

عنوان درس: روشهای عددی و شبیه سازی

استفاده از ماشین حساب ساده مجاز است

۱- الگوریتم بوت استرپ صدک دارای چند گام است؟

۱. 1 ۲. 4 ۳. 5 ۴. 6

۲- یکی از توزیع های مهم در شبیه سازی:

۱. توزیع بتا ۲. توزیع دوجمله ای ۳. توزیع هندسی ۴. هیچکدام

۳- در تولید اعداد تصادفی یکنواخت در بازه (a, b) از کدام تبدیل استفاده می شود؟

۱. $(a-b)U$ ۲. $(a-b)U + b$ ۳. $(a-b)U + a$ ۴. $(b-a)U + a$

۴- در روش تبدیل معکوس برای حالت گسسته اگر $u \leq p_0 + p_1 + p_2$ آنگاه:

۱. $x = x_0$ ۲. $x = x_1$ ۳. $x = x_2$ ۴. $x = \min\{x_0, x_1, x_2\}$

۵- برای تولید متغیر تصادفی از توزیع نرمال استاندارد به روش قبول-رد با فرض $g(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}$ مقدار C کدام است؟

۱. 0.153 ۲. 1.52 ۳. 0.351 ۴. 25.1

۶- تبدیل معکوس برای تولید متغیرهای تصادفی از توزیع بتا کدام است؟

۱. $X = \frac{\sum_{i=1}^{\alpha} \log U_i}{\sum_{i=\alpha}^{\alpha+\beta} \log U_{i+1}}$ ۲. $X = \frac{\sum_{i=1}^{\alpha} \log U_{i+1}}{\sum_{i=\alpha}^{\alpha+\beta} \log U_{i+1}}$ ۳. $X = \frac{\sum_{i=1}^{\alpha} \log U_i}{\sum_{i=1}^{\alpha+\beta} \log U_i}$ ۴. $X = \frac{\sum_{i=1}^{\alpha} \log \alpha U_i}{\sum_{i=1}^{\alpha+\beta} \log \beta U_i}$

۷- 5 امین گام تولید داده های تصادفی از توزیع دوجمله ای استفاده از روش معکوس کدام است؟

$$f = f + p_r, i = i + 1, p_r = \left[\frac{c(n-i)}{i+1} \right] p_r \quad .1$$

$$f = f + p_r, i = i + 1, p_r = \left[\frac{c(n+i)}{i+c} \right] p_r \quad .2$$

$$f = f + p_r, i = i + 1, p_r = \left[\frac{(n+i)}{i+c} \right] p_r \quad .3$$

$$f = f + (ni + c) p_r, i = i + 1, p_r = \left[\frac{(n+i)}{i+c} \right] p_r \quad .4$$

۸- در الگوریتم روش Hit-or-Miss برآوردگر θ عبارت است از:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{n}{x+n} \quad .1 \quad \hat{\theta}_1 = \frac{x+n}{n} \quad .2 \quad \hat{\theta}_1 = \frac{x+n}{x} \quad .3 \quad \hat{\theta}_1 = \frac{x}{n} \quad .4$$

۹- با فرض $h(x) = 1 - 0.7x^2$ در صورتی که x_1, \dots, x_n از توزیع $U(0,1)$ باشند. برآورد $\theta = \int_0^1 g(x)dx$ به روش کنترل

تغییرات نمونه گیری برابر است با:

$$\left(\sum_{i=1}^5 (g(x_i) - h(x_i)) = -0.106, g(x) = \exp(-x^2) \right)$$

۱. 0.9 ۲. 0.7448 ۳. 0.106 ۴. 0.566

۱۰- کدام مورد درباره نمونه گیری گیبز درست است؟

۱. نمونه گیری گیبز مبتنی بر خاصیت مارکوفی فرایندهای تصادفی است.

۲. نمونه گیری گیبز مبتنی بر روش های مونت کارلو است.

۳. نمونه گیری گیبز یک حالت خاص از حالت متروپلیس-هستینگز است.

