

عنوان درس: احتمال 2

استفاده از ماشین حساب مهندسی مجاز است

۱- به ازای چه مقداری از k تابع زیر یک تابع چگالی است؟

$$f(x, y) = \begin{cases} ke^{-x-y} & 0 < x < y \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

۱. 6 ۲. $1/2$ ۳. 2 ۴. $1/6$

۲- اگر تابع چگالی توأم (X, Y) به صورت زیر باشد، تابع چگالی حاشیه‌ای X برابر با کدام گزینه است؟

$$f(x, y) = \begin{cases} ke^{-x-y} & 0 < x < y \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

۱. $2e^{-2x}$ ۲. $2e^{-y}$ ۳. $0.5e^{-x}$ ۴. $6e^{-x}$

۳- تابع توزیع توأم (X, Y) به صورت زیر است. مقدار $P(1 < X < 2, -1 < Y < 3)$ برابر با کدام گزینه است؟

$$F(x, y) = \begin{cases} (1 - e^{-x^2})(1 - e^{-y}), & x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

۱. $(1 - e^{-3})(e^{-9} - e^{-4})$ ۲. $(1 - e^{-3})(e^{-1} - e^{-4})$
۳. $(e^{-3} - 1)(e^{-1} - e^{-4})$ ۴. $(e^{-1} - 1)(1 - e^{-3})$

۴- کدام گزینه X, Y از هم مستقل هستند؟

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 & x > 0, y > 0, x + y < 1 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} 2e^{-x-y} & 0 < x < y \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} 12xy(1-y) & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

۵- $\mu_{1,1}$ برابر با کدام گزینه است؟

۱. $\text{cov}(X, Y)$ ۲. $v(X + Y)$ ۳. $E(X + Y)$ ۴. $v(X - Y)$

۶- اگر $E(X|Y) = \frac{2-Y}{3}$ و $E(Y) = \frac{1}{2}$ باشد، $E(X)$ برابر با کدام گزینه است؟

۱. $\frac{2}{3}$ ۲. $\frac{1}{2}$ ۳. 1 ۴. $\frac{1}{3}$

۷- اگر X متغیر تصادفی با توزیع $\Gamma(\alpha, \beta)$ و مستقل از Y متغیر تصادفی با توزیع $\Gamma(b, \beta)$ باشند، آنگاه تابع چگالی $X+Y$ برابر با کدام گزینه است؟

۱. $\beta(a, b)$ ۲. $\beta(a+b, \beta)$ ۳. $\Gamma(a+b, \beta)$ ۴. $\Gamma(ab, \beta)$

۸- اگر $X_1, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل همتوزیع با تابع توزیع مشترک F باشند، آنگاه تابع توزیع متغیر تصادفی $Y_n = \max[X_1, \dots, X_n]$ برابر با کدام گزینه است؟

۱. $[1-F(y)]^n$ ۲. $n f(y) [F(y)]^{n-1}$ ۳. $1-[1-F(y)]^n$ ۴. $[F(y)]^n$

۹- فرض کنید X دارای توزیع بتا باشد. برای به دست آوردن توزیع $Y = -\log X$ مقدار $\left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right|$

برابر با کدام گزینه است؟

۱. $-e^{-y}$ ۲. e^{-y} ۳. $-\frac{1}{x}$ ۴. $\frac{1}{x}$

۱۰- فرض کنید X_1, X_2 متغیرهای تصادفی مستقلی باشند که هر یک دارای توزیع یکنواخت بر بازه $(0, 1)$ است. ژاکوبی

تبدیل برای به دست آوردن توزیع توام متغیرهای تصادفی $Y_1 = X_1 + X_2$ ، $Y_2 = X_2 - X_1$ برابر با کدام گزینه است؟

۱. $\frac{1}{4}$ ۲. $\frac{1}{2}(y_1 + y_2)$ ۳. $\frac{1}{2}$ ۴. $\frac{1}{2}(y_1 - y_2)$

۱۱- اگر $M_X(t) = (1-2t)^{\frac{1}{2}}$ باشد، X دارای چه توزیعی است؟

۱. $N(0, 1)$ ۲. $\chi_{(1)}^2$ ۳. $\Gamma(0, \frac{1}{2})$ ۴. $N(0, 1)$

۱۲- فرض کنید برای $i = 1, 2, \dots, n$ متغیرهای تصادفی X_i ها مستقل و دارای توزیع پواسن $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ باشند. توزیع

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i \text{ برابر با کدام گزینه است؟}$$

۱. $POI(\lambda)$

۲. $bin(n, \lambda)$

۳. $bin(n, \sum_{i=1}^n \lambda_i)$

۴. $POI(\sum_{i=1}^n \lambda_i)$

۱۳- فرض کنید X, Y متغیرهای تصادفی با تابع چگالی توأم $f(x, y)$ باشند. اگر $Z = XY$ باشد، آنگاه

۱. $f_Z(z) = \int_0^{\infty} \frac{1}{|y|} f_{X,Y}\left(\frac{z}{y}, y\right) dy$

۲. $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|y|} f_{X,Y}\left(\frac{z}{y}, y\right) dy$

۳. $f_Z(z) = \int_0^{\infty} |y| f_{X,Y}(zy, y) dy$

۴. $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y| f_{X,Y}(zy, y) dy$

۱۴- اگر واریانس متغیر تصادفی X برابر صفر باشد آنگاه:

۱. $P(X = E(X)) = 0$

۲. $P(X = E(X)) = \mu$

۳. $P(X = E(X)) = 1$

۴. $P(X = E(X)) = \frac{1}{2}$

۱۵- کدام گزینه آماره نیست؟

۱. $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum X_i$

۲. $\min\{X_1, \dots, X_n\}$

۳. $\frac{1}{2} \{\min[X_1, \dots, X_n] + \max[X_1, \dots, X_n]\}$

۴. $\bar{X}_n - \theta$

۱۶- اگر $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از چگالی f باشد، آنگاه $E(S^2)$ برابر است با:

۱. $\frac{\sigma^2}{n}$

۲. σ^2

۳. $n\sigma^2$

۴. μ_2

۱۷- بزرگی نمونه چقدر باید باشد تا ۹۹ درصد مطمئن شویم که $\bar{X}_n$ در فاصله ۰/۵ از میانگین جامعه μ باشد؟

۱. 400

۲. 40

۳. 200

۴. 20

۱۸- گوییم دنباله متغیرهای تصادفی $\{X_n\}$ در احتمال به متغیر تصادفی X همگرا است هرگاه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n - \bar{X})^2 = 0 \quad .1 \quad P\{\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X\} = 1 \quad .2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0 \quad .3 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} M_X(t_n) = M_X(t) \quad .4$$

۱۹- اگر Z دارای توزیع نرمال استاندارد و U دارای توزیع χ^2_k درجه آزادی باشد و Z و U مستقل از هم باشند، آنگاه

$$X = \frac{Z}{\sqrt{\frac{U}{K}}} \quad \text{توزیع} \quad \text{برابر با کدام گزینه است؟}$$

$$\chi^2_k \quad .1 \quad t_k \quad .2 \quad \chi^2_{k-1} \quad .3 \quad t_{k-1} \quad .4$$

۲۰- اگر متغیرهای تصادفی از توزیع نرمال استاندارد آمده باشند، آنگاه توزیع متغیر $\frac{X_1 + \dots + X_n - n(0)}{\sqrt{n(1)}}$ وقتی $n \rightarrow \infty$ میل می‌کند برابر است با:

$$N(\mu, \sigma^2) \quad .1 \quad \text{دوجمله‌ای } \theta, n \quad .2 \quad \text{پواسن } \theta \quad .3 \quad N(0,1) \quad .4$$

۲۱- جامعه‌ای با مهره‌هایی به شماره‌های $x_1, \dots, x_N$ را در نظر بگیرید. اگر n مهره بدون جایگذاری از N مهره استخراج کنیم؛ واریانس میانگین نمونه‌ای عبارت است از:

$$\frac{\sigma^2}{n} \quad .1 \quad n\sigma^2 \quad .2 \quad \frac{\sigma^2}{n} \frac{N-n}{N-1} \quad .3 \quad \frac{\sigma^2}{N} \frac{N-n}{n-1} \quad .4$$

۲۲- اگر X دارای توزیع t استیودنت با k درجه آزادی باشد، آنگاه

$$E(X) = 0, K > 2 \quad .1 \quad E(X) = 0, K > 1 \quad .2 \quad E(X) = \frac{k}{k-2}, K > 2 \quad .3 \quad E(X) = \frac{k}{k-2}, K > 0 \quad .4$$

۲۳- اگر $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد، آنگاه $\sum X_i$ دارای چه توزیعی است؟

$$N(\mu, \sigma^2) \quad .1 \quad N(n\mu, \frac{\sigma^2}{n}) \quad .2 \quad N(n\mu, n\sigma^2) \quad .3 \quad N(\mu, \sigma^2) \quad .4$$

۲۴- کدامیک از موارد زیر صحیح نیست؟

۱. همگرایی با احتمال 1 قوی تر از همگرایی در احتمال است.

۲. همگرایی در میانگین مرتبه ی دوم قوی تر از همگرایی در احتمال است.

۳. همگرایی در احتمال قوی تر از همگرایی در توزیع است.

۴. همگرایی در احتمال قوی تر از همگرایی در میانگین مرتبه دوم است.

۲۵- برای به دست آوردن کران هایی برای احتمال، وقتی میانگین و واریانس متغیر تصادفی معلومند، از کدام گزینه استفاده می کنیم؟

۱. نابرابری چبیشف

۲. نابرابری مارکوف

۳. قضیه حد مرکزی

۴. قانون ضعیف اعداد بزرگ

سوالات تشریحی

۱.۲۰ نمره

۱- اگر X, Y متغیرهای تصادفی پیوسته با تابع چگالی توأم زیر باشد، آنگاه $E(X | Y = y)$ را بیابید.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{4}(2-x-y) & 0 < x < 2, \quad 0 < y < 2, \quad x+y < 2 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

۱.۲۰ نمره

۲- اگر $f(x, y) = 3xI_{(0,x)}(y)I_{(0,1)}(x)$ باشد، آنگاه تابع چگالی $Z = X - Y$ را پیدا کنید.

۱.۲۰ نمره

۳- نشان دهید اگر متغیرهای تصادفی $X_1, \dots, X_n$ مستقل باشند به طوری که X_i دارای توزیع $N(\mu_i, \sigma_i^2)$ باشد

$$\text{آنگاه } U = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2 \text{ دارای توزیع خی دو با } k \text{ درجه آزادی است.}$$

۱.۲۰ نمره

۴- همگرایی در احتمال را تعریف کنید و مثالی بیاورید.

۱.۲۰ نمره

۵- اگر $f_X(x) = 2xe^{-x^2}I_{(0,\infty)}(x)$ باشد، تابع چگالی $Y = X^2$ را بیابید.

شماره سوال	پاسخ صحیح
1	ج
2	الف
3	ب
4	د
5	الف
6	ب
7	ج
8	د
9	ب
10	ج
11	ب
12	د
13	ب
14	ج
15	د
16	ب
17	الف
18	ج
19	ب
20	د
21	ج
22	الف
23	ج
24	د
25	الف

۱- برای تابع چگالی دو متغیره $f(x, y) = k(x+y)I_{(0,1)}(x)I_{(0,1)}(y)$ ($0 < X < \frac{1}{2}, 0 < Y < \frac{1}{4}$) مقدار ثابت k برابر با کدام گزینه است؟

۱. $\frac{k}{64}$ ۲. $\frac{3k}{64}$ ۳. ۱ ۴. $\frac{3}{64}$

۲- تابع توزیع توأم به ازای $0 < x < 1, y \geq 1$ ، برای تابع چگالی توأم $f(x, y) = (x+y)I_{(0,1)}(x)I_{(0,1)}(y)$ برابر با کدام گزینه است؟

۱. $y^2 + y$ ۲. $x^2 + x$ ۳. ۱ ۴. $\frac{1}{2}(x^2 + x)$

۳- عددی به تصادف از بازه $(0,1)$ انتخاب می‌کنیم و آن را با X نشان می‌دهیم. اگر $X = x$ ، سکه‌ای را که احتمال آمدن شیر با آن برابر x است، n بار می‌اندازیم. احتمال اینکه k بار شیر بیاید ($k = 0, 1, \dots, n$) برابر است با:

۱. $\frac{1}{n+1}$ ۲. $\frac{1}{n}$ ۳. $\frac{1}{k}$ ۴. $\frac{1}{k+1}$

۴- اگر Y, X دو متغیر تصادفی مستقل باشند، کدام گزینه نادرست است؟

۱. $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ ۲. $E(XY) = E(X)E(Y)$ ۳. $\text{cov}(X, Y) = 0$ ۴. $\rho(X, Y) = 1$

۵- اگر $E(Y | X = x) = \mu$ باشد که به x بستگی نداشته باشد، آنگاه $\text{Var}(Y)$ با کدام گزینه معادل است؟

۱. صفر ۲. μ ۳. $E[\text{Var}(Y)]$ ۴. اطلاعات کافی نیست.

