱. \text{چندجمله‌ای} & ۲. \text{پواسن} \\ ۳. \text{حاصل ضرب چندجمله‌ای} & ۴. \text{هندسی} \end{array}$$

۱۲- اگر در یک طرح نمونه‌گیری داده‌ها در یک فاصله زمانی خاصی جمع‌آوری شود آنگاه مشاهدات جدول توافقی مربوطه دارای چه توزیعی هستند؟

$$\begin{array}{ll} ۱. \text{چندجمله‌ای} & ۲. \text{پواسن} \\ ۳. \text{حاصل ضرب چندجمله‌ای} & ۴. \text{هندسی} \end{array}$$

۱۳- اگر مشاهدات یک جدول توافقی دو طرفه با ۵ سطر و ۶ ستون دارای توزیع چندجمله‌ای باشند آنگاه بعد مدل لگ خطی چند است؟

$$\begin{array}{llll} ۱. ۳۰ & ۲. ۲۹ & ۳. ۱۲ & ۴. ۱۹ \end{array}$$

۱۴- کدام گزینه را می توان از مدل پواسنی با شرط معلوم بودن حجم نمونه نتیجه گرفت؟

۱. حاصل ضرب چندجمله‌ای
۲. هندسی
۳. فوق هندسی
۴. چندجمله‌ای

۱۵- بر اساس داده‌های جدول توافقی زیر بر آورد نسبت بخت‌ها چقدر است؟

۱۲۷	۳۱
۲۳	۱۱۸

۱. ۱/۲۶۵
۲. ۰/۰۴۷۶
۳. ۰/۷۶۵
۴. ۰/۸۹۷

۱۶- بر اساس کدام فاصله اطمینان نسبت بخت‌ها را می توان فرضیه استقلال عوامل سطر و ستون را پذیرفت؟

۱. (۰/۰۲۶, ۰/۰۸۶)
۲. (۰/۰۲۶, ۰/۰۸۶)
۳. (۰/۰۲۶, ۱/۰۸۶)
۴. (۰/۶۷, ۰/۹۶)

۱۷- فرض کنید در جدول چهارخانه‌ای تحت مدل حاصل ضرب چندجمله‌ای $X_{11} \sim B(6, p)$ و $X_{21} \sim B(4, p)$ باشند، توزیع $X_{11} | X_{11} + X_{21} = 5$ چیست؟

۱. هندسی
۲. فوق هندسی
۳. چندجمله‌ای
۴. پواسن

۱۸- مدلی که به تعداد خانه‌های جدول پارامتر دارد چه نام دارد؟

۱. چندجمله‌ای
۲. پواسنی
۳. اشباع شده
۴. هندسی

۱۹- در جدول‌های توافقی دو طرفه تحت کدام طرح نمونه‌گیری فرض عدم وجود اثر متقابل به معنی استقلال عوامل سطر و ستون است؟

۱. چندجمله‌ای
۲. پواسنی
۳. حاصل ضرب چندجمله‌ای
۴. هر سه مورد

۲۰- در کدام گزینه فرض عدم وجود اثر متقابل به معنی همگنی توزیع ستون نسبت به سطرها است؟

۱. چندجمله‌ای
۲. پواسنی
۳. حاصل ضرب چندجمله‌ای
۴. دوجمله‌ای

۲۱- برای آزمون ۸ فرض پایه‌ای مستقل با سطح معنی‌داری پنج درصد به روش سلسله مراتبی مقدار خطای توام چقدر است؟

۱. ۰/۳۳۷
۲. ۰/۲۵۶
۳. ۰/۶۷۵
۴. ۰/۵۶۷

۲۲- در جدول توافقی سه طرفه با عوامل A و B و C تحت فرض $H_{12,23}$ حاشیه‌های کافی چیست؟

۱. وجود ندارد
۲. A
۳. BC
۴. A و BC

۲۳- در یک جدول توافقی سه طرفه با $I = 5, J = 4, K = 7$ درجه آزادی فرض H_{12} چیست؟

۷۲ . ۴

۹۰ . ۳

۹۶ . ۲

۸۴ . ۱

۲۴- در مدل لجیت $g_{jkl} = \beta_0 + \beta^B z(j)$ اگر $\hat{\beta}_0 = 0.112$ و $\hat{\beta}_1 = -1.522$ باشند. آنگاه مقدار g_{2kl} چیست؟

۱/۶۳۴ . ۴

-۱/۶۳۴ . ۳

۱/۴۱ . ۲

-۱/۴۱ . ۱

۲۵- در مدل لجیت $g_{jkl} = \beta_0 + \beta^B z(j)$ اگر $\hat{\beta}_0 = 0.112$ و $\hat{\beta}_1 = -1.522$ باشند آنگاه مقدار P_{1kl} چیست؟

۰/۶۵۴ . ۴

۰/۲۴۱ . ۳

۰/۱۹۶ . ۲

۰/۸۳۷ . ۱

سوالات تشریحی

۱.۲۰ نمره

۱- اگر $X_1, X_2, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با توزیع زیر باشند.

$$f(x) = \frac{x^\theta}{C(\theta)}, \quad x=1, 2, \dots$$

معادله درستنمایی را تشکیل داده و رابطه $\sum_{x=1}^n x^\theta \ln x = C'(\theta)$ را ثابت کنید.

۱.۲۰ نمره

۲- اگر X_1, X_2, X_3, X_4 متغیرهای تصادفی مستقل باشند و به ازای $i=1, 2, 3, 4$ دارای توزیع پواسن با پارامتر λ_i باشند. بر اساس داده‌های زیر، مقدار عددی آماره آزمون نسبت درستنمایی تعمیم یافته فرض $H_0: \lambda_1 = \dots = \lambda_4$ را به دست آورید.

i	۱	۲	۳	۴
X_i	۴	۸	۶	۲

۱.۲۰ نمره

۳- در یک نمونه‌گیری، افراد را به دو گروه مالک و مستاجر طبقه‌بندی کرده و بر حسب وضعیت اشتغال آنان، جدول زیر تنظیم شده است. اولاً: مدل داده‌ها را تعیین کنید. ثانیاً: نسبت بخت‌ها را تعیین نموده و فاصله اطمینان نود و پنج درصدی آن را تعیین کنید.

	آزاد	دولتی
مستاجر	۶۰۰	۲۰۰
مالک	۵۰۰	۴۰۰

- ۴- فرض کنید در جدول چهارخانه‌ای تحت مدل حاصل ضرب چندجمله‌ای ، $X_{11} \sim B(6, p)$ و $X_{21} \sim B(4, p)$ باشند. $P(X_{11}=3|X_{11}+X_{21}=5)$ مقدار الف) مقدار را به دست آورید.
- ب) فرض کنید در جدول توافقی $I \times J$ با $J=10$ ، بازای $j=1,2,\dots,J$ داریم $\tau_j^B = 2j^2$ تحت مدل حاصل ضرب چندجمله‌ای $P_{j=5i=2}$ را بیابید.

- ۵- بر اساس داده‌های زیر که از یک جدول توافقی $4 \times 4 \times 4$ با عوامل A و B و C به دست آمده است. الف) درجات آزادی فرض‌های پایه‌ای را تعیین کنید.
- ب) با فرض $\alpha=0.10$ نتیجه آزمون به روش سلسله مراتبی را به دست آورید.

فرض	H_{123}	H_{12}	H_{13}	H_{23}	$H_{12,13}$	$H_{13,23}$	$H_{12,23}$	$H_{12,13,23}$
آماره آزمون	۳۱/۹۲	۴۵/۵۰	۵۳/۸۳	۴۷/۰۷	۶۸/۷۱	۷۲/۳۸	۵۹/۱۴	۷۳/۰۲

H_1	H_2	H_3
۸۹/۶۴	۹۷/۶۷	۱۱۰/۰۸

شماره سوال	پاسخ صحیح
1	د
2	الف
3	ج
4	ب
5	الف
6	الف
7	الف
8	ج
9	ج
10	د
11	الف
12	ب
13	ب
14	د
15	ب
16	ج
17	ب
18	ج
19	د
20	ج
21	الف
22	د
23	الف
24	د
25	ب

۱- برای مدل لگ خطی $\ln f(t, \tau) = t\tau + h(t) - nk(\tau)$ کدام گزینه درست است؟

۱. $\text{Var}(T|\tau) = nk''(\tau)$ ۲. $\text{Var}(T|\tau) = nk'(\tau)$ ۳. $\text{Var}(T|\tau) = nh'(\tau)$ ۴. $\text{Var}(T|\tau) = nh''(\tau)$

۲- اگر $X_1, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل از توزیع

$$f(x) = \binom{x+k-1}{k-1} \theta^k (1-\theta)^{x-k}, 0 < \theta < 1, x = 0, 1, 2, \dots$$

باشند، پارامتر کانونی چیست؟

۱. $\ln(1-\theta)$ ۲. $\ln \theta$ ۳. $1-\theta$ ۴. θ

۳- اگر $X_1, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل از توزیع

$$f(x) = \binom{x+k-1}{k-1} \theta^k (1-\theta)^{x-k}, 0 < \theta < 1, x = 0, 1, 2, \dots$$

باشند، واریانس مجانبی برآورد ماکسیمم θ

چیست؟

۱. $\frac{\theta(1-\theta)}{nk}$ ۲. $\frac{\theta}{nk}$ ۳. $\frac{(1-\theta)}{nk}$ ۴. $\frac{(1-\theta)^2}{nk}$

۴- فرض کنید تعداد کتاب‌های به امانت گرفته شده در روزهای شنبه تا چهارشنبه یک هفته از کتابخانه دانشکده‌ای به ترتیب 16، 10، 20، 24 و 70 باشد. مقدار عددی آماره آزمون فرضیه (بستگی نداشتن تعداد کتاب‌های به امانت گرفته شده به روزهای مختلف هفته) برابر با کدام گزینه است؟

۱. 20/11 ۲. 11/20 ۳. 75/82 ۴. 82/57

۵- در کدام طرح نمونه‌گیری، اندازه نمونه از قبل مشخص است؟

۱. چندجمله‌ای ۲. پیواسنی ۳. حاصل ضرب چندجمله‌ای ۴. نرمال

۶- در یک جدول توافقی دو طرفه تحت مدل پیواسنی توزیع شرطی مشاهدات به شرط مجموع مشاهدات چیست؟

۱. چند جمله‌ای ۲. پیواسنی ۳. حاصل ضرب چندجمله‌ای ۴. فوق هندسی

۷- در جدول توافقی چهارخانه‌ای با مدل حاصل ضرب چند جمله‌ای توزیع $X_{11} | X_{11} + X_{21} = x_{01}$ تحت شرط $P_{111} = P_{112}$ چیست؟

۱. برنولی ۲. پواسن ۳. هندسی ۴. دوجمله‌ای

۸- در جدول‌های توافقی دو طرفه تحت چه مدلی فرض عدم وجود اثر متقابل به معنی استقلال عوامل سطر و ستون است؟

۱. پواسنی ۲. چندجمله‌ای
۳. حاصل ضرب چندجمله‌ای ۴. هر سه مورد

۹- در کدام مدل فرض عدم وجود اثر متقابل به معنی همگنی توزیع ستون نسبت به سطرها است؟

۱. چندجمله‌ای ۲. حاصل ضرب چندجمله‌ای
۳. پواسنی ۴. هر سه مورد

۱۰- در جدول‌های توافقی $I \times J$ با مدل حاصل ضرب چندجمله‌ای فرض‌های $H_{12} : \tau_{ij}^{AB} = 0$ و $H_2 : \tau_j^B = 0$ هم ارز با کدام گزینه است؟