۴. هر سه مورد

۱۱- در روش نمونه گیری گیبز $f(\mu|\tau)$ دارای چه توزیعی است؟

$$f(\mu|\tau) \propto N\left(\frac{\tau \sum y_i}{1+n\tau}, \frac{1}{1+n\tau}\right) \quad .۱$$

$$f(\mu|\tau) \propto N\left(\frac{\tau \sum y_i}{1+n\tau}, \frac{\tau}{1+n\tau}\right) \quad .۳$$

$$f(\mu|\tau) \propto \text{Gam}\left(\frac{\tau \sum y_i}{1+n\tau}, \frac{\tau}{1+n\tau}\right) \quad .۴$$

۱۲- در نمونه گیری برشی پس از همگرایی زنجیر $\{x^{(t)}, y^{(t)}\}$ مقادیر را حذف می کنیم.

$$x^{(t)} \quad .۱ \quad y^{(t)} \quad .۲ \quad x^{(t-1)} \quad .۳ \quad y^{(t-1)} \quad .۴$$

۱۳- اریبی برآوردگر بوت استرپ به کدام صورت است؟

$$\text{Bias}(\hat{\theta}) = \frac{\hat{\theta}^* + \hat{\theta}}{2} \quad .۱$$

$$\text{Bias}(\hat{\theta}) = \frac{\hat{\theta}^* - \hat{\theta}}{2} \quad .۲$$

$$\text{Bias}(\hat{\theta}) = \hat{\theta}^* - \hat{\theta} \quad .۳$$

$$\text{Bias}(\hat{\theta}) = 2\hat{\theta}^* - \frac{2}{3}\hat{\theta} \quad .۴$$

۱۴- احتمال انتخاب شدن عضوی از جامعه ای در یک نمونه بوت استرپ تقریبا برابر است با:

$$0.99 \quad .۱ \quad 0.326 \quad .۲ \quad 0.236 \quad .۳ \quad 0.632 \quad .۴$$

۱۵- در سری های زمانی الگوریتم بوت استرپ برای مدل $AR(2)$ چند مرحله ای است؟

$$6 \quad .۱ \quad 4 \quad .۲ \quad 7 \quad .۳ \quad 9 \quad .۴$$

۱۶- در الگوریتم بوت استرپ ، آماره T^* برابر است با:

$$\frac{\sqrt{\hat{R}^* - \hat{R}}}{\sqrt{\text{Var}(\hat{R}^*)}} \quad .۱ \quad \frac{(\hat{R}^* - \hat{R})\sqrt{n}}{\sqrt{\text{Var}(\hat{R}^*)}} \quad .۲ \quad \frac{(\hat{R}^* + \hat{R})\sqrt{n}}{\sqrt{\text{Var}(\hat{R}^*)}} \quad .۳ \quad \frac{(\hat{R}^* + \sqrt{\hat{R}n})}{\sqrt{n\text{Var}(\hat{R}^*)}} \quad .۴$$

۱۷- بوت استرپ در کدام موارد کاربرد دارد؟

$$۱. \text{ داده های گم شده} \quad ۲. \text{ جامعه متناهی} \quad ۳. \text{ داده های سانسور شده} \quad ۴. \text{ هر سه مورد}$$

۱۸- فرض کنید متغیرهای تصادفی $X \sim GPar(\alpha, \lambda)$ و $Y \sim GPar(\beta, \lambda)$ باشد، آنگاه:

$$\begin{aligned} ۱. \quad P(Y < X) &= \frac{\beta}{\alpha} \\ ۲. \quad P(Y < X) &= \frac{\beta + \alpha}{\alpha} \\ ۳. \quad P(Y < X) &= \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \\ ۴. \quad P(Y < X) &= \frac{\beta}{\alpha + \beta} \end{aligned}$$

۱۹- الگوریتم EM یک فرایند است که $L(\theta)$ را می کند.