۶- اگر $(X, Y) \sim N(1, 2, 4, 9; \frac{1}{2})$ باشد، آنگاه میانگین چگالی شرطی Y به شرط $X = x$ برابر با کدام گزینه است؟

۱. $\frac{1}{2}(5-x)$ ۲. $\frac{1}{2}(5+2y)$ ۳. $\frac{1}{2}(3+x)$ ۴. $\frac{1}{9}(13-2y)$

۷- اگر متغیر تصادفی X عدد مشاهده شده از پرتاب یک تاس باشد، برای متغیر تصادفی $Y = (X-2)^2$ ، مقدار $p(Y=9)$ برابر با کدام گزینه است؟

۱. $\frac{1}{6}$ ۲. $\frac{2}{6}$ ۳. ۰ ۴. ۱

۸- اگر X دارای توزیع بتا با $a > 0, b = 1$ باشد، توزیع $Y = -\log X$ چیست؟

۱. بتا $1, a$ ۲. نمایی با پارامتر a ۳. نمایی با پارامتر ۱ ۴. نمایی با پارامتر $\frac{1}{a}$

۹- فرض کنید X_1, X_2 متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع نرمال استاندارد باشند و $\begin{cases} Y_1 = X_1 + X_2 \\ Y_2 = \frac{X_1}{X_2} \end{cases}$ در این صورت ژاکوبی

تبدیل برابر است با:

$$\begin{array}{llll} ۱. & \frac{y_1}{(1+y_1)^2} & ۲. & -\frac{y_1}{(1+y_2)^2} \\ ۳. & -\frac{y_2}{(1+y_1)^2} & ۴. & \frac{y_2}{(1+y_2)^2} \end{array}$$

۱۰- فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی پیوسته مستقل و هم توزیع با تابع توزیع مشترک F باشد. توزیع $Y_1 = \min[X_1, \dots, X_n]$ برابر است با:

$$۱. \quad f_{Y_1}(y) = nf(y)(1-F(y))^{n-1} \quad ۲. \quad f_{Y_1}(y) = n(f(y))^{n-1}f(y)$$

$$۳. \quad f_{Y_1}(y) = nf(y)(1-F(y))^n \quad ۴. \quad f_{Y_1}(y) = nF(y)^{n-1}f(y)$$

۱۱- اگر X دارای توزیع پاره تو با تابع چگالی $f_X(x) = \theta x^{-\theta-1}$ $x > 1$ باشد. برای تبدیل $Y = \log(X)$ مقدار $\frac{d}{dy}g^{-1}(y)$ برابر است با:

$$\begin{array}{llll} ۱. & \frac{1}{x} & ۲. & \frac{1}{y} \\ ۳. & e^{-y} & ۴. & e^y \end{array}$$

۱۲- اگر $M_Y(t) = e^{\frac{1}{6}t^2}$ باشد، توزیع Y برابر است با:

$$\begin{array}{llll} ۱. & \text{نمایی } \frac{1}{2} & ۲. & n(0, \frac{1}{2}) \\ ۳. & n(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}) & ۴. & n(0, \frac{1}{3}) \end{array}$$

۱۳- اگر $X_1, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع پواسن باشند. توزیع X_1 به شرط معلوم بودن $X_1 + \dots + X_n$ برابر است با:

$$\begin{array}{llll} ۱. & \text{پواسن} & ۲. & \text{دوجمله‌ای} \\ ۳. & \text{هندسی} & ۴. & \text{دوجمله‌ای منفی} \end{array}$$

۱۴- فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع توزیع F_X و تابع چگالی f_X باشد. آنگاه توزیع $U = F_X(X)$ برابر است با:

$$\begin{array}{llll} ۱. & \text{یکنواخت } 0 \text{ و } 1 & ۲. & \text{نمایی } \frac{1}{2} \\ ۳. & \text{نرمال } 0 \text{ و } 1 & ۴. & \text{دوجمله‌ای } \frac{1}{2} \end{array}$$

۱۵- اگر تابع چگالی توأم (X, Y) به صورت زیر باشد. تابع چگالی حاشیه‌ای Y برابر است با:

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 & x > 0, y > 0, x + y < 1 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

$$\begin{array}{llll} ۱. & 2(1-x), 0 < x < 1 & ۲. & 2y, y > 0 \\ ۳. & 2(1-y), 0 < x < 1 & ۴. & 2x, y > 0 \end{array}$$

۱۶- نماد $\mu_{2,0}$ برابر است با:

۱. $E(X^2)$ ۲. $E(Y^2)$ ۳. $\text{var}(Y)$ ۴. $\text{var}(X)$

۱۷- اگر $E(X|Y) = \frac{2-Y}{3}$ و Y دارای توزیع زیر باشد. آنگاه مقدار $E(X)$ برابر با کدام گزینه است؟

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{8}(y-2)^2 & 0 < y < 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

۱. $\frac{1}{2}$ ۲. $\frac{1}{4}$ ۳. $\frac{3}{8}$ ۴. $\frac{1}{5}$

۱۸- اگر X ، Y متغیرهای تصادفی مستقل پیوسته نامنفی باشند. آنگاه تابع چگالی $Z = X + Y$ برابر است با:

۱. $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy$ ۲. $\int_0^z f_X(x)f_Y(z-x)dx \quad z > 0$

۳. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t, z-t)dt$ ۴. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}f\left(\frac{z+v}{2}, \frac{z-v}{2}\right)dv$

۱۹- مشتق جزئی مرتبه دوم تابع مولد گشتاورهای دومتغیره $\phi(t_1, t_2)$ نسبت به t_1 و t_2 به ازای $t_1 = t_2 = 0$ برابر است با:

۱. $E(X)$ ۲. $E(Y)$ ۳. $E(XY)$ ۴. صفر

۲۰- اگر واریانس متغیر تصادفی X برابر صفر باشد آنگاه:

۱. $P(X = E(X)) = 0$ ۲. $P(X = E(X)) = \mu$ ۳. $P(X = E(X)) = 1$ ۴. $P(X = E(X)) = \frac{1}{2}$

۲۱- اگر برای $n \rightarrow \infty$ داشته باشیم $M_{Z_n}(t) \rightarrow e^{\frac{t^2}{2}}$ ، یعنی توزیع حدی Z_n برابر با کدام گزینه است؟

۱. $N(0,1)$ ۲. $N(y, \sigma^2)$ ۳. گاما (α, n) ۴. نمایی ۱

۲۲- اگر متغیرهای تصادفی از توزیع نرمال استاندارد آمده باشند، آنگاه توزیع متغیر $\frac{X_1 + \dots + X_n - n(0)}{\sqrt{n(1)}}$ وقتی $n \rightarrow \infty$ میل

می‌کند برابر است با:

۱. $N(\mu, \sigma^2)$ ۲. دوجمله‌ای θ, n ۳. پواسن θ ۴. $N(0,1)$

۲۳- اگر a_1 و a_2 و... اعداد حقیقی باشند و $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{i} < \infty$ آنگاه:

۱. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{n}{a} = 0$.۱
 ۲. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{n} = 1$.۲
 ۳. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{n} = 0$.۳
 ۴. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{n}{a} = 1$.۴

۲۴- مقدار $P(a \leq X < b, Y < c)$ برابر با کدام گزینه است؟

۱. $F(b, c) - F(b, a)$.۱
 ۲. $F(b, c) - F(a, c)$.۲
 ۳. $F(a, c) - F(b, c)$.۳
 ۴. $F(b, c) - F(c)$.۴

۲۵- مقدار k چقدر باشد که تابع چگالی دو متغیره $f(x, y) = k(x + y)I_{(0,1)}(x)I_{(0,1)}(y)$ یک تابع چگالی بشود؟

۱. ۱
 ۲. $\frac{1}{4}$
 ۳. $\frac{3}{4}$
 ۴. $\frac{4}{3}$

سوالات تشریحی

۱.۲۰ نمره

۱- تابع چگالی توأم (X, Y) به صورت زیر است. استقلال X, Y را بررسی کنید.

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 & 0 < x \leq y < 1 \\ 0 & \text{ow.} \end{cases}$$

۱.۲۰ نمره

۲- تابع چگالی توأم (X, Y) به صورت زیر است. تابع چگالی شرطی $f(y|x)$ را بیابید.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{3}(x + y) & 0 < x < 2, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{ow.} \end{cases}$$

۱.۲۰ نمره

۳- جامعه‌ای با میانگین ۳۰ و انحراف معیار ۵ را در نظر بگیرید. حداقل چه درصدی از مشاهدات در فاصله ۱۵ تا ۴۵ قرار می‌گیرند؟

۱.۲۰ نمره

۴- تابع چگالی X به صورت $f(x) = 2(1-x), 0 < x < 1$ است. توزیع $Y = 4 + 2X$ را به دست آورید.

۱.۲۰ نمره

۵- متغیرهای تصادفی مستقل $X_1, \dots, X_n$ دارای توزیع برنولی هستند. توزیع $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ را به دست آورید.

شماره سوال	پاسخ صحیح
1	د
2	د
3	الف
4	د
5	ج
6	ج
7	الف
8	د
9	ب
10	الف
11	د
12	د
13	ب
14	الف
15	ج
16	د
17	الف
18	ب
19	ج
20	ج
21	الف
22	د
23	ج
24	ب
25	الف

۱- مقدار واریانس متغیر تصادفی دارای توزیع t با k درجه آزادی، برابر با کدام گزینه است؟

۱. k ۲. $\frac{k}{(k-2)}$ ۳. ۱ ۴. $2k$

۲- اگر $Y_1 = \min(X_1, \dots, X_n)$ اولین آماره‌ی ترتیبی باشد، آنگاه کدام گزینه تابع توزیع آن $F_{Y_1}(y)$ است؟

۱. $1 - [F(y)]^n$ ۲. $[F(y)]^n$ ۳. $1 - [1 - F(y)]^n$ ۴. $1 - [1 + F(y)]^n$

۳- اگر $\phi(t_1, t_2)$ تابع مولد گشتاورها دو متغیر تصادفی X, Y باشد آنگاه مشتق جزئی $\phi(t_1, t_2)$ نسبت به t_1 و با قرار دادن $t_1 = t_2 = 0$ برابر با کدام گزینه است؟

۱. $E(X)$ ۲. $E(X^2)$ ۳. ۱ ۴. $V(X)$

۴- اگر $X_1, \dots, X_n$ نمونه تصادفی از توزیع $N(\mu, \sigma^2)$ باشند، کدام گزینه دارای توزیع χ_n^2 (خی دو با n درجه آزادی) است؟

۱. $\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ ۲. $\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$ ۳. $\frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2}$ ۴. $\frac{\sum (X_i - \mu)^2}{\sigma^2}$

۵- از جامعه نرمال با واریانس ۲۵ است، حجم نمونه چقدر باشد، تا ۹۹٪ اطمینان یابیم $\bar{X}_n$ در فاصله ± 0.5 از میانگین جامعه (μ) قرار دارد؟

۱. ۸۰ ۲. ۲۰۰ ۳. ۴۰۰ ۴. ۵۰۰

۶- مقدار $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ برابر است با؟

۱. $2\sqrt{\pi}$ ۲. ۱ ۳. $\sqrt{\pi}$ ۴. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

۷- اگر X_1, X_2 دو متغیر تصادفی مستقل از توزیع نرمال استاندارد باشند، آنگاه $\frac{(X_1 - X_2)}{\sqrt{2}}$ دارای چه توزیعی است؟

۱. خی دو (کای اسکور) ۲. فیشر (F) ۳. تی استیودنت (t) ۴. نرمال استاندارد

۸- فرض کنید $Y_1 \leq \dots \leq Y_4$ آماره‌های ترتیبی حاصل از نمونه تصادفی چهارتایی از توزیع $f(x) = 2x, 0 < x < 1$ باشد، آنگاه $f_{Y_3}(y)$ برابر با کدام گزینه است؟

۱. $24y(1-y^5)$ ۲. $24(1-y^2)$ ۳. $24y^5$ ۴. $24y^5(1-y^2)$

۹- متغیر تصادفی X یک توزیع حدی تباهیده است اگر با احتمال تنها اختیار کند.

