عنـــوان درس: روشهای چند متغیره پیوسته 1

استفاده از ماشین حساب مهندسی مجاز است

۱- اگر X و Y متغیرهای تصادفی مستقل با تابع چگالی و با تابع توزیع مشترک $g(t)$ و $G(t)$ باشند آنگاه تابع چگالی $U = \min(X, Y)$ کدام گزینه است؟

۱. $۱ - G(u)$
۲. $۲(۱ - G(u))$
۳. $۲g(u)$
۴. $۲g(u)(۱ - G(u))$

۲- اگر X و Y متغیرهای تصادفی مستقل با تابع چگالی و با تابع توزیع مشترک $g(t)$ و $G(t)$ باشند آنگاه تابع چگالی $Z = \max(X, Y)$ کدام گزینه است؟

۱. $۱ - G(z)$
۲. $۲g(z)G(z)$
۳. $۱ - g(z)$
۴. $۲(۱ - g(z))(۱ - G(z))$

۳- برای ماتریس $\Sigma = \begin{bmatrix} ۴ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۹ & -۳ \\ ۲ & -۳ & ۲۵ \end{bmatrix}$ ماتریس همبستگی ρ کدام گزینه است؟

۱. $\rho = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰.۸ \\ ۰ & ۱ & -\frac{۱}{۵} \\ ۰.۸ & -\frac{۱}{۵} & ۱ \end{bmatrix}$

۲. $\rho = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & \frac{۱}{۵} \\ ۰ & ۱ & -\frac{۱}{۵} \\ \frac{۱}{۵} & -\frac{۱}{۵} & ۱ \end{bmatrix}$

۳. $\rho = \begin{bmatrix} ۱ & \frac{۱}{۶} & \frac{۱}{۵} \\ \frac{۱}{۶} & ۱ & -\frac{۱}{۵} \\ \frac{۱}{۵} & -\frac{۱}{۵} & ۱ \end{bmatrix}$

۴. $\rho = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & \frac{۱}{۵} \\ ۰ & ۱ & \frac{۱}{۵} \\ \frac{۱}{۵} & \frac{۱}{۵} & ۱ \end{bmatrix}$

۴- اگر $E(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \end{pmatrix}$ و $\Sigma = \begin{bmatrix} ۴ & ۲ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}$ باشند. آنگاه $E(\mathbf{XX}')$ کدام گزینه است؟

۱. $\begin{bmatrix} ۵ & ۴ \\ ۴ & ۱۰ \end{bmatrix}$
۲. $\begin{bmatrix} ۵ & ۴ \\ ۴ & ۸ \end{bmatrix}$
۳. $\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۴ & ۱۵ \end{bmatrix}$
۴. $\begin{bmatrix} ۲ & ۶ \\ ۶ & ۱۵ \end{bmatrix}$

۵- اگر $E(\mathbf{X})=\begin{pmatrix}۱\\۲\end{pmatrix}$ و $\Sigma=\begin{bmatrix}۴ & ۲\\ ۲ & ۴\end{bmatrix}$ باشند. آنگاه مقدار $E(\mathbf{X}'\mathbf{X})$ کدام گزینه است؟

۱. ۱۵ ۲. ۲۵ ۳. ۱۳ ۴. ۵۵

۶- فرض کنید $\mathbf{X}=(X_۱,X_۲,X_۳)'\sim N_۳(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})$ و $\boldsymbol{\Sigma}=\begin{bmatrix}۴ & ۲ & ۰\\ ۲ & ۴ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۴\end{bmatrix}$ باشند. کدام گزینه درست است؟

۱. $X_۱$ و $X_۳$ مستقلند.
۲. $X_۲$ و $X_۳$ مستقلند.
۳. هر سه متغیر مستقلند.
۴. $X_۳$ از $X_۱$ و $X_۲$ مستقل است.