۱. استدلالی-حذف ۲. استقرایی-ماکسیمم ۳. بازگشتی-مینیمم ۴. بازگشتی-ماکسیمم

۲۰- در الگوریتم EM ، تعیین امید ریاضی در کدام مرحله است؟

۱. 1 ۲. 2 ۳. 6 ۴. 7

سوالات تشریحی

- ۱- به روش تبدیل معکوس، متغیرهای تصادفی از توزیع نمایی به دست آورید؟ ۱،۷۱ نمره
- ۲- در روش مونت کارلو میانگین نمونه، $S_{\hat{\theta}_2}^2, Var(\hat{\theta}_2)$ را محاسبه نمایید؟ ۰،۸۶ نمره
- ۳- مراحل الگوریتم متروپلیس-هستینگر را شرح دهید. ۰،۸۶ نمره
- ۴- روش انجام نمونه گیری به روش ردی را توضیح دهید. ۱،۷۱ نمره
- ۵- فرض کنید متغیر تصادفی $D \sim Bin(n, \theta)$ به طوری که $\theta \in (0, 1)$ اگر θ دارای توزیع پیشین $Beta(\alpha, \beta)$ باشد. توزیع پسین را محاسبه کنید. ۰،۸۶ نمره

نمبر سوال	ياسخ صحيح
1	ج
2	الف
3	د
4	ج
5	ب
6	ج
7	الف
8	د
9	ب
10	د
11	ب
12	ب
13	ج
14	د
15	الف
16	ب
17	د
18	د
19	د
20	الف

۱- سومین عدد تولید شده به روش $LCG(5,0,90,35)$ چیست؟

۱. 20 ۲. 50 ۳. 55 ۴. 15

۲- اگر $x_{n+1} = (ax_n + c) \bmod m$ و $m = 2^k$ و $a = 4b + 1$ و c فرد باشد. تحت کدام شرط طول دوره 2^k است؟

۱. m و c عامل مشترکی غیر از 1 نداشته باشد.
 ۲. $a-1$ مضربی از هر عدد اول که بر m تقسیم می شود باشد.
 ۳. اگر m مضربی از 4 باشد آنگاه $a-1$ مضربی باید از 4 باشد.
 ۴. هر سه مورد

۳- اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع توزیع $F(.)$ باشد توزیع $F(X)$ چیست؟

۱. یکنواخت ۲. نرمال ۳. پواسن ۴. نمایی

۴- در روش رد-قبول برای تولید داده ها از توزیع $N(\mu, \sigma^2)$ اگر $g(y)$ توزیع کوشی باشد مقدار c کدام است؟

۱. 1 ۲. 2.5 ۳. 0.52 ۴. 1.52

۵- روش باکس-مولر برای تولید اعداد تصادفی از کدام توزیع استفاده می شود؟

۱. یکنواخت ۲. نرمال استاندارد ۳. نرمال ۴. پواسن

۶- اگر X و Y متغیرهای تصادفی مستقل از هم با توزیع بتا باشند آنگاه توزیع $\frac{X}{X+Y}$ چیست؟

۱. پواسن ۲. دوجمله ای ۳. بتا ۴. نرمال

۷- کدام مورد زیر درست است؟

۱. برآورد به روش میانگین نمونه واریانسی بیشتر نسبت واریانس برآورد به روش Hit-or-Miss دارد.
 ۲. برآورد به روش Hit-or-Miss نمونه واریانسی کمتر نسبت واریانس برآورد به روش میانگین نمونه دارد.
 ۳. برآورد به روش Hit-or-Miss واریانسی بیشتر نسبت واریانس برآورد به روش میانگین نمونه دارد.
 ۴. موارد 1 و 3

۸- الگوریتم بوت استرپ صدک دارای چند گام است؟

۱. 5 ۲. 4 ۳. 7 ۴. 8

۹- کدام مورد زیر درست است؟

- ۱. روش کنترل تغییرات نمونه گیری تحت شرطی کاراتر از روش میانگین نمونه است.
- ۲. روش کنترل تغییرات نمونه گیری همواره کاراتر از روش میانگین نمونه است.
- ۳. روش میانگین نمونه تحت شرطی کاراتر از روش کنترل تغییرات نمونه گیری است.
- ۴. کارایی روش میانگین نمونه برابر کارایی روش کنترل تغییرات نمونه گیری است