۱. صفر - یک مقدار ۲. یک - یک مقدار ۳. یک - مقدار صفر ۴. صفر - مقدار یک

۱۰- واریانس میانگین نمونه‌ای از جامعه‌ای با واریانس متناهی برابر با کدام گزینه است؟

۱. σ^2 ۲. $\frac{\sigma}{n}$ ۳. $\frac{\sigma^2}{n}$ ۴. $\sqrt{n}\sigma$

۱۱- اگر $f(x) = \theta x^{-\theta-1} I_{[1,\infty)}(x)$ باشد، تابع چگالی احتمال $Y = \log X$ کدام گزینه است؟

۱. θ ۲. $\theta e^{-\theta x}$ ۳. θe^{-x} ۴. $e^{-\theta x}$

۱۲- اگر X_1, X_2 متغیرهای مستقل و هم‌توزیع نرمال استاندارد باشند، آنگاه کدام گزینه دارای توزیع خی دو با یک درجه آزادی $\chi^2_{(1)}$ است؟

۱. $\frac{(X_1 - X_2)^2}{2}$ ۲. $(X_1 - X_2)^2$ ۳. $X_1^2 + X_2^2$ ۴. $\frac{X_1^2 + X_2^2}{2}$

۱۳- اگر $X_1, \dots, X_n$ متغیرهای مستقل و هم‌توزیع نمایی باشند، آنگاه $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ دارای چه توزیعی است؟

۱. خی دو ۲. نرمال استاندارد ۳. نمایی ۴. گاما

۱۴- برای دو متغیر تصادفی مستقل نرمال استاندارد X_1, X_2 ، توزیع $Y = X_1 + X_2$ برابر با کدام گزینه است؟

۱. t با میانگین ۱ ۲. F با میانگین صفر ۳. خی دو با میانگین صفر ۴. نرمال با میانگین صفر

۱۵- اگر X دارای توزیع نرمال استاندارد باشد، آنگاه تابع مولد گشتاورهای $Y = X^2$ کدام گزینه است؟

۱. $(1-2t)^{\frac{1}{2}}$ ۲. $(1+2t)^{\frac{1}{2}}$ ۳. $(1+2t)^{-\frac{1}{2}}$ ۴. $(1-2t)^{-\frac{1}{2}}$

-۱۶

اگر X_1, X_2 متغیرهای تصادفی مستقل هم توزیع از توزیع یکنواخت در بازه $(0,1)$ باشد، ژاکوبی تبدیل

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_2 - x_1 \end{cases}$$

برابر با کدام گزینه است؟

$$\begin{array}{llll} ۱. \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & ۲. \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} & ۳. \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} & ۴. \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{array}$$

۱۷- جمله "متوسط دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل هم توزیع، با احتمال یک به میانگین توزیع مشترک می‌گراید" کدام گزینه را بیان می‌نماید؟

۱. قانون ضعیف اعداد بزرگ
۲. قانون قوی اعداد بزرگ
۳. قضیه حد مرکزی
۴. همگرایی در احتمال

۱۸- در پرتاب ۱۲ تاس همگن، اگر شماره تاس i ام را X_i در نظر بگیریم $E(X_i)$ برابر است با؟

$$\begin{array}{llll} ۱. \frac{35}{12} & ۲. \frac{1}{2} & ۳. \frac{7}{2} & ۴. \frac{91}{6} \end{array}$$

۱۹- اگر $P(X = E(X)) = 1$ آنگاه با احتمال یک ، است.

۱. واریانس متغیر ۱
۲. متغیر دارای توزیع نرمال
۳. امید ریاضی متغیر صفر
۴. متغیر مقداری ثابت

۲۰- برای یک متغیر تصادفی مثبت، و به ازای مقدار $a > 0$ ، کدام رابطه صحیح است؟

$$\begin{array}{ll} ۱. P(X \leq a) \leq \frac{E(X)}{a} & ۲. P(X \leq a) \geq \frac{E(X)}{a} \\ ۳. P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a} & ۴. P(X \geq a) \geq \frac{E(X)}{a} \end{array}$$

۲۱- $E(E(X|Y))$ برابر است با؟

$$\begin{array}{llll} ۱. E(Y) & ۲. Y & ۳. E(X) & ۴. X \end{array}$$

۲۲- اگر $F(x, y) = (1 - e^{-x^2})(1 - e^{-y})$ ، آنگاه $f(x)$ برابر است با؟

$$\begin{array}{llll} ۱. 2xe^{-x^2} & ۲. xe^{-x^2} & ۳. 2xe^{-x} & ۴. xe^{-x} \end{array}$$

۲۳- به ازای چه مقدار a تابع $f(x, y) = \begin{cases} ax^{2y} & 0 < x + y < 1, 0 < x, y < 1 \\ 0 & o.w \end{cases}$ یک تابع چگالی احتمال خواهد بود؟

۱. ۶
۲. ۳
۳. $\frac{1}{6}$
۴. $\frac{1}{3}$

۲۴- اگر $f(x, y) = \begin{cases} 12xy(1-y) & 0 < x + y < 1, 0 < x, y < 1 \\ 0 & o.w \end{cases}$ باشد. آنگاه $f(x|y)$ کدام گزینه است؟

۱. $(1-y)$ ۲. $2x$ ۳. $(1-x)$ ۴. $2y$

۲۵- اگر $f(x, y) = \begin{cases} 2 & x, y > 0, 0 < x + y < 1 \\ 0 & o.w \end{cases}$ آنگاه تابع چگالی حاشیه‌ای $f(x)$ کدام گزینه است؟

۱. $2(x+1)$ ۲. $2(y+1)$ ۳. $2(1-x)$ ۴. $2(1-y)$

سوالات تشریحی

۱.۲۰ نمره

۱- ثابت کنید براساس یک نمونه‌ی تصادفی از توزیع نرمال، $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ دارای توزیع خی دو با $n-1$ درجه‌ی آزادی، $\chi^2_{(n-1)}$ است.

۱.۲۰ نمره

۲- تابع چگالی توأم دو متغیر تصادفی را به صورت $f(x, y) = \begin{cases} 2x & x + y < 1; x, y > 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$ در نظر بگیرید. مقدار $P\left(0 < X + Y < \frac{1}{2}\right)$ را به دست آورید.

۱.۲۰ نمره

۳- قضیه حد مرکزی را بیان نمایید (اثبات لازم نیست).

۱.۲۰ نمره

۴- اگر چگالی توأم دو متغیر تصادفی به صورت $f(x, y) = 12xy, 0 < x, y < 1$ باشد آنگاه مقدار $E(X|Y=y)$ را بیابید.

۱.۲۰ نمره

۵- فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ متغیرهای مستقل و هم توزیع با توزیع نرمال استاندارد باشند. با استفاده از روش تابع

مولد گشتاورها توزیع $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ را بیابید.

2	مع
3	الف
4	د
5	مع
6	مع
7	د
8	د
9	ب
10	مع
11	ب
12	الف
13	د
14	د
15	د
16	ب
17	ب
18	مع
19	د
20	مع
21	مع
22	الف
23	الف
24	ب
25	مع

۱- اگر X متغیر تصادفی با توزیع نرمال استاندارد باشد، توزیع X^2 کدام گزینه است؟

۱. $\Gamma(\frac{1}{2}, 2)$ ۲. $\Gamma(1, 2)$ ۳. $\Gamma(1, \frac{1}{2})$ ۴. $\Gamma(1, 1)$

۲- برای نمونه‌ای تصادفی به اندازه‌ی $n = 4$ از توزیع یکنواخت روی بازه‌ی $(0, 1)$ ، توزیع توأم چهار آماره‌ی ترتیبی برابر با کدام گزینه است؟

۱. 24 ۲. 1 ۳. $\frac{1}{4!}$ ۴. $\frac{1}{3!}$

۳- اگر $X \sim unif(0, 1)$ باشد، آنگاه توزیع $Y = X^2$ کدام گزینه است؟

۱. $f(y) = \frac{3}{2\sqrt{y}} I_{(0,1)}(y)$ ۲. $f(y) = \frac{3}{5\sqrt{y}} I_{(0,1)}(y)$
۳. $f(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} I_{(0,1)}(y)$ ۴. $f(y) = \frac{1}{\sqrt{y}} I_{(0,1)}(y)$

۴- فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع توزیع تجمعی F_X باشد، اگر $U = F_X(X)$ آنگاه توزیع U کدام گزینه است؟

۱. یکنواخت ۲. نرمال ۳. نمایی ۴. گاما

۵- اگر $X_1, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل برنولی باشند، آنگاه توزیع $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ کدام گزینه است؟

۱. دوجمله‌ای ۲. نرمال ۳. نرمال استاندارد ۴. گاما

۶- بزرگی نمونه چقدر باشد تا با اطمینان 99 درصد مطمئن شویم که $\bar{X}_n$ در فاصله 0.5σ از μ است؟

۱. 300 ۲. 350 ۳. 400 ۴. 250

۷- اگر X دارای توزیع فشر با 5 و 4 درجه آزادی باشد، آنگاه $E(X)$ کدام گزینه است؟

۱. 4 ۲. 3 ۳. 1 ۴. 2

۸- فرض کنید $X \sim F(m, n)$ باشد، آنگاه $\frac{1}{X}$ چه توزیعی دارد؟

۱. نرمال استاندارد ۲. خی دو ۳. $F(n, m)$ ۴. $F(m, n)$

۹- اگر X متغیر تصادفی با توزیع t -استیودنت با 4 درجه آزادی باشد، آنگاه $E(X)$ کدام است؟

۱. 4 ۲. 2 ۳. 0/5 ۴. صفر

۱۰- اگر X دارای توزیع t باشد، توزیع X^2 کدام گزینه است؟

۱. F ۲. χ^2 ۳. t ۴. Z

۱۱- در تابع چگالی $f(x, y) = ax^2y$, $0 < x, y < 1$ مقدار a برابر با کدام گزینه است؟

۱. 1 ۲. 6 ۳. 2 ۴. 3

۱۲- اگر $f(x, y) = 2$, $x, y > 0, x + y < 1$ باشد، توزیع حاشیه‌ای X کدام گزینه است؟

۱. $2(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x)$ ۲. $\frac{1}{2}(2 - x)$ ۳. $2(1 - x)$ ۴. $2(2 - \frac{1}{2}x)$

۱۳- در حالت کلی، گزینه صحیح کدام است؟

۱. $E[E(X|Y)] = E(X)$ ۲. $E[E(X|Y)] = E(Y)$
۳. $E[E(X|Y)] = E(XY)$ ۴. $E[E(X|Y)] = E(X/Y)$

۱۴- برای هر مقدار $a > 0$ ، نابرابری مارکوف کدام گزینه است؟

۱. $P(X < a) \leq \frac{E(aX)}{a}$ ۲. $P(X \geq a) \leq 1 - \frac{E(X)}{a}$
۳. $P(X < a) \leq \frac{E(X)}{a}$ ۴. $P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$

۱۵- اگر واریانس متغیر تصادفی X برابر صفر باشد، آنگاه $P(X = E(X))$ برابر با کدام گزینه است؟

۱. 1 ۲. 0/1 ۳. 0/5 ۴. صفر

۱۶- تعداد لامپ‌های معیوب یک فرایند تولید در طول هفته متغیری تصادفی با میانگین 150 است. حدود احتمال اینکه تولید لامپ‌های معیوب در هفته، از 200 تجاوز کند چقدر است؟

۱. حداقل 0/3 ۲. حداکثر 0/75 ۳. حداقل 0/6 ۴. حداکثر 0/5

۱۷- فرض کنید X دارای توزیع پواسون باشد و $P(X = 0) = 0/5$ ، آنگاه $E(X)$ کدام گزینه است؟