۱. $P_{ilj} = \frac{1}{jI}$ ۲. $P_{ilj} = \frac{1}{I}$ ۳. $\frac{1}{iJ}$ ۴. $P_{jli} = \frac{1}{J}$

۱۱- در یک جدول توافقی سه طرفه حاشیه‌های کافی فرض $H_{12,23}$ چیست؟

۱. AB, AC ۲. BC, A ۳. AC, BC ۴. وجود ندارد

۱۲- در یک جدول توافقی سه طرفه تعبیر احتمالی فرض $H_{1,2,3}$ چیست؟

۱. $\frac{1}{JK}$ ۲. $\frac{I}{JK}$ ۳. $\frac{1}{IJK}$ ۴. وجود ندارد

۱۳- در یک جدول توافقی سه طرفه با $K = 6, J = 5, I = 4$ درجه آزادی فرض $H_{1,2}$ برابر با کدام گزینه است؟

۱. 119 ۲. 116 ۳. 115 ۴. 114

۱۴- اگر بخواهیم 8 فرض پایه‌ای مستقل از هم که هر کدام خطای ۵ درصد دارند را به روش سلسله مراتبی آزمون کنیم، مقدار خطای توأم چند می‌شود؟

۱. 0/337 ۲. 0/95 ۳. 0/05 ۴. 0/876

۱۵- اگر بخواهیم 8 فرض پایه ای مستقل از هم که هر کدام خطای 5 درصد دارند را به روش سلسله مراتبی آزمون کنیم، مقدار خطای توأم به روش بن فرنی چقدر است؟

۱. 0/876 ۲. حداکثر 5 درصد ۳. حداقل 5 درصد ۴. 0/337

۱۶- کدام گزینه حوزه تعریف مدل لگ خطی است؟

۱. $(-1, 0)$ ۲. $(-1, 1)$ ۳. $(0, 1)$ ۴. $(-\infty, \infty)$

۱۷- کدام گزینه درباره تابع لوجیت درست است؟

۱. تابعی یکنوا است. ۲. حوزه مقادیرش $(-\infty, \infty)$ است.

۳. متغیر پاسخ دو سطحی دارد. ۴. هر سه مورد

۱۸- فرض کنید لوجیت مدلی با عوامل A و B و C به صورت $g_{jkl} = \beta_0 + \beta^B z(j) + \beta^C z(k)$ باشد، که

$\beta_0 = -2/56$ و $\beta^B = -0/324$ و $\tau_{11}^{AC} = 0/151$ هستند. مقدار β^C برابر با کدام گزینه است؟

۱. -0/302 ۲. 0/302 ۳. -1/934 ۴. 0/126

۱۹- فرض کنید لوجیت مدلی با عوامل A و B و C به صورت $g_{jkl} = \beta_0 + \beta^B z(j) + \beta^C z(k)$ باشد، که

$\beta_0 = -2/56$ و $\beta^B = -0/324$ و $\tau_{11}^{AC} = 0/151$ هستند. مقدار g_{21} برابر با کدام گزینه است؟

۱. -0/302 ۲. -1/934 ۳. 1/934 ۴. 0/126

۲۰- فرض کنید لوجیت مدلی با عوامل A و B و C به صورت $g_{jkl} = \beta_0 + \beta^B z(j) + \beta^C z(k)$ باشد، که

$\beta_0 = -2/56$ و $\beta^B = -0/324$ و $\tau_{11}^{AC} = 0/151$ هستند. مقدار $P_{1|21}$ برابر با کدام گزینه است؟

۱. 0/302 ۲. -0/302 ۳. -1/934 ۴. 0/126

سوالات تشریحی

۱- 165 نفر به دو سوال جواب دادند، که نتیجه آزمون در جدول زیر آورده شده است. در سطح 95 درصد آزمون

کنید آیا دو سوال همگن هستند؟ ($\chi^2_{1,0/05} = 3/84$)

جواب درست (سوال اول)	جواب غلط (سوال اول)	جواب سوال ها
58	12	جواب درست (سوال دوم)
32	58	جواب غلط (سوال دوم)

۲- جدول زیر تعداد سوانح رانندگی منجر به فوت در روزهای مختلف هفته طی یکسال را نشان می‌دهد. اگر تعداد وقایع در روزهای مختلف هفته که به ترتیب با X_1 و ... و X_7 نشان داده می‌شوند از هم مستقل و دارای توزیع پواسن با پارامترهای به ترتیب λ_1 و ... و λ_7 داشته باشند، در سطح ۵ درصد فرض تساوی پارامترها آزمون کنید. ($\chi^2_{6,0/05} = 12 / 60$)

روز هفته	تعداد سوانح (X_i)	$\ln(X_i)$
شنبه	279	5/63
یکشنبه	256	5/55
دوشنبه	304	5/44
سه‌شنبه	330	5/72
چهارشنبه	210	5/80
پنج‌شنبه	120	5/35
		4/87

۳- جدول زیر تلفات گروه سنی 1-4 سال را در شهری در سالی نشان می‌دهد. آزمون استقلال عوامل سطر و ستون یعنی نوع بیماری و جنس و آزمون بی‌اثر بودن عامل سطر یعنی یکسان بودن تلفات در اثر عوامل مختلف و آزمون بی‌اثر بودن عامل ستون یعنی جنس را در سطح ۵ درصد را انجام دهید.

$$(Z_{12} = 6 / 62, \chi^2_{4,0/05} = 9 / 49, \chi^2_{1,0/05} = 3 / 84)$$

شرح بیماری	پسر	دختر
سوانح	89	61
بیماریهای عفونی	58	49
بیماریهای دستگاه تنفسی	43	49
بیماریهای دستگاه گوارش	15	10
بیماریهای دستگاه اعصاب	8	14

- ۴- در یک نمونه‌گیری افراد به دو گروه مالک و مستاجر طبقه‌بندی شده و بر حسب وضعیت اشتغال آنان در جدول زیر تنظیم شده است.
- الف) نسبت بخت‌ها را محاسبه کرده و فاصله اطمینان 95 درصدی برای آن به دست آورید.
- ب) آیا داده‌ها تأیید می‌کنند که مالکیت واحدهای مسکونی بین افراد با شغل دولتی و افراد با شغل آزاد یکسان توزیع شده است؟ ($Z_{0/025} = 1/96$)

	شغل آزاد	شغل دولتی
مستاجر	2584	300
مالک	1096	795

- ۵- در جدول توافقی چهار عاملی تعبیرهای نمادی و احتمالی و برآورد امید ریاضی مشاهدات را تحت فرضیه صفر بودن اثر متقابل چهار عاملی و همه اثرهای متقابل سه عاملی و اثر متقابل دو عاملی CD به دست آورید.

۱- اگر n متغیر تصادفی مستقل و هم توزیع با توزیع برنولی با پارامتر θ باشند، پارامتر کانونی کدام گزینه است؟

۱. $\ln \frac{\theta}{1-\theta}$ ۲. e^θ ۳. $\ln \theta$ ۴. $\ln(1-\theta)$

۲- کدام گزینه توزیع مجانبی آماره آزمون نسبت درستنمایی تعمیم یافته تحت فرض $H_0: \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_5 \\ \lambda_6 = \lambda_7 \end{cases}$ است؟

۱. χ^2_2 ۲. χ^2_5 ۳. دوجمله‌ای ۴. پواسن

۳- برای مطالعه احساس مسئولیت افراد مختلف در امور اجتماعی، اطلاعاتی از 4229 نفر در مورد موضوع معینی پرسیده شده است که در جدول زیر ثبت شده‌اند. نسبت بخت‌ها چیست؟

زن	مرد	
1838	1893	پاسخ داده‌اند
258	240	پاسخ نداده‌اند

۱. 14/2 ۲. 17/9 ۳. 1/1 ۴. 2/6

۴- در جدول توافقی چهار طرفه، تعبیر نمادی مدل با حاشیه‌های کافی ABC، AD، BD چیست؟

۱. $D \oplus B, C \mid A$ ۲. $C \oplus D \mid A, B$ ۳. $D \oplus A, B, C$ ۴. $D \oplus A, B, C, D = U$

۵- در جدول توافقی چهار طرفه تحت فرض با حاشیه‌های کافی ABC، AD برآورد درستنمایی ماکسیمم امید ریاضی مشاهدات چقدر است؟

۱. $\hat{\mu}_{ijkl} = \frac{x_{ijk.} x_{.jl}}{x_{i..}}$ ۲. $\hat{\mu}_{ijkl} = \frac{x_{.jkl} x_{ij..}}{x_{.j..}}$ ۳. $\hat{\mu}_{ijkl} = \frac{x_{ij.l} x_{.kl}}{x_{..l}}$ ۴. $\hat{\mu}_{ijkl} = \frac{x_{ijk.} x_{.jk.}}{x_{..k.}}$

۶- حوزه‌ی تعریف مدل لگ خطی $\ln f(t, \tau) = t\tau + h(t) - nk(\tau)$ عبارت است از:

۱. $\left\{ \tau : \sum_i e^{t\tau + h(t)} < \infty \right\}$ ۲. $\left\{ t : \sum_\tau e^{t\tau + h(t)} < \infty \right\}$ ۳. $\{ \tau : f(t, \tau) > 0 \}$ ۴. $\{ t : f(t, \tau) > 0 \}$

۷- در یک جدول توافقی دو طرفه با عوامل A، B (در دو سطح)، اگر $x_{01} = 213$ و $x_{02} = 183$ باشند، برآورد پارامتر $\hat{\tau}_1^B$ تحت فرض عدم وجود اثر متقابل کدام گزینه است؟

۱. 0/1 ۲. 0/07 ۳. 2/23 ۴. 0/98

۸- در یک جدول توافقی $I \times J \times K$ درجه‌ی آزادی آماره آزمون $H_{1,2}$ چیست؟

۱. $I(JK - 1)$ ۲. $J(IK - 1)$ ۳. $K(IJ + 1)$ ۴. $K(IJ - 1)$

۹- اگر $X_1, \dots, X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع $f(x, \theta) = \theta^{\frac{1+x}{2}} (1-\theta)^{\frac{1-x}{2}}, x = -1, 1$ باشد، آنگاه تابع احتمال $T = \sum_{i=1}^n X_i$

کدام گزینه است؟

۱. $\binom{n}{n-t} \theta^{n-t} (1-\theta)^t$ ۲. $\binom{n}{\frac{n+t}{2}} \theta^{\frac{n+t}{2}} (1-\theta)^{\frac{n-t}{2}}$

۳. $\binom{n}{t} \theta^t (1-\theta)^{n-t}$ ۴. $\binom{n}{t+1} \theta^{t+1} (1-\theta)^{n-t-1}$

۱۰- می‌خواهیم تأثیر تفاوت سنی زوج و زوجه (B) را در طول عمر زندگی مشترک (A) تعدادی زوج که ازدواج آن‌ها به جدایی منتهی گردیده است را مورد مطالعه قرار دهیم. اگر عامل A در 6 سطح و عامل B در 3 سطح در نظر گرفته شود، آنگاه درجه‌ی آزادی آزمون فرض عدم وجود اثر متقابل عوامل A, B کدام گزینه است؟

۱. 12 ۲. 10 ۳. 8 ۴. 6

۱۱- در جدول توافقی سه طرفه $I \times J \times K$ چند فرض مختلف وجود دارد؟

۱. 2^I ۲. 2^{JK} ۳. 2^{IK} ۴. 2^{JK}

۱۲- در یک جدول توافقی سه طرفه با عوامل A, B, C ، آماره‌ی آزمون فرض H_1 در برابر فرض H_2 کدام گزینه است؟

۱. $Z(H_1 | H_A) - Z(H_2 | H_A)$ ۲. $Z(H_2 | H_A) + Z(H_A)$
۳. $Z(H_1 | H_A) + Z(H_2 | H_A)$ ۴. $Z(H_2 | H_A) - Z(H_1 | H_A)$

۱۳- در یک جدول توافقی چهار طرفه، برآورد امید ریاضی مشاهدات مربوط به فرض صفر بودن اثر متقابل چهار عاملی و همه اثرات متقابل سه عاملی و اثر متقابل CD کدام است؟

۱. $\frac{x_{ijk.}}{x_{ij..}}$ ۲. $\frac{x_{ij..}}{x_{ijk.}}$ ۳. $\frac{x_{ijk.} x_{ij.l}}{x_{ij..}}$ ۴. وجود ندارد.