۱۰- برآورد توزیع تجمعی نرمال استاندارد به کمک کدام توزیع زیر انجام می گیرد؟

- ۱. توزیع یکنواخت
- ۲. توزیع لجستیک
- ۳. توزیع گاما
- ۴. توزیع دو جمله ای

۱۱- کدام مورد درباره نمونه گیری گیبز درست است؟

- ۱. نمونه گیری بر پایه خاصیت مارکفی فرآیندهای تصادفی است.
- ۲. نمونه گیری حالتی خاص از الگوریتم متروپلیس-هستینگز است.
- ۳. نمونه گیری دارای خاصیت مارکفی نیست.
- ۴. موارد ۱ و ۲

۱۲- اگر تابع g در روش ردی ناسازگار لگا کوژ باشد تابع پوشش به چه صورت تعیین می شود؟

- ۱. تابع بتا
- ۲. تابع گاما
- ۳. تابع نمایی قطعه ای
- ۴. هر سه مورد

۱۳- کدام قسمت از نمونه در آزمون گوک انتخاب می شود؟

- ۱. پنجاه درصد اول و پنجاه درصد آخر
- ۲. ده درصد اول و ده درصد آخر
- ۳. پنجاه درصد اول و ده درصد آخر
- ۴. ده درصد اول و پنجاه درصد آخر

۱۴- روش نمونه گیری بوت استرپ چه نوع روش نمونه گیری است؟

- ۱. روش نمونه گیری بدون جایگذاری
- ۲. روش نمونه گیری با جایگذاری
- ۳. روش نمونه گیری طبقه بندی
- ۴. روش نمونه گیری خوشه ای

۱۵- احتمال انتخاب شدن در یک نمونه مخصوص بوت استرپ چیست؟

- ۱. 0.326
- ۲. 0.632
- ۳. 0.54
- ۴. 0.95

۱۶- برای کاهش اریبی برآوردگر بوت استرپ از چه روشی استفاده می شود؟

۱. روش نمونه گیری تصادفی ساده
۲. روش نمونه گیری طبقه بندی
۳. روش جک نایف
۴. هر سه مورد

۱۷- کدام مورد درست است؟

۱. روش بوت استرپ همواره دقیق است.
۲. برای نمونه های بزرگ کارایی آزمون جایگشت با روش بوت استرپ یکسان است.
۳. برای نمونه های بزرگ روش بوت استر بهتر از آزمون جایگشت عمل می کند.
۴. برای نمونه های بزرگ آزمون جایگشت بهتر از روش بوت استرپ عمل می کند.

۱۸- فرض کنید $D \sim Poi(\theta)$ و θ دارای توزیع $Gamma(\alpha, \beta)$ باشد. امید ریاضی توزیع پسین $\theta|D$ چیست؟

۱. $(\alpha+1)(\beta+1)$
۲. $(\alpha+d)(\beta+1)$
۳. $(\alpha+d)/(\beta+1)$
۴. $(\alpha+1)/(\beta+1)$

۱۹- در مدل بیز تجربی برای برآورد ناحیه کوچک B_i چیست؟

۱. $\frac{v_i \eta}{v_i - \eta}$
۲. $\frac{v_i + \eta}{v_i - \eta}$
۳. $\frac{v_i}{v_i - \eta}$
۴. $\frac{v_i}{v_i + \eta}$

۲۰- تابع f را مقعر می نامیم اگر:

۱. $2f$ محدب باشد
۲. f^2 محدب باشد
۳. \sqrt{f} محدب باشد
۴. $-f$ محدب باشد

سوالات تشریحی

۱.۲۰ نمره

۱- روش شبیه سازی معکوس را برای تولید توزیع دوجمله ای شرح دهید.

۱.۲۰ نمره

۲- با توجه به داده های زیر $\theta = \int_0^1 e^{-x^2} dx$ را به روش طبقه بندی به دست آورید.

0.24 0.279 0.244 0.091 0.603

۱.۲۰ نمره

۳- مدل زیر را در نظر بگیرید. اگر $\{y_i\}$ ها به شرط μ و τ مستقل باشند. توزیع شرطی τ به شرط μ را بیابید.

$$y_i \sim N(\eta, \tau^{-1}) \quad i = 1, \dots, n$$

$$\mu \sim N(0, 1), \quad \tau \sim \text{Gamma}(2, 1)$$

۱.۲۰ نمره

۴- فرض کنید $D \sim \text{Bin}(n, \theta)$ که $\theta \in (0, 1)$ و θ دارای توزیع پیشین $\text{Beta}(\alpha, \beta)$ باشد که در آن $\alpha, \beta > 0$ معلومند. توزیع پسین $\theta|D$ را به دست آورید.