۱. 1 ۲. $\ln(2)$ ۳. 0/5 ۴. $\ln\left(\frac{1}{2}\right)$

۱۸- تابع توزیع $F(x, y) = (1 - e^{-x^2})(1 - e^{-y})$, $x, y > 0$ را در نظر بگیرید. $f(x, y)$ کدام گزینه است؟

۱. xe^{x^2-y} ۲. $2xe^{-x^2-y}$ ۳. xe^{-x^2+y} ۴. $\frac{1}{2}xe^{x^2+y}$

۱۹- تابع توزیع $F(x, y) = (1 - e^{-x^2})(1 - e^{-y})$, $x, y > 0$ را در نظر بگیرید. کدام گزینه $f(x)$ است؟

۱. xe^{-x^2} ۲. xe^{x^2} ۳. $\frac{1}{2}xe^{-x^2}$ ۴. $2xe^{-x^2}$

۲۰- فرض کنید $f(x, y) = e^{-(x+y)}$, $x, y > 0$ باشد. تابع چگالی $Z = X + Y$ کدام گزینه است؟

۱. $\Gamma(1,1)$ ۲. $\Gamma(1,2)$ ۳. $\Gamma(2,2)$ ۴. $\Gamma(2,1)$

۲۱- تابع چگالی $f(x, y) = 2$, $0 < x \leq y \leq 1$ را در نظر بگیرید. کدام گزینه $E(X|Y)$ است؟

۱. y ۲. $\frac{y}{2}$ ۳. $\frac{2}{y}$ ۴. $2y$

۲۲- اگر X دارای توزیع پارتو باشد، توزیع $Y = \log X$ کدام گزینه است؟

۱. نمایی ۲. یکنواخت ۳. پواسون ۴. نرمال

۲۳- اگر $M_X(t) = (1 - 2t)^{-1/2}$ باشد، توزیع کدام گزینه است؟

۱. χ^2 با دو درجه آزادی ۲. χ^2 با یک درجه آزادی ۳. نرمال ۴. نرمال استاندارد

۲۴- توزیع مجموع n متغیر تصادفی مستقل هم توزیع نمایی کدام گزینه است؟

۱. گاما ۲. نرمال استاندارد ۳. بتا ۴. نرمال

۲۵- وقتی توزیع جامعه نرمال است، توزیع $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ کدام گزینه است؟

۱. t_n ۲. χ_n^2 ۳. χ_{n-1}^2 ۴. t_{n-1}

سوالات تشریحی

- ۱- فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با تابع توزیع مشترک F باشند. اگر $Y_1 = \min[X_1, \dots, X_n]$ آنگاه توزیع Y_1 را بیابید. ۱.۲۰ نمره
- ۲- تعریف همگرایی با احتمال یک و همگرایی در میانگین مرتبه دوم را بیان نمایید. ۱.۲۰ نمره
- ۳- دایره ای به مرکز $(0,0)$ و به شعاع یک را در نظر بگیرید. نشان دهید $f(x, y) = \frac{1}{\pi}$ برای نقاط داخل دایره با مختصات (X, Y) ، یک تابع چگالی پیوسته است. ۱.۲۰ نمره
- ۴- تابع چگالی توأم (X, Y) به صورت $f(x, y) = 12xy(1 - y)$, $0 < x < 1, 0 < y < 1$ را در نظر بگیرید. نشان دهید که متغیرها مستقل هستند. ۱.۲۰ نمره
- ۵- قانون ضعیف اعداد بزرگ را بیان نمایید. ۱.۲۰ نمره

نمبر رد سوال	ياسخ صحيح
1	الف
2	الف
3	ج
4	الف
5	الف
6	ج
7	د
8	ج
9	د
10	الف
11	ب
12	ج
13	الف
14	د
15	الف
16	ب
17	ب
18	ب
19	د
20	د
21	ب
22	الف
23	ب
24	الف
25	ج

۱- اگر $0 < x + y < 1$ و $f(x, y) = x + y$ آنگاه $p\left(\frac{1}{2} < x < 1, 0 < y < \frac{1}{2}\right)$ کدام است؟

۱. $\frac{1}{2}$ ۲. $\frac{1}{8}$ ۳. $\frac{1}{4}$ ۴. $\frac{1}{6}$

۲- اگر $F(x, y) = e^{x^2 + y^2}$ آنگاه $f(x, y)$ را بیابید؟

۱. $2xye^{x^2 + y^2}$ ۲. $4xye^{x + y}$ ۳. $4xye^{x^2 + y^2}$ ۴. $2xye^{x + y}$

۳- اگر $y_n = \max[x_1, \dots, x_n]$ آنگاه $F_{y_n}(y)$ کدام است؟

۱. $[1 - F_x(y)]^n$ ۲. $[F_x(y)]^n$ ۳. $[F_x(y) - 1]^n$ ۴. $[f_x(y)]^n$

۴- اگر متغیر تصادفی، واریانسی برابر صفر داشته باشد، گزینه صحیح کدام است؟

۱. با احتمال یک متغیر تصادفی مقدار ثابت صفر است.
۲. با احتمال صفر متغیر تصادفی مقدار ثابت صفر است.
۳. با احتمال یک متغیر تصادفی مقدار ثابت است.
۴. با احتمال صفر متغیر تصادفی مقدار ثابت است.

۵- در پرتاب ۱۲ سکه همگن، اگر x_i شماره تاس i ام باشد $E(x_i)$ کدام است؟

۱. $\frac{35}{12}$ ۲. $\frac{7}{2}$ ۳. $\frac{91}{6}$ ۴. $\frac{1}{6}$

۶- جمله "متوسط دنباله ای از متغیرهای تصادفی مستقل هم توزیع، با احتمال ۱ به میانگین توزیع مشترک می گراید" بیانگر کدام نظریه احتمال است؟

۱. قضیه حد مرکزی ۲. قانون ضعیف اعداد بزرگ
۳. قانون قوی اعداد بزرگ ۴. مارکوف

۷- اگر x_1, x_2 دو متغیر تصادفی نرمال استاندارد باشند، کدام گزینه، x_1 و x_2 با یک درجه آزادی است؟

۱. $x_1^2 + x_2^2$ ۲. $\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}$ ۳. $\frac{(x_1 - x_2)^2}{2}$ ۴. $(x_1 - x_2)^2$

۸- برای n متغیر تصادفی مستقل از توزیع برنولی، $m_{\sum x_i}(t)$ کدام است؟

۱. $(p + qe^t)$ ۲. $(q + pe^t)$ ۳. $(q + pe^t)^n$ ۴. $(p + qe^t)^n$

۹- برای n متغیر تصادفی مستقل هم توزیع $V(\bar{x})$ را به دست آورید؟

۱. σ^2 ۲. $n\sigma^2$ ۳. $\frac{\sigma^2}{n}$ ۴. $\sqrt{n}\sigma^2$

۱۰- $\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$ دارای کدام توزیع است؟

۱. χ^2 با n درجه آزادی ۲. χ^2 با $n-1$ درجه آزادی
۳. گاما ۴. نرمال استاندارد

۱۱- برای دو متغیر مستقل توزیع نرمال استاندارد، نسبت $\frac{x_1^2}{x_2^2}$ دارای کدام توزیع است؟

۱. $t(1)$ ۲. $F(1,1)$ ۳. بتا ۴. $\chi^2_{(1)}$

۱۲- تابع توزیع احتمال X بردار n بعدی X تابعی است که

۱. دامنه آن فضای اقلیدسی n بعدی و برد آن بازه $[0,1]$ است.
۲. دامنه آن فضای اقلیدسی n بعدی و برد آن بازه $[0, \infty)$ است.
۳. دامنه آن بازه $[0, \infty)$ و برد آن فضای اقلیدسی n بعدی است.
۴. دامنه آن بازه $[0,1]$ و برد آن فضای اقلیدسی n بعدی است.

۱۳- فرض کنید $0 < x, y < 1$ $f(x, y) = x + y$ آنگاه تابع چگالی حاشیه‌ای $f(x)$ برابر کدام گزینه است؟

۱. $x+1$ ۲. $1+y$ ۳. $\frac{1}{2}+x$ ۴. $\frac{1}{2}+y$

۱۴- اگر $F(x, y) = (1 - e^{-x^2})(1 - e^{-y})$ آنگاه $f(x, y)$ برابر با کدام گزینه است؟

۱. $2xe^{-x^2-y}$ ۲. xe^{-x^2-y} ۳. xe^{-x^2+y} ۴. $2xe^{-x^2+y}$

۱۵- عددی به تصادف از بازه $(0,1)$ انتخاب می‌کنیم و آن را با X نشان می‌دهیم. اگر $X = x$ ، سکه‌ای را که احتمال آمدن شیر با آن برابر x است، n بار می‌اندازیم. احتمال اینکه k بار شیر مشاهده شود برابر کدام گزینه است؟

۱. $\frac{1}{n}$ ۲. $\frac{1}{k}$ ۳. $\frac{1}{n+1}$ ۴. $\frac{1}{k+1}$

۱۶- اگر X و Y دو متغیر تصادفی دارای توزیع پواسن باشند، آنگاه مقدار $E(E(X|Y))$ برابر با کدام گزینه است؟

۱. 1 ۲. λ ۳. λ^2 ۴. λy

۱۷- اگر X دارای توزیع بتا باشد، آنگاه توزیع $Y = -\log X$ کدام گزینه است؟

۱. نرمال ۲. نمایی ۳. بتا ۴. گاما

۱۸- در تبدیل
$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = \frac{x_1}{x_2} \end{cases}$$
 ژاکوبی تبدیل برابر با کدام گزینه است؟

۱. $\frac{1}{(1+y_2)^2}$ ۲. $\frac{y_1}{(1+y_2)^2}$ ۳. $\frac{-y_1}{(1+y_2)^2}$ ۴. 1

۱۹- طول عمر لامپ‌ها دارای توزیع نمایی با میانگین 5 ساعت در روز می‌باشد، در صورتی که لامپی بسوزد بلافاصله تعویض می‌گردد. احتمال آنکه در طول 200 روز بیش از 40 لامپ لازم نباشد برابر با کدام گزینه است؟

۱. $\frac{1}{2}$ ۲. $\frac{2}{3}$ ۳. 1 ۴. صفر

۲۰- اگر $X_1, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل از توزیع پواسن با پارامتر λ باشند، آنگاه توزیع $\sum_i X_i$ برابر با کدام گزینه است؟

۱. پواسن با پارامتر $n\lambda^2$ ۲. پواسن با پارامتر $n\lambda$ ۳. نمایی با پارامتر $n\lambda$ ۴. گاما با پارامتر $n\lambda$

۲۱- در نمونه‌گیری بدون جایگذاری نتایج استخراج شده

۱. مستقل‌اند ۲. مستقل نیستند
۳. در هر مرحله با احتمال $\frac{1}{n}$ هستند ۴. در هر مرحله هم‌شانس نیستند

۲۲- توزیع تباہیده یعنی توزیع یک متغیر تصادفی که با احتمال تنها یک مقدار اختیار می‌کند.

۱. پیوسته - یک ۲. گسسته - یک ۳. پیوسته - صفر ۴. گسسته - صفر

۲۳- اگر واریانس متغیر تصادفی X برابر صفر باشد، آنگاه

۱. $P(X = E(X)) = 0$ ۲. $P(X = E(X)) = \mu$ ۳. $P(X = E(X)) = 1$ ۴. $P(X = E(X)) = \frac{1}{2}$

$$0 < x < 2$$

در تابع چگالی توام $f(x, y) = \frac{3}{4}(2 - x - y)$ ، مقدار $f(x|y)$ در کدام گزینه قرار دارد؟
 $0 < y < 2$
 $x + y < 2$

۱. $\frac{2}{(y+2)^2}(2-x-y)$ ۲. $\frac{2}{(y-2)^2}(2-x-y)$ ۳. $\frac{2}{(y-2)^2}(2-x-y)$ ۴. $\frac{2}{(y-2)^2}(2+x+y)$

۲۵- تعداد لامپ های تولیدی در یک کارخانه دارای میانگین 150 است. احتمال آنکه تعداد لامپ های تولید شده در یک هفته از 200 تجاوز نماید چقدر است؟

۱. 0/25 ۲. 0/75 ۳. 0/5 ۴. 0/2

سوالات تشریحی

۱- در تابع چگالی $f(x, y) = \frac{3}{4}(2 - x - y)$ ، مقدار $E(x|y)$ را به دست آورید؟ $0 < x, y < 2$
 $x + y < 2$

۱.۲۰ نمره

۲- اگر $X_1, \dots, X_n$ متغیرهای مستقل دارای توزیع نمایی باشند، آنگاه تابع چگالی اولین آماره ترتیبی را بیابید.