۱۴- برای آزمون 9 فرض مستقل در سطح 0/10 دومین سطح معنی‌دار بودن با چه عددی مقایسه می‌شود؟

۱. 0/05 ۲. 0/10 ۳. 0/011 ۴. 0/0125

۱۵- فرض کنید برای n متغیر تصادفی دارای توزیع برنولی با پارامترهای متناظر $P_i = \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 Z_i}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 Z_i}}$ باشند که در آن Z_i متغیر

کمکی و β_1, β_0 پارامترهای نامعلومند، این مدل چه نام دارد؟

۱. رگرسیون لجیت ۲. پواسن ۳. نرمال ۴. دوجمله‌ای

۱۶- اگر متغیر تصادفی X با تابع احتمال $f(x, \theta) = \frac{1}{c(\theta)} x^\theta, x = 1, 2, 3, \dots$ باشد آنگاه $\sum_{x=1}^{+\infty} (\ln x) x^\theta$ برابر با کدام گزینه

است؟

۱. $C(\theta)$ ۲. $C'(\theta)$ ۳. $C''(\theta)$ ۴. $\frac{1}{C'(\theta)}$

۱۷- در آزمون زنجیر فرض‌های مستقل $H_m, \dots, H_2, H_1$ اگر مقدار خطای هر یک از این فرض‌ها α باشد، آنگاه خطای توأم برابر است با:

۱. $(1 - \alpha)^m$ ۲. $1 - (1 - \alpha)^m$ ۳. $1 - \alpha$ ۴. α

۱۸- در یک جدول توافقی چهار طرفه با عوامل A, B, C, D تحت فرض صفر بودن «ثر متقابل چهار عاملی، همه اثرهای متقابل سه عاملی و CD و BD برآورد امید ریاضی مشاهدات کدام گزینه است؟

۱. $\frac{x_{ijk.}}{x_{.k.}}$ ۲. $\frac{x_{ij..} x_{ijk.}}{x_{i..}}$ ۳. $\frac{x_{i..} x_{i..}}{x_{..}}$ ۴. $\frac{x_{ijk.} x_{i..}}{x_{i..}}$

۱۹- در یک جدول توافقی سه طرفه $2 \times 2 \times 2$ اگر $x_{1..} = 240, \hat{\mu}_{111}^{(1)} = 131.5, \hat{\mu}_{121}^{(1)} = 57.5$ باشند، آنگاه $\hat{\mu}_{111}^{(2)}$ چیست؟

۱. $166/9$ ۲. $123/5$ ۳. $12/98$ ۴. $15/87$

۲۰- درجه آزادی آماره آزمون برای فرضیه $H_2: \tau^{AB} = \tau^A = \tau^B = 0$ در یک جدول توافقی 5×4 کدام گزینه است؟

۱. 20 ۲. 19 ۳. 11 ۴. 10

سوالات تشریحی

۱- اگر $X_1, X_2, \dots, X_n$ ، n مشاهده مستقل و هم توزیع و تابع احتمال آنها به صورت لگ خطی یک بعدی باشد.

ثابت کنید تحت فرض H_0 آماره آزمون نسبت درست‌نمایی تبدیل یافته توزیع مجانبی مربع کای با یک درجه

آزادی دارد.

۲- جدول تلفات اطفال گروه سنی 1-4 سال شهری به صورت زیر است. آزمون‌های مربوط به استقلال عوامل سطر و ستون را انجام داده، نتیجه را بیان کنید.

شرح بیماری	پسر	دختر	$\ln x_i$
سوانح	89	61	5/011
بیماری‌های عفونی	58	49	4/673
بیماری‌های تنفسی	43	49	4/522
بیماری‌های دستگاه گوارش	15	10	3/219
بیماری‌های دستگاه اعصاب	8	14	3/091
$\ln x_j$	5/361	5/209	

$$\ln \frac{x_{..}}{J} = 5.288, \quad \ln \frac{x_{..}}{I} = 4.372, \quad \chi^2_{0.05}(4) = 9.488$$

$$\chi^2(1) = 3.841, \quad z_{12} = 6.626$$

۳- با توجه به جدول زیر فرآیند آزمون‌ها را به روش‌های سلسله مراتبی و بن‌فرونی در سطح 0/01 انجام دهید. ($\chi^2_{0.01}(1) = 6.6351$)

فرض	آماره‌ی آزمون	سطح معنی‌داری	فرض	آماره‌ی آزمون	سطح معنی‌داری
H_{123}	0/06	0/800	H_3	167/48	0/000
H_{23}	71/9	0/000	H_2	118/00	0/000
H_{13}	19/71	0/000	H_1	159/29	0/000
H_{12}	5/39	0/068	$H_{2,3}$	167/48	0/000
$H_{13,23}$	102/11	0/000	$H_{1,3}$	208/77	0/000
$H_{12,23}$	87/79	0/000	$H_{1,2}$	159/29	0/000
$H_{12,13}$	35/60	0/000	$H_{1,2,3}$	220/00	0/000
$H_{12,13,23}$	118/00	0/000			

۴- در یک نمونه‌گیری افراد را به دو گروه مالک و مستأجر طبقه‌بندی کرده و برحسب وضعیت اشتغال در جدول زیر تنظیم شده‌اند.

الف) مدل این داده‌ها چیست؟

ب) نسبت بخت‌ها را محاسبه کرده و یک فاصله‌ی اطمینان 0/95 برای آن پیدا کرده و نتیجه را نیز بیان کنید.

شغل آزاد			شغل دولتی
مستأجر			300
مالک			795

۵- در یک جدول توافقی چهارطرفه با عوامل A, B, C, D

اولاً: تعبیر پیوندی، نمادی و احتمالی فرض پایه‌ای و اثر متقابل چهار عاملی و همه اثرهای متقابل سه عاملی و CD, BD, BC صفرند، را مشخص کنید.

ثانیاً: حاشیه‌های کافی و برآورد امید ریاضی مشاهدات، فرض اشاره شده را تعیین کنید.

۱۰۲۰ نمره

باسمِ صَحيحِ
سواء

1	الف
2	ب
3	ج
4	ب
5	الف
6	الف
7	ب
8	د
9	ب
10	ب
11	ب
12	الف
13	ج
14	د
15	الف
16	ب
17	ب
18	د
19	الف
20	ب

۱- 165 نفر به دو سوال جواب دادند که 12 نفر آنها به سوال اول جواب غلط و به سوال دوم جواب درست و 32 نفر آنها به سوال اول جواب درست و به سوال دوم جواب غلط دادند. آماره آزمون همگنی دو سوال چند است؟

۱. 9/09 ۲. 11 ۳. 12/9 ۴. 21/12

۲- 165 نفر به دو سوال جواب دادند که 12 نفر آنها به سوال اول جواب غلط و به سوال دوم جواب درست و 32 نفر آنها به سوال اول جواب درست و به سوال دوم جواب غلط دادند. اگر $\chi^2_{0.05,1} = 3.84146$, $\chi^2_{0.025,1} = 5.02389$ باشد آنگاه کدام گزینه درست است؟

۱. دو سوال همگن است. ۲. سوال اول مشکل تر است.
۳. سوال دوم مشکل تر است. ۴. نمی توان قضاوت کرد.

۳- برای مدل لگ خطی به فرم $\ln f(t, \tau) = t\tau + h(t) - nk(\tau)$ امید ریاضی $T|\tau$ چیست؟

۱. $k''(\tau)$ ۲. $nk''(\tau)$ ۳. $k'(\tau)$ ۴. $nk'(\tau)$

۴- فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ متغیرهای مستقل و هم توزیع با توزیع برنولی با پارامتر θ باشند، برآورد درستنمایی ماکسیمم پارامتر θ چیست؟

۱. $\frac{4e^\tau}{1-2e^\tau}$ ۲. $\frac{e^\tau}{1-2e^\tau}$ ۳. $\frac{e^\tau}{1-e^\tau}$ ۴. $\frac{e^\tau}{1+e^\tau}$

۵- فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ متغیرهای مستقل و هم توزیع با توزیع برنولی با پارامتر θ باشند، آنگاه حوزه تعریف چیست؟

۱. $(-\infty, 0)$ ۲. $(-\infty, \infty)$ ۳. $(0, \infty)$ ۴. $(0, 1)$

۶- اگر $X_1, \dots, X_{10}$ متغیرهای مستقل و هم توزیع و تابع احتمال آنها به صورت لگ خطی یک بعدی باشند آنگاه تحت فرض $H_0: \tau = \tau_0$ آماره آزمون نسبت درستنمایی تبدیل یافته چه توزیعی دارد؟

۱. کای دو با ۱۰ درجه آزادی ۲. کای دو با ۹ درجه آزادی
۳. کای دو با یک درجه آزادی ۴. نرمال استاندارد

۷- بعد مدل لگ خطی در جدول توافقی دو طرفه $I \times J$ با مدل حاصلضرب چند جمله ای چند است؟

۱. IJ ۲. $J(I-1)$ ۳. $I(J-1)$ ۴. $IJ-1$

۸- در جدول توافقی چهارخانه‌ای فرض کنید مشاهده X_{ij} به ازای $i, j = 1, 2$ دارای توزیع پواسن با پارامتر ij باشد آنگاه مقدار $P(X_{11} = 2, X_{12} = 3, X_{21} = 2, X_{22} = 3 | X_{00} = x_{00})$ برابر با کدام گزینه است؟؟

$$1. \left(\frac{2}{9}\right)^{10} \binom{10}{2,3,2,3} \quad 2. \left(\frac{2}{9}\right)^{10} 2 \binom{10}{2,3,2,3} \quad 3. \left(\frac{1}{9}\right)^{10} \binom{10}{2,3,2,3} \quad 4. \left(\frac{1}{9}\right)^{10} 4 \binom{10}{2,3,2,3}$$

۹- در جدول توافقی چهارخانه‌ای فرض کنید مشاهده X_{ij} به ازای $i, j = 1, 2$ دارای توزیع پواسن با پارامتر ij باشد. اگر مدل حاصلضرب چندجمله‌ای برقرار باشد آنگاه توزیع $X_{11} | X_{11} + X_{21} = x_{01}$ چیست؟

۱. چندجمله‌ای

۲. پواسنی

۳. حاصلضرب چندجمله‌ای

۴. فوق هندسی

۱۰- در جدول‌های توافقی دو طرفه تحت کدام مدل فرض عدم وجود اثر متقابل هم ارز استقلال سطر و ستون است؟