۱.۲۰ نمره

۵- مفاهیم زیر را تعریف کنید؟

الف) توزیع پسین و توزیع پیشین θ

ب) خانواده توزیع های مزدوج

۱- دومین عدد تولید شده به روش $LCG(5,0,90,35)$ چیست؟

۱. 85 ۲. 65 ۳. 55 ۴. 97

۲- فرض کنید متغیر تصادفی گسسته ای را که مقدار x_i را با احتمال p_i به ازای $i=0,1,...,k$ می گیرد. بعد از انتخاب عدد تصادفی u تحت چه شرطی $X = x_1$ می شود؟

۱. $u < p_0$ ۲. $u \leq p_0 + p_1$ ۳. $u > p_0 + p_1$ ۴. نامشخص

۳- اگر بخواهیم به روش رد-قبول از توزیع نرمال استاندارد متغیر تصادفی تولید کنیم. کدام تابع زیر $g(y)$ می تواند باشد؟

۱. 1 ۲. $\frac{1}{\pi(1+y^2)}$ ۳. $\frac{1}{(1+y^2)}$ ۴. $\frac{\pi}{y+1}$

۴- روش Box-Muller برای تولید اعداد تصادفی از کدام توزیع است؟

۱. توزیع گاما ۲. توزیع یکنواخت ۳. توزیع پواسن ۴. توزیع نرمال

۵- k امین آماره ترتیبی از n متغیر تصادفی یکنواخت در بازه صفر و یک چه توزیعی دارد؟

۱. توزیع کای دو ۲. توزیع نرمال ۳. توزیع بتا ۴. توزیع گاما

۶- اگر X یک متغیر تصادفی پواسن با پارامتر λ و با $p_i = P(X=i)$ باشد آنگاه داریم:

۱. $p_{i+1} = \frac{\lambda^2}{i+1} p_i$ ۲. $p_{i+1} = \frac{\lambda}{i-1} p_i$ ۳. $p_{i+1} = \frac{\lambda}{i+1} p_{i-1}$ ۴. $p_{i+1} = \frac{\lambda}{i+1} p_i$

۷- کدام مورد زیر درست است؟

۱. نمونه گیری گیبز یک حالت خاص از الگوریتم متروپلیس-هستینگز است.

۲. نمونه گیری گیبز بر پایه شرطی کامل است.

۳. موارد ۱ و ۲ درست است.

۴. نمونه گیری گیبز خود الگوریتم متروپلیس-هستینگز است.

۸- کدام توزیع زیر لگاگوژ هستند؟

۱. نرمال ۲. دوجمله ای ۳. پواسن ۴. فیشر

۹- نمونه گیری برشی بر چه توزیعی استوار است؟

۱. توزیع نرمال ۲. توزیع پواسن ۳. توزیع گاما ۴. توزیع یکنواخت

۱۰- برای کاهش اریبی برآوردگر بوت استرپ از چه روشی استفاده می شود؟

۱. روش نمونه گیری نقاط مهم
۲. روش متروپلیس-هستینگز
۳. جک نایف
۴. هر سه مورد

۱۱- اگر X دارای توزیع یکنواخت در بازه صفر و یک باشد توزیع $\frac{X^{-(1/\alpha)} - 1}{\lambda}$ چه نام دارد؟