۱.۲۰ نمره

۳- قضیه حد مرکزی را بیان و برای کاربرد آن مثالی بیاورید.

۱.۲۰ نمره

۴- قانون ضعیف اعداد بزرگ را بنویسید و اثبات کنید.

۱.۲۰ نمره

۵- فرض کنید X_1 و X_2 متغیرهایی مستقل با توزیع نرمال استاندارد باشند. توزیع توام $Y_1 = X_1 + X_2$ و $Y_2 = X_2 - X_1$ را بیابید.

۱.۲۰ نمره

ياشيخ صحيح
شماره
سواب

1	ج
2	ج
3	الف
4	ج
5	ب
6	ج
7	ج
8	ج
9	ج
10	ب
11	ب
12	الف
13	ج
14	الف
15	ج
16	ب
17	ب
18	ج
19	الف
20	ب
21	ب
22	ب
23	ج
24	ج
25	ب

۱- تابع چگالی زوج (X, Y) بصورت $f(x, y) = \begin{cases} kxy & x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & o.w. \end{cases}$ است. مقدار k را بیابید.

۱. $\frac{1}{2}$ ۲. 4 ۳. 8 ۴. $\frac{1}{8}$

۲- تابع چگالی $f(x, y) = \begin{cases} 2e^{-x-y} & 0 < x < y \\ 0 & o.w. \end{cases}$ را در نظر بگیرید. تابع چگالی حاشیه ای Y کدام است؟

۱. $2e^{-y}[1-e^{-y}], y > 0$ ۲. $2e^{-y}[1-e^{-y}], y > x$ ۳. $2e^{-x}[1-e^{-x}], y > x$ ۴. $2e^{-x}[1-e^{-x}], x > 0$

۳- اگر تابع چگالی توام (X, Y) بصورت $f(x, y) = \begin{cases} 2 & x > 0, y > 0, x + y < 1 \\ 0 & o.w. \end{cases}$ باشد. تابع چگالی $X|Y = y$ کدام است؟

۱. $2(1-x), 0 < x < 1$ ۲. $\frac{1}{(1-x)}, 0 < x < 1, y > 0$

۳. $\frac{1}{(1-y)}, 0 < y < 1, x > 0$ ۴. $\frac{1}{(1-y)}, 0 < x < 1, y > 0$

۴- فرض کنید $E(X|Y) = \frac{2-Y}{3}, E(Y) = \frac{1}{2}$ باشد. آنگاه $E(X)$ کدام است؟

۱. $\frac{1}{2}$ ۲. $\frac{2}{3}$ ۳. $\frac{1}{6}$ ۴. $\frac{2}{9}$

۵- تابع چگالی توام زوج (X, Y) بصورت $f(x, y) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} & x > 0, y > 0 \\ 0 & o.w. \end{cases}$ است. تابع چگالی $Z = X + Y$ را بیابید.

۱. $\lambda^2 e^{-\lambda(y+z)}, z > 0$ ۲. $\lambda^2 z e^{-\lambda z}, z > 0$ ۳. $\lambda e^{-\lambda z}, z > 0$ ۴. $\lambda^2 e^{-\lambda z}, z > 0$

۶- با فرض اینکه $\varphi(t_1, t_2) = E(e^{t_1 X + t_2 Y})$ باشد، آنگاه $E(XY)$ چگونه محاسبه می شود؟

۱. مشتق جزئی مرتبه دوم φ نسبت به t_2 به ازای $t_1 = 0$.

۲. مشتق جزئی مرتبه دوم φ نسبت به t_1 به ازای $t_2 = 0$.

۳. مشتق جزئی مرتبه اول φ نسبت به t_1 به ازای $t_2 = 0$.

۴. مشتق جزئی مرتبه دوم φ نسبت به t_2, t_1 به ازای $t_2 = t_1 = 0$.

۷- اگر متغیر تصادفی X فقط مقادیر نامنفی را اختیار کند، آنگاه به ازای هر مقدار $p(X \geq a), a > 0$ برابر کدام گزینه است؟

۱. $\int_a^\infty f(x) dx$ ۲. کوچکتر یا مساوی $E(X)$

۳. کوچکتر یا مساوی $\frac{E(X)}{a}$ ۴. بزرگتر یا مساوی $aE(X)$

۸- اگر واریانس متغیر تصادفی X برابر صفر باشد، آنگاه گزینه صحیح کدام است؟

۱. $E(X^2) = 1$ ۲. $p(X = E(X)) = 1$ ۳. $p(X = E(X)) = 0$ ۴. $p(X = E(X)^2) = 1$

۹- اگر دنباله ای از پیشامدها بصورت $E_n (n \geq 1)$ داشته باشیم. تحت چه شرطی می توان جای $\lim$ و احتمال را عوض کرد؟

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(E_n) = p_{n \rightarrow \infty}(\lim E_n)$$

۱. شرط لازم نیست ۲. مستقل باشند ۳. پیوسته باشند ۴. نامنفی باشند

۱۰- توزیع متغیر $\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - n(0)}{\sqrt{n}(1)}$ وقتی $n \rightarrow \infty$ ، به چه توزیعی میل می کند؟

۱. $N(0,1)$ ۲. $N(\mu, \sigma^2)$ ۳. $\text{gama}(\alpha, \beta)$ ۴. توزیع یکنواخت

۱۱- اگر $X_1, \dots, X_n, \dots$ متغیرهای تصادفی مستقل با ویژگی های $E(X) = 0, \text{var}(X_i) = \sigma^2 < \infty$ باشند، در صورتی که

$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sigma_i^2}{i^2}$ ، آنگاه با احتمال 1 وقتی $n \rightarrow \infty$ ، گزینه صحیح کدام است؟

۱. $\sum x_i \rightarrow n\mu$ ۲. $\sum x_i \rightarrow \mu$ ۳. $\sum x_i \rightarrow \sigma^2$ ۴. $\sum \frac{x_i}{n} \rightarrow 0$

۱۲- تابع چگالی توام $f(x, y) = (x + y)I_{(0,1)}(x)I_{(0,1)}(y)$ را در نظر بگیرید. اگر $0 < y < 1, 0 < x < 1$ باشد، آنگاه $F_{X,Y}(x, y)$ کدام است؟

۱. $x^2 + y$ ۲. $x^2 + x$ ۳. $\frac{1}{2}(x^2y + xy^2)$ ۴. $y^2 + y$

۱۳- اگر Y, X دو متغیر تصادفی گسسته باشند، تابع توزیع احتمال شرطی Y به فرض $X = x$ را بدست آورید.

۱. $p(Y = y|X = x)$ ۲. $p(X = x|Y = y)$ ۳. $p(X \leq x|Y = y)$ ۴. $p(Y \leq y|X = x)$

۱۴- فرض کنید $f(x, y) = (x + y)I_{(0,1)}(x)I_{(0,1)}(y)$. در اینصورت $f(y|X = x)$ در کدام گزینه است؟

۱. $(x + \frac{1}{2})I_{(0,1)}(x)$ ۲. $(y + \frac{1}{2})I_{(0,1)}(y)$ ۳. $\frac{xy + \frac{y^2}{2}}{(x + \frac{1}{2})}I_{(0,1)}(y)$ ۴. $\frac{x + y}{(x + \frac{1}{2})}I_{(0,1)}(y)$

۱۵- دو تاس را با هم می ریزیم و فرض می کنیم که X عدد ظاهر شده بر روی یک تاس و Y بزرگترین عدد ظاهر شده بر روی دو تاس باشد. آنگاه گزینه صحیح کدام است؟

۱. $p(Y = 2|X = 3) = \frac{1}{36}$ ۲. $p(Y = 2) = p_{Y|X}(2|3)$

۳. Y, X مستقلند. ۴. Y, X مستقل نیستند.

۱۶- فرض کنید $f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{1}{2}xyI_{(0,x)}(y)I_{(0,2)}(x)$ باشد. در اینصورت مقدار $E(XY)$ کدام است؟

۱. $\frac{16}{9}$ ۲. $\frac{1}{36}$ ۳. $\frac{32}{36}$ ۴. 1

۱۷- فرض کنید که $f_{(X,Y)}(x, y) = e^{-(x+y)}I_{(0,\infty)}(x)I_{(0,\infty)}(y)$. m را طوری پیدا کنید که $p(X + Y < m) = \frac{1}{2}$ برقرار باشد.

۱. $m = 2$ ۲. جواب معادله $e^m - m - 2 = 0$

۳. m می تواند بی نهایت مقدار بگیرد. ۴. جواب معادله $e^m + m + 2 = 0$

۱۸- کدام گزینه برابر $\text{var}[E(Y|X)]$ می باشد؟

۱. $E(\text{var}(Y|X))$ ۲. $\text{var}(Y)$

۳. $\text{var}(Y) - E(\text{var}(Y|X))$ ۴. $\text{var}(Y) + E(\text{var}(Y|X))$

۱۹- اگر (X, Y) دارای توزیع نرمال دو متغیره باشد، آنگاه $E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)]$ برابر کدام گزینه است؟

۱. $\rho \sigma_x \sigma_y$
۲. $\rho \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$
۳. ρ
۴. $\rho - \mu_x \mu_y$

۲۰- اگر $X_1, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع نمایی با میانگین λ باشند، آنگاه توزیع $Y_1 = \min[X_1, \dots, X_n]$ کدام است؟

۱. $\frac{1}{\lambda} e^{-y_1/\lambda}, y_1 > 0$
۲. $\frac{n}{\lambda} e^{-ny_1/\lambda}, y_1 > 0$
۳. $n \lambda e^{-y_1/\lambda}, y_1 > 0$
۴. $\lambda e^{-ny_1/\lambda}, y_1 > 0$

۲۱- فرض کنید X دارای توزیع پارتو با چگالی $f_X(x) = \theta e^{-\theta x} I_{(1, \infty)}(x), \theta > 0$ باشد. توزیع $Y = \log X$ برابر کدام گزینه است؟

۱. $e^{-\theta y}, y > 1$
۲. $\theta e^{-\theta y}, y > 1$
۳. $\theta e^{-\theta y}, y > 0$
۴. $e^{-\theta y}, y > 0$

۲۲- فرض کنید که X_2, X_1 متغیرهای تصادفی مستقلی باشند که هر یک دارای توزیع یکنواخت بر بازه $(0, 1)$ است. اگر $Y_2 = X_2 - X_1, Y_1 = X_1 + X_2$ باشد، آنگاه تبدیل J (ژاکوبین) را بیابید.

۱. $\frac{1}{2}$
۲. 0
۳. $-\frac{1}{2}$
۴. $\frac{1}{4}$

۲۳- نسبت دو متغیر تصادفی مستقل با توزیع نرمال استاندارد دارای چه توزیعی است؟

۱. نرمال استاندارد
۲. پارتو
۳. یکنواخت
۴. کوشی

۲۴- اگر $M_Y(t) = \exp(\sum \lambda_i (e^t - 1))$ باشد، آنگاه Y دارای چه توزیعی است؟

۱. گاما λ, n
۲. پواسن λ
۳. پواسن $\sum \lambda_i$
۴. گاما $\sum \lambda_i, n$

۲۵- اگر $X_1, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع پواسن باشند، آنگاه توزیع X_1 به شرط معلوم بودن $X_1 + \dots + X_n$ کدام است؟

۱. دوجمله ای
۲. پواسن
۳. هندسی
۴. یکنواخت

سوالات تشریحی

۱.۲۰ نمره

۱- تابع چگالی (X, Y) به صورت $f(x, y) = \begin{cases} 1/2 & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & o.w. \end{cases}$ است. آیا Y, X مستقلند؟

۱.۲۰ نمره

۲- قضیه حد مرکزی را بیان کنید.

۱.۲۰ نمره

۳- فرض کنید که (X, Y) یک بردار تصادفی پیوسته و $f_X(x) = I_{(0,1)}(x)$ و $f_{Y|X}(y|x) = I_{(x, x+1)}(y)$ باشد، آنگاه $E(Y)$ را به دست آورید.