۱. چند جمله‌ای

۲. حاصل ضرب چند جمله‌ای

۳. پواسنی

۴. هر سه مدل

۱۱- در جدول توافقی سه طرفه حاشیه‌های کافی فرض $H_{12,13}$ چیست؟

۱. وجود ندارد

۲. AB, BC

۳. AB, AC

۴. BC, A

۱۲- در جدول توافقی سه طرفه تعبیر احتمالی P_{ijk} بنابر فرض H_1 چیست؟

۱. $\frac{P_{0i0}P_{00k}}{I}$

۲. $\frac{P_{100}P_{00k}}{J}$

۳. $\frac{P_{100}P_{0i0}}{K}$

۴. وجود ندارد

۱۳- در جدول توافقی سه طرفه برآورد امید ریاضی مشاهدات تحت فرض $H_{1,2,3}$ چیست؟

۱. $\frac{1}{nK}$

۲. $\frac{1}{IJK}$

۳. $\frac{x_{...}}{IJK}$

۴. $\frac{IJK}{x_{...}}$

۱۴- در جدول توافقی چهار عاملی حاشیه‌های کافی فرضی که بیانگر صفر بودن اثرهای متقابلی چهارعاملی و همه اثرهای متقابل سه عاملی و AC و AD و BD باشد کدام گزینه است؟

۱. $D \oplus A, B | C$

۲. $A \oplus C, D | B$

۳. $A \oplus C \oplus D | B$

۴. گزینه‌های ۱ و ۲

۱۵- تبدیل لوجیت برای $0 < x < 1$ چیست؟

۱. $\ln(1-x)$

۲. $\ln(1+x)$

۳. $\ln\left(\frac{1-x}{x}\right)$

۴. $\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$

۱۶- کدام مورد زیر در باره تابع لوجیت درست است؟

۱. یکنواست.
۲. حوزه تعریف آن (0,1) است.
۳. برد آن (0,1) است.
۴. موارد 1 و 2

۱۷- فرض کنید $\ln E(X_{ijkl}) = \tau_0 + \tau_i^A + \tau_j^B + \tau_k^C + \tau_{ij}^{AB} + \tau_{jk}^{BC} + \tau_{il}^{AD} + \tau_{jl}^{BD} + \tau_{ijl}^{ABD}$ ، لوجیت این مدل چیست؟

۱. $2(\tau_1^A + \tau_{1j}^{AB} + \tau_{1l}^{AD} + \tau_{1jl}^{ABD})$
۲. $2(\tau_1^B + \tau_{1k}^{BC} + \tau_{1jl}^{ABD})$
۳. $e^{2(\tau_1^A + \tau_{1j}^{AB} + \tau_{1l}^{AD} + \tau_{1jl}^{ABD})}$
۴. $e^{2(\tau_1^B + \tau_{1k}^{BC} + \tau_{1jl}^{ABD})}$

۱۸- تحت مدل $\ln E(X_{ijkl}) = \tau_0 + \tau_i^A + \tau_j^B + \tau_k^C + \tau_{ij}^{AB} + \tau_{jk}^{BC} + \tau_{il}^{AD} + \tau_{jl}^{BD} + \tau_{ijl}^{ABD}$ اگر لوجیت مدل با g نشان داده شود آنگاه P_{lljkl} چیست؟

۱. $\frac{2e^g}{2e^g - 1}$
۲. $\frac{2e^g}{e^g - 1}$
۳. $\frac{e^g}{e^g - 1}$
۴. $\frac{e^g}{e^g + 1}$

۱۹- تحت مدل $\ln E(X_{ijkl}) = \tau_0 + \tau_i^A + \tau_j^B + \tau_k^C + \tau_{ij}^{AB} + \tau_{jk}^{BC} + \tau_{il}^{AD} + \tau_{jl}^{BD} + \tau_{ijl}^{ABD}$ اگر لوجیت مدل با g نشان داده شود و مقدار g بیشتر شود آنگاه کدام گزینه درست است؟

۱. شانس مشاهده پاسخ در سطح اول پاسخ زیادتر می شود.
۲. شانس مشاهده پاسخ در سطح اول پاسخ کمتر می شود.
۳. شانس مشاهده پاسخ در سطح های اول و دوم پاسخ یکسان می شود.
۴. قضاوتی نمی توان کرد

۲۰- سطوح متغیر پاسخ در مدل لوجیت چند است؟

۱. 2
۲. 1
۳. 3
۴. 4

سوالات تشریحی

۱.۵۰ نمر

۱- فرض کنید تعداد سوانح رانندگی در روزهای مختلف هفته از هم مستقل و دارای توزیع پواسن با پارامترهای مختلف باشند. تحت فرض تساوی پارامترهای توزیع پواسن آماره آزمون نسبت درستنمایی تبدیل یافته را به دست آورید.

۲- در جدول سه طرفه با داده‌های زیر تحت فرض H_{123} به روش برازش متناسب تکراری برآوردهای $\hat{\mu}_{ijk}^{(1)}$ ها و $\hat{\mu}_{121}^{(2)}$ و $\hat{\mu}_{221}^{(2)}$ را به دست آورید.

$$X_{111} = X_{221} = 156, X_{211} = X_{121} = 84, X_{112} = 107, X_{212} = 133, X_{122} = 31, X_{222} = 209$$

۳- در جدول چهار عاملی با عوامل A و B و C و D برای فرض‌های صفر بودن اثر متقابل چهار عاملی و همه اثرهای متقابل سه عاملی و CD و BD و صفر بودن اثر متقابل چهار عاملی و همه اثرهای متقابل سه عاملی و AC و BD حاشیه‌های کافی و تعبیرهای نمادی و احتمالی و امیدریاضی مشاهدات را به دست آورید.

۴- در جدول چهار عاملی که هر عامل دو سطحی هستند با توجه به داده‌های زیر، و با فرض

$$\ln E(X_{ijkl}) = \tau_i^A + \tau_{1j}^{AB} + \tau_{1k}^{AC} + \tau_{1l}^{AD} \text{ و } g_{jkl} = \beta_0 + \beta^B z(j) + \beta^C z(k) \text{ به عنوان مناسب‌ترین مدل}$$

لوجیت پارامترهای β_0 و β^B و β^C و مقادیر g_{21} و P_{1121} را به دست آورید.

$$X_{1111} = 12, X_{1112} = 31, X_{1121} = 5, X_{1122} = 20, X_{1211} = 16, X_{1212} = 37, X_{1221} = 19, X_{1222} = 73$$

$$X_{2111} = 175, X_{2112} = 375, X_{2121} = 162, X_{2122} = 475, X_{2211} = 111, X_{2212} = 266, X_{2221} = 241, X_{2222} = 90$$

فرمولهای مورد نیاز

$$nk(\tau) \ln \sum_t \exp[t\tau + h_1(t)]$$

$$\chi^2 = \frac{(n_1 - n_4)^2}{n_1 + n_4}$$

$$\tau = \varphi_1(\theta) \ln \left(\frac{1}{1-\theta} \right)$$

نمبر، سواب	ياسخ صحيح
1	الف
2	ج
3	ب
4	د
5	ب
6	ج
7	ج
8	ب
9	د
10	د
11	د
12	الف
13	ج
14	ج
15	د
16	د
17	الف
18	د
19	الف
20	الف

۱- فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع برنولی با پارامتر θ باشد پارامتر کانونی مدل لگ خطی چیست؟

۱. θ ۲. $\ln \frac{1}{1-\theta}$ ۳. $\frac{\theta}{1-\theta}$ ۴. $\ln \frac{\theta}{1-\theta}$

۲- فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع برنولی با پارامتر θ باشد حوزه تعریف پارامتر کانونی مدل لگ خطی کدام گزینه است؟

۱. $(0, \infty)$ ۲. $(0, \infty)$ ۳. $(-\infty, 0)$ ۴. $(-\infty, +\infty)$

۳- خانواده‌ی توزیع دوجمله‌ای با پارامتر θ را در نظر بگیرید. کدام گزینه تکیه‌گاه مدل است؟

۱. $(-\infty, -1)$ ۲. $(-\infty, 0)$ ۳. $\{0, 1, \dots, n\}$ ۴. $\{-n, 0, 1, \dots, n\}$

۴- اگر $X_1, \dots, X_7$ متغیرهای تصادفی مستقل از هم باشند به طوری که X_i توزیع پواسن با پارامتر λ_i داشته باشد. آماره‌ی آزمون فرض $H_0: \lambda_1 = \dots = \lambda_7$ دارای کدام توزیع هست؟

۱. چندجمله‌ای ۲. کای دو با 6 درجه آزادی

۳. نرمال ۴. پواسن

۵- اگر $X_1, \dots, X_7$ متغیرهای تصادفی مستقل از هم باشند به طوری که X_i توزیع پواسن با پارامتر λ_i داشته باشد. آماره‌ی آزمون فرض $H_0: \lambda_1 = \dots = \lambda_5, \lambda_6 = \lambda_7$ دارای کدام توزیع هست؟

$$f(x) = \binom{x+k-1}{k-1} \theta^k (1-\theta)^x, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

۱. چندجمله‌ای ۲. نرمال

۳. کای دو با ۵ درجه آزادی ۴. کای دو با 4 درجه آزادی

۶- اگر $X_1, \dots, X_5$ یک نمونه تصادفی از توزیع زیر باشند به ازای $k=4$ و $\bar{X}=3$ برآورد درست‌نمایی ماکسیمم θ چیست؟

$$f(x) = \binom{x+k-1}{k-1} \theta^k (1-\theta)^x, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

۱. 0/00625 ۲. 0/785 ۳. 0/57 ۴. 0/75

۷- اگر $X_1, \dots, X_5$ یک نمونه تصادفی از توزیع زیر باشند به ازای $k = 4$ و $\bar{X} = 3$ ، مقدار واریانس مجانبی برآورد ماکسیمم درستنمایی θ چیست؟

$$f(x) = \binom{x+k-1}{k-1} \theta^k (1-\theta)^x, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

۱. 0/57 ۲. 0/00625 ۳. 1/5 ۴. 0/785

۸- اگر $X_1, \dots, X_5$ یک نمونه تصادفی از توزیع زیر باشند به ازای $k = 4$ و $\bar{X} = 3$ مقدار آماره‌ی آزمون نسبت درستنمایی تعمیم یافته $H_0: \theta = 0/5$ برابر با کدام گزینه است؟

$$f(x) = \binom{x+k-1}{k-1} \theta^k (1-\theta)^x, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

۱. 0/785 ۲. 0/57 ۳. 0/00625 ۴. 0/489

۹- کدام طرح نمونه‌گیری حجم نمونه از قبل مشخص نیست؟

۱. چند جمله‌ای
۲. پیواسنی
۳. حاصلضرب چند جمله‌ای
۴. هندسی

۱۰- در کدام طرح نمونه‌گیری حجم نمونه از قبل مشخص است؟

۱. چند جمله‌ای ۲. پیواسنی ۳. هندسی ۴. نرمال

۱۱- از روی کدام گزینه، می‌توان مدل چندجمله‌ای را با شرطی کردن به دست آورد؟

۱. چندجمله‌ای
۲. پیواسنی
۳. حاصلضرب چندجمله‌ای
۴. موارد ۲ و ۳

۱۲- کدام گزینه درباره‌ی نسبت بخت‌ها درست است؟

۱. تحت تعویض سطرها ثابت است.
۲. تحت تعویض ستون‌ها ثابت است.
۳. اگر همه مشاهدات در عددی ثابت ضرب شوند نسبت بخت‌ها تغییری نمی‌کند.
۴. هر سه مورد

۱۳-

اگر در جدول چهارخانه‌ای داشته باشیم

31	127
118	23

، آنگاه برآورد نسبت بخت‌ها برابر کدام گزینه است؟

۴. 0/0476

۳. 0/56

۲. 0/98

۱. 0/5

۱۴-

در جدول چهارخانه‌ای

31	127
118	23

، فاصله اطمینان با ضریب اطمینان 0/95 برای نسبت بخت‌ها برابر کدام گزینه است؟

۱. (0/026 , 0/086) ۲. (0/026 , 1) ۳. (0/026 , 0/5) ۴. (0/026 , 0/05)

۱۵-

کدام گزینه برای جدول توافقی

31	127
118	23

درست است؟

۱. فرض استقلال عوامل سطر و ستون پذیرفته می‌شود.