۷- اگر $\mathbf{X_1}=(X_۱,X_۳)'$ و $\mathbf{X}_۲=(X_۲,X_۴)'$ و $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{X}_۱|\mathbf{X}_۲}=\begin{bmatrix}\frac{۱۹}{۶} & \frac{۱}{۳}\\ \frac{۱}{۳} & \frac{۱۱}{۳}\end{bmatrix}$ باشند. مقدار $\mathrm{Var}(X_۱+X_۳\,|\,X_۲=X_۴=۰)$ چیست؟

۱. $\frac{۴۵}{۶}$ ۲. $\frac{۲۷}{۱۷}$ ۳. $\frac{۱۱}{۳}$ ۴. $\frac{۱۹}{۶}$

۸- اگر $\mathbf{X_1}=(X_۱,X_۳)'$ و $\mathbf{X}_۲=(X_۲,X_۴)'$ و $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{X}_۱|\mathbf{X}_۲}=\begin{bmatrix}\frac{۱۹}{۶} & \frac{۱}{۳}\\ \frac{۱}{۳} & \frac{۱۱}{۳}\end{bmatrix}$ و $E(\mathbf{X}_۱\,|\,\mathbf{X}_۲=\mathbf{x}_۲)=\begin{bmatrix}\frac{۳x_۴-۲x_۲+۹}{۶}\\ \frac{۱۲-۲x_۲}{۳}\end{bmatrix}$ باشند. مقدار $E(X_۱X_۳\,|\,X_۲=X_۴=۰)$ چیست؟

۱. $\frac{۱۱}{۳}$ ۲. $\frac{۱۹}{۳}$ ۳. $\frac{۱۹}{۱۷}$ ۴. $\frac{۱}{۳}$

۹- اگر $\mathbf{X}=(X_1,X_2)' \sim N_2(\mathbf{0},\mathbf{\Sigma})$ و $\mathbf{\Sigma}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ باشند. آنگاه توزیع $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2-X_1 \end{pmatrix}$ چیست؟

۱. $N_2(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},2\mathbf{I}_2)$ ۲. $N_2(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\mathbf{I}_2)$ ۳. $N_2(\mathbf{0},\mathbf{I}_2)$ ۴. $N_2(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\mathbf{I}_2)$

۱۰- اگر $\mathbf{X} \sim N_{10}(\boldsymbol{\mu},\mathbf{I}_{10})$ و $\mathbf{A}$ یک ماتریس خودتوان با رتبه ۵ باشد. آن‌گاه توزیع $\dfrac{\mathbf{X}'(\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{X}}{\mathbf{X}'\mathbf{A}\mathbf{X}}$ چیست؟

۱. تی استودنت ۲. گاما ۳. نرمال ۴. فیشر

۱۱- فرض کنید $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim N_2(\boldsymbol{\mu},\mathbf{\Sigma})$ به‌طوری‌که $\boldsymbol{\mu}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ و $\mathbf{\Sigma}=diag\,(2,5)$ باشد. مقدار $\mathrm{Var}(X_1X_2)$ چیست؟

۱. ۱۰ ۲. ۴۵ ۳. ۲۰ ۴. ۳۳

۱۲- اگر $\mathbf{X} \sim N_4(\boldsymbol{\mu},\mathbf{I}_4)$ باشد. آنگاه توزیع $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ چیست؟

۱. فیشر نامرکزی ۲. کای اسکور نامرکزی ۳. فیشر مرکزی ۴. نرمال

۱۳- اگر $\mathbf{X} \sim N_4(\boldsymbol{\mu},\mathbf{I}_4)$ باشد. به‌طوری‌که $\boldsymbol{\mu}=(2,3,1,6)'$. آنگاه مقدار عددی پارامتر نامرکزیت توزیع $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ چیست؟

۱. ۳۰ ۲. ۲۷ ۳. ۵۳ ۴. ۱۷

۱۴- اگر $\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu},\mathbf{\Sigma})$ و $\mathbf{\Sigma}>\mathbf{0}$ و $\mathbf{X}'\mathbf{A}\mathbf{X}$ دارای توزیع کای اسکور با ۶ درجه آزادی باشند. آنگاه $\mathrm{rank}(\mathbf{A}\mathbf{\Sigma})$ چیست؟

۱. ۶ ۲. ۷ ۳. ۵ ۴. ۴

۱۵- اگر $\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu},\mathbf{\Sigma})$ و $\mathbf{X}'\mathbf{A}_1\mathbf{X}$ و $\mathbf{X}'\mathbf{A}_2\mathbf{X}$ مستقل باشند. آنگاه کدام گزینه درست است؟

۱. $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2=\mathbf{0}$ ۲. $\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2=\mathbf{0}$ ۳. $\mathbf{A}_1-\mathbf{A}_2=\mathbf{0}$ ۴. $\mathbf{A}_1=\mathbf{A}_2$