۱.۲۰ نمره

۴- اگر X دارای توزیع یکنواخت در بازه $(0,1)$ باشد آنگاه توزیع $\frac{1}{X}$ را به دست آورید و $E(\frac{1}{X})$ را در صورت وجود بیابید.

۱.۲۰ نمره

۵- اگر چگالی بردار (X, Y) بصورت $f(x, y) = 3(x+y)I_{(0,1)}(x)I_{(0,1)}(y)$ باشد آنگاه $\text{cov}(X, Y)$ را بیابید.

شماره سوال	پاسخ صحیح
1	ج
2	الف
3	ج
4	الف
5	ب
6	د
7	ج
8	ب
9	ج
10	الف
11	د
12	ج
13	د
14	د
15	د
16	الف
17	ب
18	ج
19	الف
20	ب
21	ج
22	الف
23	د
24	ج
25	الف

۱- تابع چگالی توام (X, Y) به صورت $f(x, y) = \begin{cases} 2 & x > 0, y > 0, x + y < 1 \\ 0 & o.w. \end{cases}$ است. چگالی حاشیه ای X برابر است با:

۱. $2x, x > 0$ ۲. $2y, x > 0$ ۳. $2(1-x), 0 < x < 1$ ۴. $2(1-y), 0 < y < 1$

۲- اگر تابع توزیع توام (X, Y) به صورت $F(x, y) = \begin{cases} (1-e^{-x^2})(1-e^{-y}) & x > 0, y > 0 \\ 0 & o.w. \end{cases}$ آنگاه تابع چگالی (X, Y) کدام است؟

۱. $e^{-x^2}(1-e^{-y})$ ۲. $2xe^{-x^2-y}$ ۳. $(1-e^{-x^2})e^{-y}$ ۴. $2xe^{-x^2}(1-e^{-y})$

۳- دو متغیر پیوسته Y, X از هم مستقلند اگر و تنها اگر:

۱. تابع چگالی توام آن ها برابر حاصلضرب توام چگالی آن دو باشد.
۲. تابع چگالی توام آن ها برابر با چگالی حاشیه ای X باشد.
۳. تابع چگالی توام آن ها برابر با چگالی حاشیه ای Y باشد.
۴. تابع چگالی توام آن ها صفر باشد.

۴- برای توزیع توام (X, Y) ، $p(Y < y | X = x)$ برابر کدام گزینه می باشد؟

۱. $\frac{\int_{-\infty}^y f_Y(y) dy}{f_X(x)}$ ۲. $\frac{\int_{-\infty}^x f_X(x) dx}{f_Y(y)}$ ۳. $\frac{\int_{-\infty}^x f_Y(x, y) dx}{f_X(x)}$ ۴. $\frac{\int_{-\infty}^y f_{X,Y}(x, y) dy}{f_X(x)}$

۵- اگر $f(x, y)$ تابع چگالی توام (X, Y) باشد، $\mu_{1,1}$ کدام است؟

۱. $\text{var}(X)$ ۲. $\text{var}(Y)$ ۳. $\text{cov}(X, Y)$ ۴. $E(XY)$

۶- تابع چگالی توام زوج (X, Y) به صورت $f(x, y) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} & x > 0, y > 0 \\ 0 & o.w. \end{cases}$ است. تابع چگالی $Z = X + Y$ دارای چه توزیعی است؟

۱. نمایی با پارامتر λ ۲. نمایی با پارامتر 2λ
۳. گاما با پارامترهای $2, \lambda^2$ ۴. گاما با پارامترهای $2, \lambda$

۷- X متغیر تصادفی $\Gamma(a, \beta)$ و Y متغیر تصادفی $\Gamma(b, \beta)$ است. Y, X از هم مستقلند. متغیر تصادفی $\frac{X}{X+Y}$ دارای چه توزیعی است؟

۱. $B(a, b)$ ۲. $\Gamma(a+b, \beta)$ ۳. $\Gamma(\frac{a}{a+b}, \beta)$ ۴. $B(a+b, \beta)$

۸- اگر واریانس متغیر تصادفی X برابر صفر باشد، آنگاه $p(X = E(X))$ را بیابید.

۱. 0 ۲. $E(X)$ ۳. 1 ۴. $\frac{1}{2}$

۹- فرض کنید $X_1, X_2, \dots$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع باشند بطوریکه $EX_i = \mu$. بنابراین برای هر

$\varepsilon > 0$ وقتی $n \rightarrow \infty$ $p\left[\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \mu\right| > \varepsilon\right]$ برابر است با:

۱. صفر ۲. 1 ۳. $\frac{\sigma^2}{n}$ ۴. $\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$

۱۰- اگر برای $n \rightarrow \infty$ داشته باشیم $M_{Z_n}(t) \rightarrow e^{t^2/2}$. آنگاه:

۱. $F_{Z_n}(t) \rightarrow 0$ ۲. $F_{Z_n}(t) \rightarrow e^{t^2/2}$ ۳. $F_{Z_n}(t) \rightarrow N(0,1)$ ۴. $F_{Z_n}(t) \rightarrow M_Z$

۱۱- 12 تاس همگن را می ریزیم. احتمال اینکه مجموع شماره هایی که ظاهر می شوند از 45 تا 50 باشد، چقدر است؟

۱. $p(45 < Z < 50)$ ۲. $p(\frac{3}{35} < Z < \frac{8}{35})$ ۳. $p(\frac{45}{\sqrt{35}} < Z < \frac{50}{\sqrt{35}})$ ۴. $p(\frac{3}{\sqrt{35}} < Z < \frac{8}{\sqrt{35}})$

۱۲- اگر $a_1, a_2, \dots$ اعداد حقیقی باشند و $\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{i} < \infty$. آنگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{n}$ برابر کدام گزینه است؟

۱. 1 ۲. صفر ۳. μ ۴. σ^2

۱۳- اگر Y, X دو متغیر تصادفی باشند و $E(Y|X=x) = \mu$ که در آن μ به x بستگی ندارد، آنگاه $E(\text{var}(Y|X))$ کدام است؟

۱. $\text{var}(Y)$ ۲. $\text{var}(X)$ ۳. $E(Y)$ ۴. $E(X)$

۱۴- اگر Z دارای توزیع نرمال استاندارد باشد، Z^2 دارای کدام توزیع است؟

۱. t ۲. χ^2 ۳. F ۴. هندسی

۱۵- اگر X دارای توزیع کی دو با 2 درجه آزادی باشد، واریانس چقدر است؟

۱. 2 ۲. 1 ۳. 4 ۴. 3

۱۶- اگر $X_1, \dots, X_k$ دارای توزیع چندجمله ای باشند، آنگاه توزیع کناری X_i را بیابید.

۱. توزیع پواسن np_i ۲. توزیع دو جمله ای n, p_i

۳. توزیع دو جمله ای n, np_i ۴. توزیع پواسن p_i

۱۷- اگر X, Y مستقل باشند، گزینه صحیح کدام است؟

۱. $f(x, y) = f(x)f(y)$ ۲. $f(x|y) = f(y)$ ۳. $E\left(\frac{X}{Y}\right) = \frac{E(X)}{E(Y)}$ ۴. همه موارد

۱۸- اگر Y, X دو متغیر تصادفی مستقل باشند، آنگاه کدام گزینه برای $E(Y|X=x)$ صحیح است؟

۱. به X بستگی دارد. ۲. به X بستگی ندارد. ۳. برابر با $v(Y)$ است. ۴. برابر با $v(X)$ است.

۱۹- اگر (X, Y) دارای توزیع $N(\mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y, \rho)$ باشند، توزیع $X|Y$ دارای توزیع نرمال با چه واریانسی است؟

۱. σ_x^2 ۲. σ_y^2 ۳. $\sigma_y^2(1-\rho^2)$ ۴. $\sigma_x^2(1-\rho^2)$

۲۰- اگر $X_1, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل باشند و $Y_1 = \min(X_1, \dots, X_n)$ آنگاه $F_{Y_1}(y)$ کدام است؟

۱. $1 - [1 - F_X(y)]^n$ ۲. $1 - \prod_{i=1}^n [1 - F_{X_i}(y)]$ ۳. $[F_X(y)]^n$ ۴. $\prod_{i=1}^n [F_{X_i}(y)]$

۲۱- فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل نمایی λ باشند. آنگاه $Y = \sum X_i$ دارای چه توزیعی است؟

۱. نمایی $n\lambda$ ۲. پواسن $n\lambda$ ۳. گاما n, λ ۴. گاما $n, \sum \lambda$

۲۲- فرض کنید X دارای توزیع بتا است. اگر $Y = -\log X$ باشد، $\left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right|$ برابر کدام گزینه است؟

۱. e^{-x} ۲. $-e^{-x}$ ۳. $-e^{-y}$ ۴. e^{-y}

۲۳- اگر X متغیری تصادفی با تابع توزیع تجمعی پیوسته $F_X(x)$ باشد، آنگاه $U = F_X(X)$ دارای چه توزیعی است؟

۱. $U(0,1)$.۲. $F_U(u)$.۳. $1 - e^{-u}$.۴. $F_X^{-1}(U)$

۲۴- فرض کنید X_1, X_2 دو متغیر تصادفی مستقل و دارای توزیع نرمال استاندارد هستند. اگر $Y_1 = X_1 + X_2, Y_2 = \frac{X_1}{X_2}$

باشند، J کدام است؟

۱. $\frac{y_1}{1+y_2}$.۲. $\frac{y_2}{(1+y_1)^2}$.۳. $-\frac{y_1}{(1+y_2)^2}$.۴. $-\frac{y_2}{(1+y_2)^2}$

۲۵- نسبت دو متغیر تصادفی نرمال استاندارد، دارای چه توزیعی است؟

۱. نرمال استاندارد .۲. کای اسکور با 2 درجه آزادی

۳. کوشی استاندارد .۴. تی با 2 درجه آزادی

سوالات تشریحی

۱.۲۰ نمره

۱- تابع چگالی (Y, X) به صورت $f(x, y) = \begin{cases} ax^2y & 0 < y < 1, 0 < x < 1 \\ 0 & o.w. \end{cases}$ است. الف) مقدار a را بیابید. ب)

نشان دهید که $p(0 < X < \frac{3}{4}, \frac{1}{3} < Y < 2) = \frac{3}{8}$.

۱.۲۰ نمره

۲- اگر Y, X متغیرهای تصادفی پیوسته با تابع چگالی توام

$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{4}(2-x-y) & 0 < x < 2, 0 < y < 2, x+y < 2 \\ 0 & o.w. \end{cases}$ باشند، آنگاه $E(X|Y=y)$ را بیابید.

۱.۲۰ نمره

۳- سه نقطه به تصادف بر محیط یک دایره انتخاب می شوند. احتمال اینکه این سه نقطه بر یک نیم دایره واقع شوند، چقدر است؟

۱.۲۰ نمره

۴- اگر X دارای توزیع نرمال استاندارد باشد، توزیع $Y = g(X) = X^2$ را بیابید.

۱.۲۰ نمره

۵- فرض کنید Y, X متغیرهای تصادفی مستقل و هر یک دارای توزیع یکنواخت روی بازه $(0,1)$ باشند. توزیع

$U = \frac{X}{Y}, Z = XY$ را بیابید.

شماره سوال	پاسخ صحیح
1	ج
2	ب
3	الف
4	د
5	ج
6	د
7	الف
8	ج
9	الف
10	ج
11	د
12	ب
13	الف
14	ب
15	ج
16	ب
17	الف
18	ب
19	د
20	ب
21	ج
22	د
23	الف
24	ج
25	ج

۱- فرض کنید به ازای $0 < x, y < 1$ تابع چگالی (X, Y) بصورت $f(x, y) = ax^2y$ باشد. مقدار a کدام است؟

۱. 6 ۲. 3 ۳. 2 ۴. 1

۲- تابع توزیع توام (X, Y) به ازای $x, y > 0$ بصورت $F(x, y) = (1 - e^{-x^2})(1 - e^{-y})$ است. تابع چگالی توام را بیابید.