۲. فرض استقلال عوامل سطر و ستون رد می‌شود.

۳. درباره‌ی استقلال عوامل سطر و ستون قضاوتی نمی‌توان کرد.

۴. مدل جدول چندجمله‌ای است.

۱۶- در جدول چهارخانه‌ای، تحت مدل حاصلضرب چند جمله‌ای با شرط $P_{11} = P_{12} = p$ توزیع $X_{11} = x_{11}$ به شرط

$X_{11} + X_{21} = x_{01}$ برابر با کدام گزینه است؟

۱. چند جمله‌ای

۲. حاصلضرب چند جمله‌ای

۳. پواسنی

۴. فوق هندسی

۱۷- در جدول چهارخانه‌ای تحت مدل پواسنی کدام گزینه درست است؟

۱. $e^{-4\tau_{11}^{AB}} = \rho$ ۲. $e^{4\tau_{22}^{AB}} = \rho$ ۳. $\tau_{12}^{AB} = \ln \rho$ ۴. $\tau_{12}^{AB} = \rho$

۱۸- در جدول توافقی دو طرفه $I \times J$ با مدل حاصلضرب چند جمله‌ای، کدام گزینه مفهوم وجود اثر متقابل است؟

۱. همگنی توزیع ستون نسبت به سطرها

۲. همگنی توزیع سطر نسبت به ستون‌ها

۳. عدم استقلال سطر و ستون

۴. موارد ۲ و ۳

۱۹- در جدول توافقی دوطرفه $I \times J$ با عامل A (سطر) و عامل B (ستون) و با توجه به اطلاعات زیر مقدار عددی آماره‌ی آزمون بی اثر بودن عامل سطر برابر با کدام گزینه است؟

x_{i0}	$\ln x_{i0}$	x_{0j}	$\ln x_{0j}$
150	5/011	213	5/361
107	4/673	183	5/209
92	4/522		
25	3/219		
22	3/091		
$(\ln \frac{x_{00}}{I} = 4/372, \quad \ln \frac{x_{00}}{J} = 5/288)$			

۱. 396 ۲. 6/626 ۳. 2/184 ۴. 169/7

۲۰- با توجه به اطلاعات زیر، مقدار آماره آزمون بی اثر بودن عامل ستون برابر کدام گزینه است؟

x_{i0}	$\ln x_{i0}$	x_{0j}	$\ln x_{0j}$
150	5/011	213	5/361
107	4/673	183	5/209
92	4/522		
25	3/219		
22	3/091		
$(\ln \frac{x_{00}}{I} = 4/372, \quad \ln \frac{x_{00}}{J} = 5/288)$			

۱. 396 ۲. 6/626 ۳. 2/154 ۴. 169/8

۲۱- کدام گزینه، جدول توافقی با عوامل A و B و C نمودار پیوندی فرض H_3 است؟

۱. $C \oplus A \mid B$ ۲. $C \oplus A, B, C = u$ ۳. $C \oplus A, B$ ۴. $B \oplus A \mid C$

۲۲- در جدول توافقی با سه عامل، تعبیر احتمالی H_3 کدام گزینه است؟

۱. $\frac{P_{ij0}}{K}$ ۲. $P_{ij0} \cdot P_{00k}$ ۳. $\frac{P_{ij0} \cdot P_{00k}}{IJ}$ ۴. $\frac{P_{00k}}{K}$

۲۳- در جدول توافقی با $I = 6, J = 5, k = 7$ درجه آزادی فرض H_{12} برابر با کدام گزینه است؟

۱. 326 ۲. 210 ۳. 203 ۴. 128

۲۴- برای آزمون 8 فرض پایه‌ای مستقل در سطح معنی‌داری پنج درصد به روش سلسله مراتبی مقدار خطای توأم چقدر است؟

۱. 0/245 ۲. 0/05 ۳. 0/337 ۴. 0/158

۲۵- در مدل لوجیت متغیر پاسخ چند سطحی است؟

۱. 1 ۲. 4 ۳. 3 ۴. 2

سوالات تشریحی

۱.۲۰ نمره

۱- برای مدل لگ خطی $\ln f(t, \tau) = t\tau + h(t) - nK(\tau)$ موارد ذیل را اثبات کنید.

الف- معادله درست‌نمایی ماکسیم عبارت است از: $E(T | \tau) = t, t = nK'(t)$.

$$\text{ب- } \frac{d^2(nK(\tau))}{d\tau^2} = \text{Var}(T | \tau)$$

۱.۲۰ نمره

۲- فرض کنید X و Y و Z توزیع سه جمله‌ای و تابع احتمال آنها به صورت زیر باشد به ازای $X = 4$ و $Y = 3$ و $Z = 5$ آماره‌ی آزمون فرض $H_0: p = q = r$ را به دست آورید.

$$f(x, y, z) = \binom{n}{x, y, z} p^x q^y r^z, \quad p + q + r = 1$$

۱.۲۰ نمره

۳- در جدول توافقی دوطرفه $I \times J$ با مدل پواسنی توزیع $X_{11} = x_{11}, \dots, X_{IJ} = x_{IJ}$ را به شرط $X_{00} = x_{00}$ به دست آورید.

۱.۲۰ نمره

۴- در جدول توافقی دوطرفه $I \times J$ ثابت کنید تحت مدل چندجمله‌ای فرض عدم وجود اثر متقابل به معنی استقلال عوامل سطر و ستون است.

۱.۲۰ نمره

۵- در جدول توافقی دو طرفه $I \times J$ ثابت کنید با توجه به توابع درست‌نمایی $L(H_{12}) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J x_{ij} \ln \left(\frac{x_{i0} x_{0j}}{x_{00}} \right)$ و

$$L(H_1) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J x_{ij} \ln \left(\frac{x_{0j}}{I} \right) \quad \text{آماره‌ی آزمون } H_1: \tau_i^A = 0 \quad \text{در برابر فرض } H_{12}: \tau_{ij}^{AB} = 0 \quad \text{عبارت است از:}$$

$$Z(H_1 | H_{12}) = 2 \sum_i x_{i0} \left(\ln x_{i0} - \ln \frac{x_{00}}{I} \right)$$

پاسخ صحیح

شماره
سوال

1	د
2	ب
3	ج
4	ب
5	ج
6	ج
7	ب
8	الف
9	ب
10	الف
11	ب
12	د
13	د
14	الف
15	ب
16	د
17	ب
18	الف
19	د
20	ج
21	ب
22	الف
23	ج
24	ج
25	د

۱- اگر $x_1, \dots, x_n$ متغیر تصادفی مستقل و هم توزیع با توزیع برنولی با پارامتر θ باشند، پارامتر کانونی کدام گزینه است؟

۱. e^θ ۲. $\ln \frac{\theta}{1-\theta}$ ۳. $\ln(1-\theta)$ ۴. $\ln \theta$

۲- 165 نفر به دو سؤال جواب داده‌اند که نتیجه‌ی آزمون در جدول زیر ثبت شده است. مقدار عددی آماره آزمون همگن بودن دو سؤال برابر با کدام گزینه است؟

سؤال 1	جواب غلط	جواب صحیح
سؤال 2		
جواب درست	12	58
جواب غلط	58	32

۱. 4/23 ۲. 1/32 ۳. 9/09 ۴. 5/87

۳- می‌خواهیم تعداد سوانح رانندگی منجر به فوت در روزهای مختلف هفته طی یکسال را بررسی کنیم. برای این مدل فرض می‌کنیم که تعداد وقایع در روزهای مختلف هفته مستقل از هم و دارای توزیع پواسن با پارامتر λ_i ، $i = 1, 2, \dots, 7$ باشد. بعد مدل لگ خطی برای این داده‌ها چند است؟

۱. 6 ۲. 5 ۳. 4 ۴. 7

۴- سه عامل A, B, C را در نظر بگیرید. حاشیه‌ای‌های کافی فرض H_{23} کدام گزینه است؟

۱. AC, BC ۲. AB, AC ۳. AB, C ۴. A, BC

۵- کدام گزینه حوزه‌ی تعریف مدل لگ خطی $\ln f(t, \tau) = t\tau + h(t) - nk(\tau)$ است؟

۱. $\{t : f(t, \tau) > 0\}$ ۲. $\{\tau : f(t, \tau) > 0\}$ ۳. $\left\{t : \sum_{\tau} e^{t\tau + h(t)} < \infty\right\}$ ۴. $\left\{\tau : \sum_t e^{t\tau + h(t)} < \infty\right\}$

۶- در جدول توافقی چهارخانه عوامل سطر و ستون مستقلند، اگر مقدار یک در بازه اطمینان قرار گیرد. (ρ نسبت بخت‌ها)

۱. $\ln(\rho + 1)$ ۲. $\ln(1 - \rho)$ ۳. $\ln \rho$ ۴. $-\ln \rho$

۷- اگر $\ln f(t, \tau) = t\tau + h(t) - n \ln(1 + e^\tau)$ یک مدل لگ خطی و T نیز آماره‌ی بسنده‌ی این مدل باشد، آن‌گاه $\text{var}(T | \tau)$ کدام گزینه است؟

۱. $\frac{ne^t}{(1+e^t)^2}$ ۲. $\frac{ne^\tau}{(1+e^\tau)^2}$ ۳. $\frac{e^\tau}{(1+e^\tau)^2}$ ۴. $\frac{e^t}{(1+e^t)^2}$

۸- در جدول توافقی چهارطرفه، تعبیر نمادی مدل با حاشیه‌های کافی ABC, AD, BD کدام گزینه است؟

۱. $D \oplus A, B, C, D = U$ ۲. $D \oplus A, B, C$ ۳. $D \oplus B, C | A$ ۴. $C \oplus D | A, B$

۹- برآورد امید ریاضی مشاهدات در یک جدول توافقی سه طرفه تحت فرض $H_{12,13,23}$ برابر با کدام گزینه است؟

۱. $\frac{x_{i..} x_{.j.} x_{..k}}{x_{...}^2}$ ۲. $\frac{x_{ij.} x_{i.k}}{x_{...}^2}$ ۳. $\frac{x_{i..} x_{.jk}}{x_{i..}^2}$ ۴. $\frac{x_{i..} x_{.j.} x_{..k}}{x_{...}}$

۱۰- با توجه به اطلاعات زیر از یک جدول توافقی سه طرفه، مقدار آماره آزمون $Z(H_{12,13} | H_{12})$ کدام گزینه است؟