۱۶- اگر $\mathbf{X}$ یک بردار تصادفی ۶ بعدی با بردار میانگین $\boldsymbol{\mu} = \mu\mathbf{L}$ و $\boldsymbol{\Sigma} = ۴\mathbf{I}_۶$ باشد با فرض $\mathbf{A} = \mathbf{I}_۶ - \frac{۱}{۶}\mathbf{L}\mathbf{L}'$ امید ریاضی $\mathbf{X}'\mathbf{A}\mathbf{X}$ چند است؟

۱. ۷ ۲. ۶ ۳. $\frac{۱}{۲۴}$ ۴. $\frac{۱}{۱۷}$

۱۷- اگر ماتریس کوواریانس نمونه‌ای به صورت زیر باشد با فرض $\boldsymbol{\Sigma} = \sigma^۲[(۱-\rho)\mathbf{I}_p + \rho\mathbf{L}\mathbf{L}']$ برآورد درستنمایی ماکسیمم $\sigma^۲$ چیست؟($\mathbf{L}$ برداری با مولفه های یک است.)

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} ۷.۸۲ & ۷.۹۲ & ۷.۹۳ \\ ۷.۹۲ & ۹.۳۸ & ۸.۸۷ \\ ۷.۹۳ & ۸.۸۷ & ۹.۷۹ \end{bmatrix}$$

۱. ۱۷ ۲. ۱۰ ۳. ۱۸ ۴. ۹

۱۸- اگر ماتریس کوواریانس نمونه‌ای به صورت زیر باشد. با فرض $\boldsymbol{\Sigma} = \sigma^۲[(۱-\rho)\mathbf{I}_p + \rho\mathbf{L}\mathbf{L}']$ برآورد درستنمایی ماکسیمم ρ برابر با کدام گزینه است؟($\mathbf{L}$ برداری با مولفه‌های یک است.)

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} ۷/۸۲ & ۷/۹۲ & ۷/۹۳ \\ ۷/۹۲ & ۹/۳۸ & ۸/۸۷ \\ ۷/۹۳ & ۸/۸۷ & ۹/۷۹ \end{bmatrix}$$

۱. ۰/۶۵۴ ۲. ۰/۹۱۸ ۳. ۰/۲۳۶ ۴. ۰/۷۶۴

۱۹- اگر $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۴ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۶ \end{bmatrix}$ باشد. آنگاه مقدار $\rho^۲_{۱.۲۳}$ برابر با کدام گزینه است؟

۱. $\frac{۴}{۲۳}$ ۲. $\frac{۵}{۱۸}$ ۳. $\frac{۲۱}{۵۱}$ ۴. $\frac{۳}{۵}$

۲۰- اندازه وابستگی دو مجموعه از متغیرهای تصادفی چه نام دارد؟

۱. ضریب همبستگی جزیی
۲. ضریب همبستگی متعارف
۳. ضریب همبستگی چندگانه
۴. ضریب همبستگی گشتاوری

۲۱- اگر $\mathbf{X}_1$ و $\mathbf{X}_2$ و $\mathbf{X}_3$ ، $\mathbf{X}_4$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع $N_2(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})$ باشد. با فرض $\bar{\mathbf{X}}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ و $\mathbf{S}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$ مقدار آماره آزمون فرض $H_0:\boldsymbol{\mu}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ چقدر است؟

۱. ۲۱۶ ۲. ۲۰۰ ۳. ۱۵۰ ۴. ۱۸۷

۲۲- برای $\boldsymbol{\Sigma}=16[\frac{3}{4}\mathbf{I}_4+\frac{1}{4}\mathbf{L}\mathbf{L}']$ بزرگترین مقدار ویژه کدام گزینه است؟

۱. ۱۰ ۲. ۱۲ ۳. ۳۲ ۴. ۲۸

۲۳- خاصیت آماره T^2 هتلینگ کدام است؟

۱. تحت تبدیلات غیر خطی پایا است.
۲. تحت تبدیلات خطی پایا است.
۳. تحت تبدیلات درجه ی دوم پایا است.
۴. تحت تبدیلات ریشه ی دوم پایا است.