۱. $2xe^{-x^2-2y}$ ۲. $2xe^{-x^2-y}$ ۳. xe^{-x^2-y} ۴. xe^{-x^2-2y}

۳- اگر تابع چگالی توام برای $0 < x, y < 1$ بصورت $f(x, y) = 12xy(1 - y)$ باشد، آنگاه تابع چگالی Y کدام است؟

۱. $3y(1 - y)$ ۲. $2y(1 - y)$ ۳. $6y(1 - y)$ ۴. $y(1 - y)$

۴- رابطه $E[E(X | Y)]$ با کدام گزینه برابر است؟

۱. $E(X | Y)$ ۲. $E(Y | X)$ ۳. $E(X)$ ۴. $E(Y)$

۵- فرض کنید به ازای $0 \leq x \leq 1$ ، $0 \leq y \leq 2$ تابع چگالی به صورت $f(x, y) = \frac{1}{2}$ باشد. تابع چگالی X به شرط $Y = y$ کدام است؟

۱. 1 ۲. 2 ۳. 0/5 ۴. 0/2

۶- فرض کنید به ازای $0 \leq x \leq 1$ ، $0 \leq y \leq 2$ تابع چگالی به صورت $f(x, y) = \frac{1}{2}$ باشد. میانگین X به شرط $Y = y$ را بدست آورید.

۱. 4 ۲. 1 ۳. 2 ۴. 0/5

۷- به ازای $0 < x \leq y \leq 1$ ، تابع چگالی توام (X, Y) به صورت $f(x, y) = 2$ است. $\rho(X, Y)$ کدام است؟

۱. 0/5 ۲. 1 ۳. 0/2 ۴. 0/1

۸- نابرابری مارکف کدام است؟

۱. $P(X > a) \geq \frac{E(X)}{a}$ ۲. $P(X < a) \leq \frac{E(X)}{a}$ ۳. $P(X \leq a) > \frac{E(X)}{a}$ ۴. $P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$

۹- می دانیم که تعداد لامپ های معیوب یک فرایند تولید در طول هفته، متغیری تصادفی با میانگین 150 است. حداکثر احتمال اینکه تولید لامپ های معیوب در یک هفته، از 200 تا تجاوز کند چقدر است؟

۱. 0/45 ۲. 0/35 ۳. 0/75 ۴. 0/85

۱۰- اگر واریانس متغیر تصادفی X برابر صفر باشد، آنگاه $P(X = E(X))$ کدام است؟

۱. 1 ۲. 2 ۳. 0/5 ۴. صفر

۱۱- متوسط دنباله ای از متغیرهای تصادفی مستقل هم توزیع، با احتمال یک به توزیع مشترک می گراید. این قانون کدام است؟

۱. قانون قوی اعداد بزرگ
۲. قانون ضعیف اعداد بزرگ
۳. قضیه حد مرکزی
۴. قضیه مارکف

۱۲- اگر X متغیری تصادفی با توزیع نرمال استاندارد باشد، توزیع X^2 کدام است؟

۱. χ^2 با یک درجه آزادی
۲. گامای ۲ و ۲
۳. χ^2 با دو درجه آزادی
۴. گامای ۱ و ۱

۱۳- فرض کنید که طول عمر لامپ معینی دارای توزیع نمایی با میانگین ۱۰۰ ساعت باشد. اگر ۱۰ لامپ از این نوع را همزمان نصب کنیم، میانگین طول عمر لامپی را که زودتر از همه می سوزد، چقدر است؟

۱. ۱۵
۲. ۵
۳. ۱۰
۴. ۲۰

۱۴- اگر X دارای توزیع یکنواخت صفر و یک باشد، توزیع $Y = X^2$ کدام است؟

۱. $\frac{1}{2y}$
۲. $\frac{1}{2\sqrt{y}}$
۳. $\frac{2}{\sqrt{y}}$
۴. $\frac{2}{y}$

۱۵- اگر X دارای توزیع بتای دو و یک داشته باشد، توزیع $Y = -\log X$ را بیابید.

۱. نرمال استاندارد
۲. نمایی ۵/۰
۳. نمایی ۲/۰
۴. یکنواخت ۱ و ۲

۱۶- فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع توزیع F_X و تابع چگالی f_X باشد. اگر $U = F_X(X)$ ، توزیع U را بیابید.

۱. پارتو
۲. نرمال استاندارد
۳. نرمال
۴. یکنواخت

۱۷- اگر X متغیر تصادفی نرمال استاندارد باشد، تابع مولد گشتاور $Y = X^2$ کدام است؟

۱. $(1-2t)^{-2}$
۲. $(1-t)^{-2}$
۳. $(1-t)^{-\frac{1}{2}}$
۴. $(1-2t)^{-\frac{1}{2}}$

۱۸- مجموع متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع نمایی، چه توزیعی دارد؟

۱. گاما
۲. دوجمله ای
۳. نرمال
۴. نرمال استاندارد

۱۹- اگر X دارای توزیع بتا باشد، توزیع $1-X$ کدام است؟

۱. بتا
۲. گاما
۳. نرمال
۴. یکنواخت

۲۰- اگر X دارای توزیع کوشی با پارامترهای 0 و 1 باشد، توزیع $\frac{1}{X}$ کدام است؟

۱. بتا ۲. گاما ۳. نرمال ۴. کوشی

۲۱- توزیعی با میانگین نامعلوم، دارای واریانس یک است. اندازه نمونه چقدر باشد تا با احتمال 0/95، میانگین نمونه در فاصله 0/5 از میانگین جامعه قرار داشته باشد؟

۱. 60 ۲. 50 ۳. 80 ۴. 70

۲۲- اگر X دارای توزیع $F_{4,3}$ باشد، $E(X)$ چقدر است؟

۱. 4 ۲. 3 ۳. 2 ۴. 1

۲۳- اگر X دارای توزیع $F_{m,n}$ باشد در این صورت توزیع $\frac{1}{X}$ کدام است؟

۱. χ_m^2 ۲. $F_{n,m}$ ۳. $F_{m,n}$ ۴. χ_n^2

۲۴- فرض کنید که X متغیر تصادفی با توزیع t استیودنت با 4 درجه آزادی باشد، $Var(X)$ چقدر است؟

۱. 4 ۲. 3 ۳. 2 ۴. 1

۲۵- میانگین توزیع تی استیودنت با 3 درجه آزادی با میانگین کدام توزیع برابر است؟

۱. نمایی 3 ۲. نرمال استاندارد ۳. فیشر 2 و 3 ۴. نرمال 1 و 2

سوالات تشریحی

۱-۲۰ نمره دایره ای به مرکز صفر، صفر و شعاع یک را در نظر بگیرید. نشان دهید تابع $f(x, y) = \frac{1}{\pi}$ در داخل دایره، یک تابع چگالی است.

۲-۲۰ نمره قانون ضعیف اعداد بزرگ را بیان و اثبات نمایید.

۳-۲۰ نمره تابع چگالی توام $f(x, y) = 12xy(1-y)$ را به ازای $0 < x, y < 1$ در نظر بگیرید. نشان دهید که X و Y از هم مستقل هستند.

۴-۲۰ نمره فرض کنید X_1 و X_2 متغیرهایی مستقل با توزیع نرمال استاندارد باشند. توزیع توام $Y_1 = X_1 + X_2$ و $Y_2 = X_2 - X_1$ را بیابید.

۵-۲۰ نمره قضیه حد مرکزی را بدون اثبات بیان نمایید.

الف	١
ب	٢
ج	٣
ج	٤
الف	٥
د	٦
الف	٧
د	٨
ج	٩
الف	١٠
الف	١١
الف	١٢
ج	١٣
ب	١٤
ب	١٥
د	١٦
د	١٧
الف	١٨
الف	١٩
د	٢٠
ج	٢١
ب	٢٢
ب	٢٣
ج	٢٤
ب	٢٥

۱- اگر $f(x, y) = \begin{cases} x+y & 0 < x, y < 1 \\ 0 & o.w \end{cases}$ باشد، آنگاه $f(y)$ کدام است؟

۱. $x + \frac{1}{2}$ ۲. $y + \frac{1}{2}$ ۳. $y + 2$ ۴. $x + 2$

۲- اگر $f(x, y) = \begin{cases} 12yx(1-y) & 0 < x, y < 1 \\ 0 & o.w \end{cases}$ باشد، $f(x|y)$ کدام است؟

۱. $2x$ ۲. $24xy$ ۳. $4x$ ۴. وجود ندارد

۳- مقدار $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ کدام است؟

۱. $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ ۲. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ۳. π^2 ۴. $\sqrt{\pi}$

۴- اگر $x \sim N(0, 1)$ آنگاه $y = x^2$ دارای چه توزیعی است؟

۱. $\chi^2(2)$ ۲. $\Gamma\left(2, \frac{1}{2}\right)$ ۳. $\chi^2\left(\frac{1}{2}\right)$ ۴. $\Gamma\left(\frac{1}{2}, 2\right)$

۵- اگر $f(x, y) = \begin{cases} kyx(1-y) & 0 < x, y \quad x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & o.w \end{cases}$ مقدار k چقدر است؟

۱. 4 ۲. 8 ۳. 16 ۴. $\sqrt{\pi}$

۶- در صورتی که $x \geq 1$ ، $f(x) = \theta x^{-(\theta+1)}$ ، آنگاه $Y = \log X$ دارای چه توزیعی است؟

۱. $\frac{1}{\theta} e^{-\theta x}$ ۲. $\theta e^{-\theta x}$ ۳. $x e^{-\theta x}$ ۴. $x^{\log(\theta+1)}$

۷- کدام گزینه، صحیح است؟

۱. $P(x \geq a) \geq \frac{E(x)}{a}$ ۲. $P(x \geq a) \leq \frac{E(x)}{a}$ ۳. $P(x \leq a) \leq \frac{E(x)}{a}$ ۴. $P(x \geq a) = \frac{E(x)}{a}$

۸- کدام گزینه تبدیل انتگرال احتمال را نشان می دهد؟

۱. $U = f(x)$ ۲. $U = \int_0^\infty F(x)$ ۳. $U = F(x)$ ۴. $U = \int_0^\infty f(x)$

۹- اگر $\sigma_x^2 = 0$ آنگاه کدام گزینه صحیح می باشد؟

۱. $P(x=0)=1$ ۲. $P(x=1)=0$ ۳. $P(x=\mu_x)=0$ ۴. $P(x=\mu_x)=1$

۱۰- نسبت دو متغیر تصادفی مستقل از توزیع نرمال استاندارد، چه توزیعی دارد؟

۱. فیشر

۲. کای دو

۳. کوشی

۴. تی استیودنت

۱۱- برای دو متغیر مستقل از توزیع گاما، ژاکوبی تبدیل $\begin{cases} y_1 = \frac{x_1}{x_1 + x_2} \\ y_2 = x_1 + x_2 \end{cases}$ را بیابید.

۱. y_1

۲. $-y_2$

۳. $\frac{-y_1}{(1+y_2)^2}$

۴. $\frac{-y_2}{(1+y_1)^2}$

۱۲- در صورتی که $x_1, x_2 \sim N(0,1)$ مستقل باشند، قرار دهید $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_2 - x_1 \end{cases}$ در اینصورت تابع مولد گشتاور توام دو متغیر y_2, y_1 کدام است؟

۱. $e^{(t_1+t_2)^2}$

۲. $e^{\left(\frac{t_1}{t_2}\right)^2}$

۳. $e^{t_1^2+t_2^2}$

۴. $e^{t_1-t_2}$

۱۳- تابع مولد گشتاور مجموع n متغیر تصادفی مستقل توزیع برنولی، کدام است؟

۱. $[qe^t + p]^n$

۲. $[pe^t + q]^n$

۳. $[pe^t + q]$

۴. $[qe^t + p]$

۱۴- قانون ضعیف اعداد بزرگ معادل چه نوع همگرایی است؟

۱. همگرایی با احتمال 1

۲. همگرایی در توزیع

۳. همگرایی در احتمال

۴. همگرایی در میانگین مرتبه 2

۱۵- در صورتی که $F_n(\bar{x}) = \int_{-\infty}^{\bar{x}} \frac{e^{-\frac{nu^2}{2}}}{\sqrt{\frac{2\pi}{n}}} du$ باشد، توزیع حدی $\bar{x}$ را بدست آورید.