فرض	H_{123}	H_{23}, H_{13}, H_{12}	$H_{13,23}, H_{12,23}, H_{12,13}$	$H_{12,13,23}$	H_3
آماره آزمون	0.06	71.90, 19.71, 5.39	102.11, 87.79, 35.60	118.00	167.48
درجه آزادی	1	2, 2, 2	3, 3, 3	4	5
$\chi_{1,0.01} = 3.841$					

۱. 23/34 ۲. 54/12 ۳. 12/3 ۴. 30/21

۱۱- مطابق با اطلاعات به شرح ذیل، زنجیره‌ی آزمون‌های متوالی چیست؟

فرض	H_{123}	H_{23}, H_{13}, H_{12}	$H_{13,23}, H_{12,23}, H_{12,13}$	$H_{12,13,23}$	H_3
آماره آزمون	0.06	71.90, 19.71, 5.39	102.11, 87.79, 35.60	118.00	167.48
درجه آزادی	1	2, 2, 2	3, 3, 3	4	5
$\chi_{1,0.01} = 3.841$					

۱. $H_{123} \rightarrow H_{23} \rightarrow H_{12,13}$ ۲. $H_{123} \rightarrow H_{12} \rightarrow H_{12,13}$ ۳. $H_{123} \rightarrow H_{13} \rightarrow H_{12,13}$ ۴. $H_{123} \rightarrow H_{13} \rightarrow H_{12,13} \rightarrow H_3$

۱۲- در یک جدول توافقی سه طرفه با عوامل A, B, C تعبیر نمادی مربوط به H_{13} کدام گزینه است؟

۱. $A \oplus B$ ۲. $A \oplus B | C$ ۳. $A \oplus C | B$ ۴. $B \oplus C | A$

۱۳- در یک جدول توافقی چهارطرفه اگر مدل شامل جملات (اثر متقابل چهار عامل و همه اثرات متقابل سه عاملی شامل A صفر است) باشد، با فرض متغیر A به عنوان متغیر پاسخ و متغیرهای D, C, B متغیرهای توضیحی دو سطحی باشند، لوجیت آن مدل به صورت مقادیر B کدام است؟

۱. $\beta_0 + \beta^B z(j) + \beta^C z(k) + \beta^D z(l)$ ۲. $\beta_0 + \beta_j^B + \beta_k^C + \beta_l^D$
۳. $\beta_0 + \beta^C z(k) + \beta^D z(l)$ ۴. $\beta_0 + \beta^B z(j) + \beta^C z(k) - \beta^D z(l)$

۱۴- اگر هدف آزمون 8 فرض مستقل در سطح $\alpha = 0/05$ در یک جدول توافقی باشد، آنگاه مقدار خطای توأم به روش‌های اصل سلسله مراتبی (R_1) و بن‌فرونی (R_2) عبارتند از:

۱. $R_1 = R_2 = 0.05$ ۲. $R_1 = 0.337$ ۳. $R_1 = 0.733$ ۴. $R_1 = 0.337$
 $R_2 \leq 0.05$ $R_2 \leq 0.05$ $R_2 \leq 0.05$ $R_2 = 0.05$

۱۵- با توجه به جدول ذیل، مشاهدات حاشیه کافی AC چیست؟

i, j, k	1, 1, 1	2, 1, 1	1, 2, 1	2, 2, 1	1, 1, 2	2, 1, 2	1, 2, 2	2, 2, 2
X_{ijk}	156	84	84	156	107	133	31	209

۲.

1,1,0	2,0,1	1,0,2	2,0,2
240	342	138	240

۱.

1,0,1	2,0,1	1,0,2	2,0,2
240	240	138	342

۴.

1,1,0	2,0,1	1,0,2	2,0,2
240	240	342	138

۳.

1,1,0	2,0,1	1,0,2	2,0,2
240	240	138	240

۱۶- کدام مورد درباره تابع لوجیت نادرست است؟

۱. تابعی یکنواست.
۲. حوزه تعریف آن (0 ، 1) است.
۳. حوزه مقادیرش $(-\infty, \infty)$ است.
۴. دارای ماکسیمم یکتا است.

۱۷- بعد مدل لگ خطی در جدول توافقی با 6 سطر و 7 ستون تحت مدل حاصلضرب چندجمله‌ای برابر کدام گزینه است؟

۱. 36 ۲. 42 ۳. 12 ۴. 8

۱۸- در جدول توافقی چهارطرفه تحت فرض با حاشیه‌ای‌های کافی AD, ABC برآورد درست‌نمایی ماکسیمم امید ریاضی مشاهدات برابر کدام گزینه است؟

$$\hat{\mu}_{ijkl} = \frac{x_{.jkl} x_{ij..}}{x_{.j..}} \quad .4 \quad \hat{\mu}_{ijkl} = \frac{x_{ij.l} x_{.kl}}{x_{..l}} \quad .3 \quad \hat{\mu}_{ijkl} = \frac{x_{ijk.} x_{.jk.}}{x_{.k.}} \quad .2 \quad \hat{\mu}_{ijkl} = \frac{x_{ijk.} x_{.j.l}}{x_{i..}} \quad .1$$

۱۹- در یک جدول توافقی دوطرفه تحت مدل چندجمله‌ای، فرض‌های $H_{12} : \tau_{ij}^{AB} = 0$ ، $H_1' : \tau_i^A = 0$ معرف چیست؟

$$P_i = \frac{1}{I} \quad .4 \quad \lambda_i = \frac{\lambda}{I} \quad .3 \quad \lambda_j = \frac{\lambda}{J} \quad .2 \quad P_j = \frac{1}{J} \quad .1$$

۲۰- می‌خواهیم تأثیر تفاوت سنی زوج و زوجه (B) را در طول عمر زندگی مشترک (A) تعدادی زوج که ازدواج آن‌ها به جدایی منتهی گردیده است را مورد مطالعه قرار دهیم. اگر عامل A در 6 سطح و عامل B در 3 سطح در نظر گرفته شود، آنگاه درجه‌ی آزادی آزمون فرض عدم وجود اثر متقابل عوامل A, B کدام است؟

۱. 5 ۲. 9 ۳. 10 ۴. 6

سوالات تشریحی

۱- درباره‌ی عوامل دو سطحی زیر، اطلاعاتی به صورت زیر به دست آمده است.
 الف) حاشیه‌های کافی و لوجیت محدودترین مدل برازش شده به داده‌ها را تعیین کنید.
 ب) با توجه به تعاریف زیر، اشتغال به کار یک زن و یک مرد در بخش دولتی را یافته و برای این ترکیب‌ها، احتمال عضویت داشتن در حزب را به دست آورید.

مدل لگ خطی	فرض	z(H)
AB, AC, AD, BCD	—	64/0
AB, AC, BCD	$\beta^D = 0$	87/0
AB, BCD	$\beta^D = \beta^C = 0$	14/17
A, BCD	$\beta^D = \beta^C = \beta^B = 0$	80/28

A: عضویت در حزب (1- دارد، 2- ندارد)

B: جنس (1- زن، 2- مرد)

C: وضعیت اشتغال (1- دولتی، 2- خصوصی)

D: محل سکونت (1- پایتخت، 2- شهرهای دیگر)

- ۲- جدول زیر اطلاعاتی درباره‌ی تعداد سوانح رانندگی منجر به فوت در روزهای مختلف هفته طی یک سال را نشان می‌دهد. اگر تعداد وقایع در روز i ام هفته (X_i) دارای توزیع پواسن با پارامتر m_i باشد فرض $H_0 : m_1 = \dots = m_7 = m$ را در سطح $\alpha = 0.05$ آزمون کنید. ($\chi^2_{6,0.05} = 12.6$)

روز	شنبه	یکشنبه	دوشنبه	سه‌شنبه	چهارشنبه	پنجشنبه	جمعه
Xi	236	236	248	240	240	240	240

- ۳- جدول زیر رضایت شغلی 715 کارگر و سرکارگر و کیفیت مدیریتی کارخانه را نشان می‌دهد.

رضایت کارگر (A)			
		رضایت سرکارگر (B)	
بالا	پایین	پایین	کیفیت مدیریتی
87	103	پایین	کارخانه (C)
42	32	بالا	
109	59	پایین	
205	78	بالا	
		قوی	

آماره آزمون نیکویی برازش فرضیه $H_{12} : \tau_{ijk}^{(123)} = \tau_{ij}^{(12)} = 0$ را به دست آورید.

- ۴- اگر $X_1, X_2, \dots, X_n$ مشاهدات مستقل و هم‌توزیع و تابع احتمال آنها به صورت لگ خطی یک بعدی باشد ثابت کنید تحت فرض H_0 آماره آزمون نسبت درست‌نمایی تبدیل یافته توزیع مجانبی مربع کای با یک درجه آزادی دارد.

- ۵- مدل‌های چندجمله‌ای و حاصل ضرب چندجمله‌ای را توضیح دهید و تفاوت‌های آن را بیان کنید.

شماره سوال	پاسخ صحیح
1	ب
2	ج
3	الف
4	ب
5	د
6	ج
7	ب
8	د
9	الف
10	د
11	ب
12	ج
13	الف
14	ب
15	الف
16	د
17	الف
18	الف
19	د
20	ج

سوالات تشریحی

نمره ۱.۲۰

۱- الف) محدودترین مدلی که به داده‌ها می‌برازد، مدل با حاشیه‌ایهای کافی AB, AC, BCD است. لوجیت این مدل عبارت است از:

$$g_{jkl} = \beta_0 + \beta^B z(j) + \beta^C z(k)$$

ب) ابتدا برآورد پارامترهای مدل نهایی، $\hat{\beta}^C, \hat{\beta}^B, \hat{\beta}_0$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\hat{\beta}_0 = 2\hat{t}_1^A = -2.56, \quad \hat{\beta}^B = 2\hat{t} - 0.324, \quad \hat{\beta}^C = 2\hat{t}_{11}^{AC} = 0.302$$

برای $k=1$ و $j=1$ یعنی اشتغال به کار یک زن در بخش دولتی و برای $k=1$ و $j=2$ یعنی اشتغال به کار یک مرد در بخش دولتی داریم:

$$\hat{g}_{11} = -2.582, \quad \hat{g}_{21} = -1.934$$

و برای این ترکیب‌ها احتمال عضویت داشتن در حزب بنا به رابطه‌ی $p_{1jkl} = \frac{e^{g_{jkl}}}{1 + e^{g_{jkl}}}$ برابر است با:

$$\hat{p}_{111} = 0.070, \quad \hat{p}_{121} = 0.126$$

لذا می‌توان گفت احتمال اینکه شخص شاغل در بخش دولتی که او را به تصادف انتخاب کرده‌ایم عضو حزب باشد کلاً عددی کوچک است و این احتمال به صورت قابل ملاحظه‌ای برای زن‌ها کمتر از مردها می‌باشد.