۱. نرمال تعمیم یافته
۲. نمایی تعمیم یافته
۳. گاما
۴. پارتوی تعمیم یافته

۱۲- در کدام مورد زیر بوت استرپ به کار برده می شود؟

۱. داده های سانسور شده
۲. داده های گم شده
۳. جامعه متناهی
۴. هر سه مورد

۱۳- تابع $-\log(X)$ روی بازه $[a, b]$ چگونه تابعی است؟

۱. معقر
۲. اکیدا معقر
۳. اکیدا محدب
۴. محدب

۱۴- اگر X_1, \dots, X_Z یک نمونه تصادفی با تابع چگالی $f(x, \theta) = \theta e^{-\theta x}, x > 0$ و Z یک متغیر تصادفی با توزیع زیر باشد. با فرض استقلال X_i ها و Z توزیع $Y = \min(X_1, \dots, X_Z)$ چیست؟

$$P(Z = z) = \frac{(1-p)^z}{-z \log(p)}, 0 < p < 1$$

۱. نمایی
۲. پواسن
۳. نمایی-لگاریتمی
۴. نامشخص

۱۵- اگر D دارای توزیع پواسن با پارامتر θ و θ دارای توزیع $\text{Gamma}(\alpha, \beta)$ باشد آنگاه توزیع پسین θ چیست؟

۱. $\text{Gamma}(\alpha, \beta + 1)$

۲. $\text{Gamma}(\alpha + d, \beta + 1)$

۳. $\text{Gamma}(\alpha, \beta + d + 1)$

۴. وجود ندارد

۱۶- اگر تابع زیان قدر مطلق خطا باشد آنگاه برآورد بیز کدام است؟

۱. میانگین توزیع پسین
۲. میانه توزیع پسین
۳. مد توزیع پسین
۴. وجود ندارد

۱۷- فرض کنید به ازای $i=1, 2, \dots, m$ $Y_i | \theta_i \sim N(\theta_i, \nu_i)$ و $\theta_i | b, \eta \sim N(x'b, \eta)$ که $\theta_i, b > 0$ مستقلند و b یک بردار ستونی نامعلوم با p مولفه باشد. $\theta_i | Y$ چه توزیعی دارد؟

۱. نمایی
۲. گاما
۳. پواسن
۴. نرمال

۱۸- در الگوریتم بوت استرپ احتمال انتخاب شدن در یک نمونه مخصوص عبارت است از:

۱. $1 + \frac{1}{e}$ ۲. $1 - \frac{1}{e}$ ۳. $e - \frac{1}{e}$ ۴. صفر

۱۹- روش معکوس در تولید داده های تصادفی دارای چند گام است؟

۱. 1 ۲. 2 ۳. 3 ۴. 6

۲۰- در روش بدست آوردن توزیع های شرطی کامل یک توزیع گاما با پارامتر شاخص ---- می باشد.

۱. $2 + \frac{n}{2}$ ۲. $\frac{n}{2}$ ۳. $1 + \frac{n}{3}$ ۴. صفر

سوالات تشریحی

- ۱- نحوه برآورد $P(X > 2)$ در توزیع کوشی استاندارد را توضیح دهید. ۱.۲۰ نمره
- ۲- برآورد تابع توزیع تجمعی توزیع نرمال استاندارد را به روشهای میانگین نمونه و نمونه گیری مهم توضیح دهید. ۱.۲۰ نمره
- ۳- فرض کنید y_1, \dots, y_n یک نمونه تصادفی از توزیع $N(\mu, \tau^{-1})$ و $\mu \sim N(0, 1)$ و $\tau \sim \text{Gamma}(2, 1)$ باشند توزیع های $\mu | \tau$ و $\tau | \mu$ را به دست آورید. ۱.۲۰ نمره
- ۴- اگر $D \sim \text{Bin}(n, \theta)$ که $\theta \in (0, 1)$ و θ دارای توزیع پیشین $\text{Beta}(\alpha, \beta)$ باشد که در آن $\alpha, \beta > 0$ معلومند توزیع پسین θ را به دست آورید. ۱.۲۰ نمره
- ۵- فرض کنید D_1, \dots, D_n یک نمونه تصادفی از توزیع $D \sim \text{Bin}(n, \theta)$ که $\theta \in (0, 1)$ باشد. با فرض تابع زیان مربع خطا و توزیع پسین $\text{Beta}(\alpha, \beta)$ برای θ برآوردگر بیز $1 - \theta$ را بیابید. ۱.۲۰ نمره

پاسخ صحیح

شماره
سوال

ب

1

ب

2

ب

3

د

4

ج

5

د

6

ج

7

الف

8

د

9

ج

10

د

11

د

12

ج

13

ج

14

ب

15

ب

16

د

17

ب

18

د

19

الف

20