۱. $F(\bar{x}) = \begin{cases} 0 & \bar{x} < 0 \\ \frac{1}{2} & \bar{x} \geq 0 \end{cases}$

۲. $F(\bar{x}) = \begin{cases} 1 & \bar{x} < 0 \\ 0 & \bar{x} \geq 0 \end{cases}$

۳. $F(\bar{x}) = \begin{cases} 0 & \bar{x} < 0 \\ 1 & \bar{x} \geq 0 \end{cases}$

۴. $F(\bar{x}) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \bar{x} < 0 \\ 0 & \bar{x} \geq 0 \end{cases}$

۱۶- در صورتی که $\begin{cases} U \sim \chi^2(6) \\ V \sim \chi^2(4) \end{cases}$ آنگاه $E\left(\frac{2U}{3V}\right)$ چقدر است؟

۱. 1/5

۲. 0/66

۳. 4

۴. 2

۱۷- اگر $X \sim t(5)$ آنگاه $V(X)$ کدام است؟

۱. 0

۲. 0/6

۳. 1/66

۴. 10

۱۸- برای پنج متغیر تصادفی توزیع یکنواخت در بازه (3,5)، تابع چگالی سومین آماره ترتیبی کدام است؟

۱. $\frac{15}{4}(x^2 - 9)$ ۲. $\frac{15}{4}(x - 3)^2$ ۳. $\frac{15}{4}(x + 3)^2$ ۴. $\frac{4}{15}(x - 3)^2$

۱۹- اگر $x_1, x_2, x_3 \sim \beta(2,1)$ (توزیع بتا) باشند، $f(x_1, x_2, x_3)$ را بدست آورید؟

۱. $6e^{-x}$ ۲. $48e^{-3x}$ ۳. $6e^{-3x}$ ۴. $28e^{3x}$

۲۰- اگر $x_1, x_2 \sim N(0,1)$ آنگاه $\frac{x_1 + x_2}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2}}$ دارای چه توزیعی است؟

۱. $F(1,1)$ ۲. $\chi^2(2)$ ۳. نرمال ۴. $t(1)$

سوالات تشریحی

۱.۲۰ نمره

۱- اگر $f(x, y) = \begin{cases} 6x^2y & 0 < x, y < 1 \\ 0 & o.w \end{cases}$ مقدار $P\left(x + y < \frac{1}{2}\right)$ را بیابید.

۱.۲۰ نمره

۲- اگر $F(x, y) = e^{-(x^2 + y^2)}$ باشد، $f(x, y)$ را بدست آورید.

۱.۲۰ نمره

۳- اگر $x_i \sim \Gamma(n_i, \lambda)$ باشد، با در نظر گرفتن $\begin{cases} y_1 = \frac{x_1}{x_1 + x_2} \\ y_2 = x_2 + x_1 \end{cases}$ ، $f(y_1)$ را بیابید.

۱.۲۰ نمره

۴- طول عمر لامپ دارای توزیع نمایی با میانگین 5 روز می باشد. احتمال آنکه در مدت 200 روز، بیش از 40 لامپ مورد نیاز نباشد؟

۱.۲۰ نمره

۵- اگر $Z_1, \dots, Z_n \sim N(0,1)$ نشان دهید $\bar{Z}$ و $\sum (Z_i - \bar{Z})^2$ مستقل اند.

شماره سوال	پاسخ صحیح
۱	ب
۲	د
۳	د
۴	د
۵	ب
۶	ب
۷	ب
۸	ج
۹	د
۱۰	ج
۱۱	ب
۱۲	ج
۱۳	ب
۱۴	ج
۱۵	ج
۱۶	د
۱۷	ج
۱۸	الف
۱۹	ب
۲۰	د

۱- در تابع احتمال توام $f(x, y) = x + y$ $0 < x, y < 1$ تابع چگالی حاشیه ای X را بیابید؟

۱. $x - \frac{1}{2}$ ۲. $x + \frac{1}{2}$ ۳. $y - \frac{1}{2}$ ۴. $y + \frac{1}{2}$

۲- مقدار a را طوری بیان نمایید که تابع $f(x, y) = ax^2y$ $0 < x, y < 1$ یک تابع چگالی احتمال باشد؟

۱. 6 ۲. $\frac{1}{6}$ ۳. 3 ۴. $\frac{1}{3}$

۳- اگر دو متغیر مستقل باشند، کدام رابطه صحیح است؟

۱. $f(x, y) = f(x)f(y)$ ۲. $E(x|y) = E(y)$ ۳. $E(x|y) = E(y)E(x)$ ۴. $f(x|y) = f(y)f(x)$

۴- در رابطه $F(x, y) = (1 - e^{-x^2})(1 - e^{-y})$ $0 < x, y$ تابع چگالی حاشیه ای y کدام است؟

۱. $2ye^{-y^2}$ ۲. e^{-y} ۳. ye^{-y} ۴. e^y

۵- در تابع چگالی توام $f(x, y) = \frac{3}{4}(2 - x - y)$ $0 < x < 2$ $0 < y < 2$ $x + y < 2$ مقدار $f(x|y)$ در کدام گزینه قرار دارد؟

۱. $\frac{2}{(y+2)}(2-x-y)$ ۲. $\frac{2}{(y-2)}(2-x-y)$ ۳. $\frac{2}{(y-2)^2}(2-x-y)$ ۴. $\frac{2}{(y-2)^2}(2+x+y)$

۶- فرض کنید برای دو متغیر مستقل داشته باشیم $\frac{E(x)=2}{E(y)=3}$ آنگاه $E(E(x|y))$ کدام است؟

۱. 2 ۲. 3 ۳. 6 ۴. $\frac{2}{3}$

۷- در پرتاب یک تاس، X شماره عدد ظاهر شده می باشد. قرار دهید $y = (x-2)^2$ آنگاه $f_y(16)$ کدام گزینه می باشد؟

۱. $\frac{4}{6}$ ۲. $\frac{1}{3}$ ۳. $\frac{1}{6}$ ۴. $\frac{1}{2}$

۸- برای n متغیر تصادفی مستقل همتوزیع، تابع توزیع n امین آماره ترتیبی کدام است؟

۱. $[F_X(y)]^n$ ۲. $[1 - F_X(y)]^n$ ۳. $[f_X(y)]^n$ ۴. $f(y)[F_X(y)]^n$

۹- با در نظر گرفتن تابع چگالی توام $f(x, y) = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}$ $x, y > 0$ تابع چگالی $z = x + y$ را بیابید؟

۱. $\lambda^2 e^{-z}$ ۲. λe^{-z} ۳. $\lambda^2 e^{-\lambda z}$ ۴. $\lambda e^{-\lambda z}$

۱۰- اگر X دارای توزیع بتا با پارامتر $(\alpha, 1)$ قرار دهید $Y = -\log X$ ، توزیع Y کدام است؟

۱. نمایی ۲. کای دو ۳. نرمال ۴. بتا

۱۱- اگر دو متغیر تصادفی دارای توزیع نرمال توأم باشند، آنگاه در چه صورت از هم مستقل هستند؟

۱. $\rho \neq 0$ ۲. $\rho \neq 1$ ۳. $\rho = 1$ ۴. $\rho = 0$

۱۲- تعداد لامپ های تولیدی در یک کارخانه دارای میانگین 150 است. احتمال آنکه تعداد لامپ های تولید شده در یک هفته از 200 تجاوز نماید چقدر است؟

۱. 0/25 ۲. 0/75 ۳. 0/5 ۴. 0/2

۱۳- کدام رابطه صحیح است؟

۱. $p(x \geq a) \leq \frac{E(x)}{a}$ ۲. $p(x \leq a) \leq \frac{E(x)}{a}$ ۳. $p(x < a) < \frac{E(x)}{a}$ ۴. $p(x \geq a) \geq \frac{E(x)}{a}$

۱۴- اگر $V(x) = 0$ باشد، آنگاه کدام صحیح است؟

۱. $E(x) = 1$ ۲. $p(x = E(x)) = 1$ ۳. $p(x = E(x)) = 0$ ۴. $p(x \neq E(x)) = 1$

۱۵- در پرتاب یک تاس، x_i شماره تاس می باشد، $E(x_i)$ کدام است؟

۱. $\frac{1}{6}$ ۲. $\frac{1}{2}$ ۳. $\frac{7}{2}$ ۴. $\frac{35}{12}$

۱۶-

x_1, x_2 دو متغیر نرمال استاندارد می باشند. ژاکوبی تبدیل $Y_1 = x_1 + x_2$ را بیابید؟
 $Y_2 = \frac{x_1}{x_2}$

۱. $-y_1$ ۲. $\frac{(1+y_2)^2}{y_1}$ ۳. $\frac{-(1+y_2)}{y_1}$ ۴. $\frac{-y_1}{(1+y_2)^2}$

۱۷- "متوسط دنباله ای از متغیرهای تصادفی مستقل همتوزیع، با احتمال 1 به میانگین توزیع مشترک می گراید" متناظر با کدام گزینه است؟

۱. قانون ضعیف اعداد بزرگ ۲. قانون قوی اعداد بزرگ
۳. قضیه حد مرکزی ۴. همگرایی در احتمال

۱۸- برای سه متغیر تصادفی مستقل و همتوزیع نرمال استاندارد، تابع مولد گشتاور $Y_3 = \sum_{i=1}^3 x_i$ را بدست آورید؟

۱. $e^{\frac{1}{3}t^2}$ ۲. $e^{\frac{2}{3}t^2}$ ۳. $e^{\frac{1}{6}t^2}$ ۴. $e^{\frac{3}{2}t^2}$

۱۹- $\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$ دارای چه توزیعی است؟

۱. کای دو با $n-1$ درجه آزادی
۲. کای دو با n درجه آزادی
۳. نرمال استاندارد
۴. نرمال با میانگین 1 و واریانس n

۲۰- بزرگی نمونه چقدر باشد تا 99 درصد مطمئن شویم $\bar{x}_n$ در فاصله 0/5 از میانگین قرار دارد؟

۱. 200
۲. 100
۳. 400
۴. 300

۲۱- برای n متغیر تصادفی مستقل نرمال استاندارد، $\bar{z} = \frac{\sum x_i}{n}$ دارای چه توزیعی است؟

۱. نرمال با میانگین صفر و واریانس یک
۲. نرمال با میانگین صفر و واریانس $\frac{1}{n}$
۳. نرمال با میانگین یک و واریانس صفر
۴. نرمال با میانگین یک و واریانس $\frac{1}{n}$

۲۲- برای متغیر x از توزیع F با درجه آزادی 2 و 6 میانگین کدام است؟

۱. 2
۲. 6
۳. 3
۴. $\frac{3}{2}$

۲۳- اگر x دارای توزیع F با m و n درجه آزادی باشد، $\frac{m \frac{x}{n}}{1 + m \frac{x}{n}}$ دارای چه توزیعی است؟

۱. گاما
۲. فیشر
۳. بتا
۴. کای دو

۲۴- اگر X دارای توزیع نرمال استاندارد باشد، میانگین چگالی احتمال $Z = X^2$ را بیابید؟

۱. 1
۲. 2
۳. 3
۴. 0/5

۲۵- برای دو متغیر تصادفی نرمال استاندارد، $\frac{x_1^2}{x_2^2}$ دارای چه توزیعی می باشد؟

۱. تی استیودنت
۲. کوشی
۳. فیشر
۴. کای دو

سوالات تشریحی

۱.۶۴ نمره

۱- برای تابع چگالی توام $f(x, y) = \begin{cases} 2 & x, y > 0 \quad x + y < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ مقدار $E(x|y)$ را بیابید؟

۱.۰۹ نمره

۲- اگر متغیر X دارای توزیع بتا باشد، توزیع $y = -\log x$ را بیابید؟

۱.۰۹ نمره

۳- قضیه حد مرکزی را تنها بیان نمایید؟ (اثبات لازم نیست)

۱.۰۹ نمره

۴- نشان دهید $\bar{x}$ و s^2 مستقل هستند؟

۱.۰۹ نمره

۵- برای توزیع زیر، تابع چگالی سومین آماره ترتیبی را بیابید؟

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x^2 & 0 < x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

سوال	نمبر	جواب صحیح
۱	ب	
۲	الف	
۳	الف	
۴	ب	
۵	ج	
۶	الف	
۷	ج	
۸	الف	
۹	ج	
۱۰	الف	
۱۱	د	
۱۲	ب	
۱۳	الف	
۱۴	ب	
۱۵	ج	
۱۶	د	
۱۷	ب	
۱۸	ج	
۱۹	الف	
۲۰	د	
۲۱	ب	
۲۲	د	
۲۳	ج	
۲۴	الف	
۲۵	ج	