با توجه به $P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$ به دست می آوریم $\frac{e^{-n\lambda} \lambda^{\sum X_i}}{\prod X_i}$. لذا داریم

$$\ln Lf(x; \theta) = -n\lambda + \sum X_i \cdot \ln \lambda - \ln \sum X_i$$

$$n = 7 : \ln Lf(x; \theta) = -7\lambda + \sum X_i \cdot \ln \lambda - \ln \sum X_i$$

به دست می آوریم

$$T = \sum X_i = 1680 \quad , \quad \bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = 240 \quad , \quad \tau = \ln \lambda, e^\tau = \lambda = \bar{X} = 240 \Rightarrow \tau = \ln 240 = 5.48$$

حال جدول را به صورت زیر کامل می کنیم:

$x_i (\ln x_i - \ln \lambda)$	$\ln x_i - \ln \bar{x}$	$\ln x_i$	x_i
-72/4	-02/0	46/5	236
-72/4	-02/0	46/5	236
+44/7	+03/0	51/5	248
0	0	48/5	240
0	0	48/5	240
0	0	48/5	240
0	0	48/5	240

$$-2 \ln r = 2 \sum x_i (\ln x_i - \ln \bar{x}) = 4 < \chi_6^2 = 12.6 \Rightarrow AH_0$$

$$Z(H_{12} | H_{123}) = Z(H_{12} | H_A) - Z(H_{123} | H_A) = 5.39 - 0.06 = 5.33 \quad -۳$$

با $1=2-1$ درجه‌ی آزادی که در سطح $0.1/0$ معنی‌دار نیست.

$$Z(H_{12,13} | H_{12}) = Z(H_{12,13} | H_A) - Z(H_{12} | H_A) = 35.60 - 5.39 = 30.21$$

با $1=2-1$ درجه‌ی آزادی. این مقدار از عدد جدول توزیع کای دو با یک درجه آزادی بی‌شتر است. لذا فرض $H_{12,13}$ را رد می‌کنیم. عملاً در این مرحله آزمون زنجیر آزمون‌های دنباله‌ای به آخر می‌رسد.

نتیجه می‌گیری که مدل H_{12} یعنی استقلال شرطی عوامل اول و دوم نسبت به عامل سوم برازشی نی‌کو به داده‌ها دارد. یعنی رضایت کارگر مستویاً تحت تأثیر رضایت سرکارگر قرار نمی‌گیرد. یا رضایت سرکارگر صرفاً به دلیلی رضایت یا عدم رضایت کارگر نیست. بلکه هر دوی این‌ها وابسته به عملکرد مدیریتی‌اند.

$$Z(H_{12} | H_{123}) = Z(H_{12} | H_A) - Z(H_{123} | H_A) = 5.39 - 0.06 = 5.33$$

با $1=2-1$ درجه‌ی آزادی که در سطح $0.1/0$ معنی‌دار نیست.

$$Z(H_{12,13} | H_{12}) = Z(H_{12,13} | H_A) - Z(H_{12} | H_A) = 35.60 - 5.39 = 30.21$$

با $1=2-1$ درجه‌ی آزادی. این مقدار از عدد جدول توزیع کای دو با یک درجه آزادی بی‌شتر است. لذا فرض $H_{12,13}$ را رد می‌کنیم. عملاً در این مرحله آزمون زنجیر آزمون‌های دنباله‌ای به آخر می‌رسد.

نتیجه می‌گیری که مدل H_{12} یعنی استقلال شرطی عوامل اول و دوم نسبت به عامل سوم برازشی نی‌کو به داده‌ها دارد. یعنی رضایت کارگر مستویاً تحت تأثیر رضایت سرکارگر قرار نمی‌گیرد. یا رضایت سرکارگر صرفاً به دلیلی رضایت یا عدم رضایت کارگر نیست. بلکه هر دوی این‌ها وابسته به عملکرد مدیریتی‌اند.

-۴: با بسط تابع $k(\tau_0)$ به صورت یک سری تیلور پیرامون $\hat{\tau}$ به دست می‌آوریم

$$k(\tau_0) - k(\hat{\tau}) = (\tau_0 - \hat{\tau}) k'(\hat{\tau}) + \frac{(\tau_0 - \hat{\tau})^2}{2} k''(\tau^*)$$

که در آن τ^* عددی است بین τ_0 و $\hat{\tau}$ ، و $\hat{\tau}$ برآورد درست‌نمایی ماکسیمم τ است. حال با توجه به عبارت

$$\ln r(T) = T(\tau_0 - \hat{\tau}) - n[k(\tau_0) - k(\hat{\tau})]$$

و برابری $T = nk'(\hat{\tau})$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} -2 \ln r(T) &= -2T(\tau_0 - \hat{\tau}) + 2n[k(\tau_0) - k(\hat{\tau})] \\ &= -2T(\tau_0 - \hat{\tau}) + 2n \left[(\tau_0 - \hat{\tau}) k'(\hat{\tau}) + \frac{(\tau_0 - \hat{\tau})^2}{2!} k''(\tau^*) \right] \\ &= n(\tau_0 - \hat{\tau})^2 k''(\tau^*) \end{aligned}$$

می‌دانیم که تحت فرض H_0 ، $\sqrt{nk''(\tau_0)}(\hat{\tau} - \tau_0)$ توزیع مجانبی نرمال استاندارد دارد و τ^* در احتمال به τ_0

همگراست. بنابراین $-2 \ln r(T) \sim \chi^2(1)$ است.

۱- توزیع آماری پایه‌ای برای اغلب داده‌های رسته‌ای چه توزیعی است؟

۱. نرمال
۲. پواسن
۳. چندجمله‌ای
۴. حاصلضرب چندجمله‌ای

۲- 250 خانواده را به تصادف در نظر گرفته و آن‌ها را برحسب تعداد فرزندان‌شان مطابق جدول زیر طبقه‌بندی نموده‌ایم. آماره آزمون اینکه خانواده‌ها از نظر تعداد اولاد یکسان هستند یا نه چیست؟

تعداد اولاد	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
تعداد خانواده‌ها	17	31	29	18	14	20	35	30	20	36

۱. 23.28
۲. 29.35
۳. 65.32
۴. 45.21

۳- می‌خواهیم تعداد سوانح رانندگی منجر به فوت در روزهای مختلف هفته طی یکسال را بررسی کنیم. برای این مدل فرض می‌کنیم که تعداد وقایع در روزهای

مختلف هفته مستقل از هم و دارای توزیع پواسن با پارامتر $i = 1, 2, \dots, 7$, λ_i باشد. بعد مدل لگ خطی برای این داده‌ها چند است؟

۱. 5
۲. 4
۳. 7
۴. 6

۴- توزیع مجانبی آماره آزمون نسبت درست‌نمایی تعمیم‌یافته تحت فرض $H_0 : \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_5 \\ \lambda_6 = \lambda_7 \end{cases}$ چیست؟

۱. پواسن
۲. χ^2_5
۳. دوجمله‌ای
۴. چندجمله‌ای

۵- سه عامل A, B, C را در نظر بگیرید. حاشیه‌ای‌های کافی فرض H_{23} کدام‌اند؟

۱. AC, BC
۲. AB, AC
۳. AB, C
۴. A, BC

۶- در یک جدول سه طرفه عوامل A, B, C به ترتیب 2, 3, 4 سطح دارند. درجه‌ی آزادی آماره آزمون فرض H_{12} چقدر است؟

۱. 8
۲. 7
۳. 6
۴. 9

۷- نسبت بخت‌ها در جدول زیر چقدر است؟

	مبتلا شده	مبتلا نشده
تزریق سرم داشته	25	75
تزریق سرم نداشته	35	65

۱. 0.50 ۲. 0.40 ۳. 0.62 ۴. 0.39

۸- اگر $x_1, \dots, x_6$ شش مشاهده‌ی مستقل از توزیع $f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1+x}{2}} \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1-x}{2}}$ ، $(x = -1, 1)$ باشند آنگاه برآورد درست‌نمایی

ماکسیمم پارامتر کانونی کدام است؟

۱. $\frac{1 + \bar{X}}{1 - \bar{X}}$ ۲. $\ln \frac{1 + \bar{X}}{1 - \bar{X}}$ ۳. $\ln \sqrt{\frac{1 + \bar{X}}{1 - \bar{X}}}$ ۴. $\ln \sqrt{\frac{1 - \bar{X}}{1 + \bar{X}}}$

۹- در جدول‌های توافقی دو طرفه تحت چه مدلی فرض عدم وجود اثر متقابل به معنی استقلال عوامل سطر و ستون است.

۱. مدل چند جمله‌ای
۲. مدل حاصل ضرب چند جمله‌ای
۳. مدل پواسنی
۴. هر طرح نمونه‌گیری

۱۰- برای مطالعه احساس مسئولیت افراد مختلف در امور اجتماعی، اطلاعاتی از 4229 نفر در مورد موضوع معینی پرسیده شده است که در جدول زیر ثبت شده‌اند. مدل داده‌ها چیست؟

	مرد	زن
پاسخ داده‌اند	1893	1838
پاسخ نداده‌اند	240	258

۱. پواسن ۲. دوجمله‌ای
۳. حاصلضرب چندجمله‌ای ۴. چندجمله‌ای

۱۱- در جدول توافقی چهارطرفه، تعبیر نمادی مدل با حاشیه‌های کافی AD، BD، ABC چیست؟

۱. $D \oplus B, C \mid A$ ۲. $D \oplus A, B, C$
۳. $D \oplus A, B, C, D = U$ ۴. $C \oplus D \mid A, B$

۱۲- در یک جدول سه طرفه عوامل A، B، C به ترتیب 2، 3، 4 سطح دارند. درجه‌ی آزادی آماره آزمون فرض H_{12} چقدر است؟

۱. 9 ۲. 8 ۳. 7 ۴. 6

۱۳- در جدول توافقی چهارطرفه تحت فرض با حاشیه‌ای‌های کافی AD، ABC بر آورد درست‌نمایی ماکسیمم امید ریاضی مشاهدات چقدر است؟

$$\hat{\mu}_{ijkl} = \frac{x_{ijk.} x_{.jl}}{x_{i...}} \quad .4 \quad \hat{\mu}_{ijkl} = \frac{x_{ijk.} x_{.jk.}}{x_{.k.}} \quad .3 \quad \hat{\mu}_{ijkl} = \frac{x_{ij.l} x_{.kl}}{x_{..l}} \quad .2 \quad \hat{\mu}_{ijkl} = \frac{x_{.jkl} x_{ij..}}{x_{.j..}} \quad .1$$

۱۴- در یک جدول توافقی دو طرفه با عوامل A، B (در دو سطح)، اگر $x_{01} = 213$ و $x_{02} = 183$ باشد، بر آورد پارامتر $\hat{\tau}_1^B$ تحت فرض عدم وجود اثر متقابل کدام است؟

$$0.076 \quad .1 \quad 1.098 \quad .2 \quad 2.045 \quad .3 \quad 1.340 \quad .4$$

۱۵- یک جدول توافقی سه طرفه دارای پانزده فرض پایه‌ای است که سطح معنی‌داری سیزده فرض صفر و دو فرض دارای سطح معنی‌داری غیرصفر متفاوت است. کوچکترین سطح معنی‌داری با کدام عدد در سطح $\alpha = 0.05$ مقایسه می‌شود؟

$$0.05 \quad .1 \quad 0.01 \quad .2 \quad 0.025 \quad .3 \quad 0.55 \quad .4$$

۱۶- در مدل لگ خطی $f(t; \tau) = t\tau + h(t) - nk(\tau)$ کدام مورد درباره‌ی $k(\tau)$ صحیح است؟

۱. همواره $k'(\tau)$ صعودی است.
۲. به ازای تمام مقادیر τ که $Var(T | \tau) \neq 0$ ، $k'(\tau)$ تابع صعودی است.
۳. به ازای تمام مقادیر τ که $Var(T | \tau) \neq 0$ ، معادله‌ی $nk'(\tau) = t$ حداکثر یک جواب دارد.
۴. گزینه 2 و 3

۱۷- در یک جدول توافقی 2×2 اگر $x_{..} = 100$ ، $x_{.1} = 45$ ، $x_{.2} = 45$ ، $x_{1.} = 20$ ، $x_{2.} = 20$ باشند، آنگاه $\hat{\mu}_{11}$ تحت فرض استقلال عوامل سطر و ستون چیست؟

$$5.105 \quad .1 \quad 2.197 \quad .2 \quad 3.987 \quad .3 \quad 6/153 \quad .4$$

۱۸- در یک جدول توافقی سه طرفه $2 \times 2 \times 2$ اگر $x_{1..} = 240$ ، $\hat{\mu}_{111}^{(1)} = 131.5$ ، $\hat{\mu}_{121}^{(1)} = 57.5$ باشند، آنگاه $\hat{\mu}_{111}^{(2)}$ چیست؟

$$120.54 \quad .1 \quad 166.98 \quad .2 \quad 190.03 \quad .3 \quad 180.01 \quad .4$$

۱۹- تبدیل لوجیت مدل زیر کدامست؟

$$\ln(nP_{ijkl}) = \tau_0 + \tau_i^A + \tau_{ij}^{AB} + \tau_{ik}^{AC} + \tau_{il}^{AD} + (D \text{ و } C \text{ و } B \text{ شامل})$$

$$\beta_0 + \beta_l^D \quad .1 \quad \beta_0 + \beta_k^C \quad .2 \quad \beta_0 + \beta_j^B + \beta_k^C \quad .3 \quad \beta_0 + \beta_j^B + \beta_k^C + \beta_l^D \quad .4$$

۲۰- اثر متغیرهای توضیحی، بر احتمال مشاهده سطح اول پاسخ با معلوم بودن لوجیت $g = g_{ijk}$ کدام است؟

۱. $\frac{e^g}{1+g}$
۲. $\frac{e^g}{1-g}$
۳. $\frac{e^g}{1+e^g}$
۴. $\frac{1+e^g}{e^g}$

سوالات تشریحی

۱- اگر $X_1, \dots, X_k$ دارای توزیع چندجمله‌ای با پارامترهای n و $P_1, P_2, \dots, P_k$ باشند، پارامترهای کانونی و آماره‌های بسنده مدل لگ خطی را تعیین کنید.

۲- جدول زیر رضایت شغلی 715 کارگر و سرکارگر و کیفیت مدیریتی کارخانه را نشان می‌دهد.

رضایت کارگر (A)		رضایت سرکارگر (B)		کیفیت مدیریتی کارخانه (C)
بالا	پایین	بالا	پایین	
87	103	پایین	پایین	ضعیف
42	32	بالا	پایین	قوی
109	59	پایین	پایین	
205	78	بالا	پایین	

آماره آزمون نیکویی برازش فرضیه $H_{12} : \tau_{ijk}^{(123)} = \tau_{ij}^{(12)} = 0$ را به دست آورید.

۳- کارگران کارخانه‌ای برای انجام کار از دو نوع ماشین استفاده می‌کنند. یکی ماشین دستی و دیگری ماشین خودکار. جهت بررسی ایمنی انجام کار با این ماشین‌ها اطلاعات زیر در دست است. آیا با حدود اطمینان 95 درصد می‌توان فرض برابری حوادث را پذیرفت؟ (عدد جدول را 3/84 بگیرید)

ماشین خودکار	ماشین دستی	
23	25	حادثه دیده
112	183	سالم

۴- در جدول‌های توافقی چهارخانه‌ای

الف- برآورد درست‌نمایی پارامترهای جدید τ را تعیین کنید.

ب- ثابت کنید عوامل سطر و ستون مستقل‌اند اگر و فقط اگر پارامترهای اثر متقابل $\tau_{ij}^{(AB)} = 0$.

۵- در یک جدول توافقی می‌خواهیم فرض‌های مستقل $H_1, \dots, H_m$ را بیازماییم،

الف) مقدار خطای توأم این آزمون را به روش‌های اصل سلسله مراتبی و بن فرونی یافته و

ب) نحوه اجرای آزمون را به روش بن فرنی توضیح دهید.

پاسخ صحیح

شماره سوال

۱	ج
۲	الف
۳	د
۴	ب
۵	ب
۶	الف
۷	ج
۸	ج
۹	د
۱۰	د
۱۱	د
۱۲	ب
۱۳	د
۱۴	الف
۱۵	ج
۱۶	د
۱۷	ب
۱۸	ب
۱۹	د
۲۰	ج

سوالات تشریحی

۱.۲۰ نمره

$$f(x_1, \dots, x_k; p_1, \dots, p_k) = \binom{n}{x_1, \dots, x_k} p_1^{x_1} \dots p_k^{x_k} \quad -1$$

$$\sum_{j=1}^k x_j = n \quad \text{و} \quad \sum_{j=1}^k p_j = 1$$

در این صورت با توجه به قیود داری

$$\begin{aligned} \ln f(x_1, \dots, x_k; p_1, \dots, p_k) &= \ln \binom{n}{x_1, \dots, x_k} + \sum_{j=1}^k x_j \ln p_j \\ &= \ln \binom{n}{x_1, \dots, x_k} + \sum_{j=1}^{k-1} x_j \ln p_j + x_k \ln p_k \\ &= \ln \binom{n}{x_1, \dots, x_k} + \sum_{j=1}^{k-1} x_j \ln p_j + (n - \sum_{j=1}^{k-1} x_j) \ln p_k \\ &= \ln \binom{n}{x_1, \dots, x_k} + \sum_{j=1}^{k-1} x_j \ln \left(\frac{p_j}{p_k} \right) + n \ln p_k \end{aligned}$$

پس مدل به صورت لگ خطی با پارامترهای کانونی

$$\tau_j = \ln p_j - \ln p_k, \quad j = 1, \dots, k-1$$

و آماره‌های بسنده

$$T_j = X_j, \quad j = 1, \dots, k-1$$

است. این مدل لگ خطی از بعد $m = k - 1$ است.

۱.۲۰ نمره

$$Z(H_{12} | H_{123}) = Z(H_{12} | H_A) - Z(H_{123} | H_A) = 5.39 - 0.06 = 5.33 \quad -2$$

با $2-1=1$ درجه‌ی آزادی که در سطح 01/0 معنی‌دار نیست.

$$Z(H_{12,13} | H_{12}) = Z(H_{12,13} | H_A) - Z(H_{12} | H_A) = 35.60 - 5.39 = 30.21$$

با $3-2=1$ درجه‌ی آزادی. این مقدار از عدد جدول توزیع کای دو با یک درجه آزادی بیشتر است. لذا فرض $H_{12,13}$ را رد می‌کنیم. عملاً در این مرحله آزمون زنجیر آزمون‌های دنباله‌ای به آخر می‌رسد.

نتیجه می‌گیریم که مدل H_{12} یعنی استقلال شرطی عوامل اول و دوم نسبت به عامل سوم برازشی نیکو به داده‌ها دارد. یعنی رضایت کارگر مستقیماً تحت تأثیر رضایت سرکارگر قرار نمی‌گیرد.

$$p = \frac{48}{343} = 0.13$$

$$208 \times \frac{48}{343} = 29.108$$

بنابراین از تعداد ۲۰۸ کارگری که با ماشین دست کار کرده‌اند باید انتظار داشته باشیم نفر دچار حادثه شوند. همین

$$135 \times \frac{48}{343} = 18.892$$

طور از ۱۳۵ کارگری که با ماشین خودکار کار کرده‌اند می‌توان انتظار داشت که نفر دچار سانحه شوند. بنابراین بای د فراوانی‌های نظری به صورت زیر باشند:

ماشین دستی	ماشین خودکار	جمع
حادثه دیده	$n'_2 = 892/18$	$n'_1 + n'_2 = 48$
سالم	$n'_4 = 108/116$	$n'_3 + n'_4 = 295$
جمع	$n'_2 + n'_4 = 135$	$n'_1 + n'_2 + n'_3 + n'_4 = 343$

در نتیجه

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^4 \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$$

$$= \frac{(29.108 - 25)^2}{29.108} + \frac{(18.892 - 23)^2}{18.892} + \frac{(178.892 - 183)^2}{178.892} + \frac{(116.108 - 183)^2}{116.108} = 1.71$$

با حدود اطمینان ۹۵٪ کار با ماشین معمولی و کار با ماشین خودکار از نظر ایجاد حوادث ناشی از کار اختلاف قابل ملاحظه‌ای با هم ندارند.

$$E(X_{ij}) = \exp[\tau_{ij}^{AB} + \tau_i^A + \tau_j^B + \tau_0] \quad , \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, I \\ j = 1, 2, \dots, J \end{matrix}$$

الف) برای مدل پواسنی با پارامترهای λ_{ij} داریم، $E(X_{ij}) = \lambda_{ij}$. بنابراین می‌توان نوشت

$$\ln \lambda_{ij} = \tau_{ij}^{AB} + \tau_i^A + \tau_j^B + \tau_0$$

و با جمع‌بندی طرفین روی زیرنویس‌های i و j و در نظر گرفتن قیدهای می‌آوریم

$$\sum_{i=1}^I \tau_{ij}^{AB} = \sum_{j=1}^J \tau_{ij}^{AB} = \sum_{i=1}^I \tau_i^A = \sum_{j=1}^J \tau_j^B = 0$$

به دست

$$\tau_0 = \frac{1}{IJ} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \ln \lambda_{ij}$$

$$\tau_i^A = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \ln \lambda_{ij} - \frac{1}{IJ} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \ln \lambda_{ij}$$

$$\tau_j^B = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \ln \lambda_{ij} - \frac{1}{IJ} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \ln \lambda_{ij}$$

$$\tau_{ij}^{AB} = \ln \lambda_{ij} - \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \ln \lambda_{ij} - \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \ln \lambda_{ij} + \frac{1}{IJ} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \ln \lambda_{ij}$$

ب) با فرض $H_0 : \tau_{ij}^{(AB)} = 0$ برای جدول‌های توافقی 2×2 با قیدهای ذکر شده در قسمت الف داریم

$$\tau_{11}^{AB} = \tau_{12}^{AB} = -\tau_{21}^{AB} = -\tau_{22}^{AB}$$

و با در نظر گرفتن آخرین عبارت قسمت الف

$$\begin{aligned} \tau_{11}^{AB} &= \ln \lambda_{11} - \frac{1}{2} (\ln \lambda_{11} + \ln \lambda_{12}) - \frac{1}{2} (\ln \lambda_{11} + \ln \lambda_{21}) \\ &\quad + \frac{1}{4} (\ln \lambda_{11} + \ln \lambda_{12} + \ln \lambda_{21} + \ln \lambda_{22}) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4} (\ln \lambda_{11} - \ln \lambda_{12} - \ln \lambda_{21} + \ln \lambda_{22})$$

$$= \frac{1}{4} \ln \left(\frac{\lambda_{11} \lambda_{22}}{\lambda_{12} \lambda_{21}} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \ln \rho$$

(الف)

$$\alpha = P(Z_j > z_j | H_j) \quad , \quad j = 1, 2, \dots, m$$

$$P(Z_j > z_j | H_1, \dots, H_m) \text{ حداقل برای یک } j, \text{ خطای توأم} =$$

(ب)

$$P(\text{رد حداقل یک فرض} | H_1, \dots, H_m) = \text{خطای توأم}$$

$$= P\left[\bigcup_{j=1}^m (Z_j > z_j) | H_1, \dots, H_m\right]$$

$$\leq \sum_{j=1}^m P((Z_j > z_j) | H_1, \dots, H_m)$$

$$= \sum_{j=1}^m \left(\frac{\alpha}{m}\right) = \alpha$$