۲۴- کدام گزینه در باره ی ماتریس SStr صحیح نیست؟

۱. SStr یک ماتریس معین غیر منفی است
۲. SStr متقارن است
۳. SStr یک ماتریس با دترمینان مثبت است
۴. بعد SStr همواره p است.

۲۵- در آزمون $H_0:\Sigma=I$ مقدار آماره آزمون به چه کمیت هایی بستگی دارد؟

۱. دترمینان S
۲. اثر S
۳. دترمینان و اثر S
۴. وارون S

سوالات تشریحی

۱- بر اساس یک نمونه تصادفی ۲۰ تایی از توزیع $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$ که توزیع نرمال سه متغیره دارد، بردار میانگین و ۱،۲۰ نمره

ماتریس کواریانس نمونه‌ای به صورت

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

به دست آمده‌اند، فرض $H_0 : \begin{cases} \mu_1 + \mu_2 = 2\mu_3 \\ \mu_3 - 2\mu_1 - \mu_2 = 0 \end{cases}$ را در سطح پنج درصد آزمون کنید.

$$F = \frac{n-p}{p(n-1)} T^2 \quad F_{3,18,0.05} = 2.42 \quad F_{2,18,0.05} = 2.62$$

۲- ۱،۲۰ نمره

فرض کنید $X' = (X_1 X_2 X_3 X_4 X_5)$ توزیع $N_5(\mu, \sum)$ با ماتریس کواریانس $\sum = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ دارد، مقدار

$\rho_{35.124}$ را به دست آورید.

۳- اگر $\mathbf{X} \sim N_{۳}(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ به‌طوری‌که $\boldsymbol{\mu} = (۵,۶,۷,۸)'$ و $\Sigma = diag\,(۲,۳,۴,۹)$ باشند آنگاه توزیع ۱،۲۰ نمره

$\begin{pmatrix} x_{۱} \\ x_{۴} \end{pmatrix}$ به شرط $x_{۳}$ را بیابید.

۴- برآوردهای درستنمایی ماکسیمم بردار میانگین $\boldsymbol{\mu}$ و ماتریس کوواریانس $\sum$ را بر مبنای نمونه تصادفی زیر به ۱،۲۰ نمره

دست آورید.

$$< \mathbf{X} > = \begin{pmatrix} ۳ & ۴ & ۵ & ۴ \\ ۶ & ۴ & ۷ & ۷ \end{pmatrix}$$

۵- برای هر ماتریس مربعی A ثابت کنید $E(X'AX) = tr(A\sum) + \mu' A \mu$ ۱،۲۰ نمره

پاسخ صحیح	شماره سوال
د	1
ب	2
ج	3
ب	4
ج	5
د	6
الف	7
ب	8
ج	9
د	10
د	11
ب	12
ج	13
الف	14
الف	15
ج	16
د	17
ب	18
الف	19
ب	20
الف	21
د	22
ب	23
ج	24
ج	25

استفاده از ماشین حساب ساده مجاز است

۱- در این درس، ماتریس کوواریانس Σ ، یک ماتریس ..... است.

۱. معین مثبت ۲. نیمه معین مثبت ۳. معین منفی ۴. نیمه معین منفی

۲- فرض کنید بردار تصادفی X دارای تابع مولد گشتاور $M_X(t)$ باشد. در این صورت تابع مولد گشتاور $Y = AX + B$ کدام گزینه است؟

۱. $e^{-t'A}M_X(At)$ ۲. $e^{-t'B}M_X(Bt)$ ۳. $e^{t'A}M_X(At)$ ۴. $e^{t'B}M_X(Bt)$

۳- فرض کنید بردار تصادفی X دارای $E(X) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ و $\Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ باشد. در این صورت مقدار $E(X'X)$ کدام گزینه است؟

۱. 3 ۲. 10 ۳. 13 ۴. 15

۴- تابع چگالی بردار $Y = PX$ بر حسب تابع چگالی بردار X و ماتریس متعامد p کدام گزینه است؟

۱. $f_Y(y) = P'f_X(y)$ ۲. $f_Y(y) = f_X(P'y)$ ۳. $f_Y(y) = f_{P'X}(y)$ ۴. $f_Y(y) = P'f_X(P'y)$

۵- کدام گزینه مقدار اثر ماتریس همبستگی $p \times p$ است؟

۱. صفر ۲. یک ۳. p ۴. p^2

۶- فرض کنید بردار تصادفی X دارای تابع مولد $M_x(t) = |\mathrm{I} - t't|^{-\frac{n}{2}}$ باشد. در این صورت، تابع مولد $Y = AX + b$ کدام گزینه است؟

۱. $M_x(t) = e^{t'b}|\mathrm{I} - \mathrm{A}'t\,t'A|^{\frac{n}{2}}$ ۲. $M_x(t) = e^{\frac{n}{2}t'b}|\mathrm{I} - tAA't'|^{\frac{n}{2}}$

۳. $M_x(t) = |\mathrm{I} - \mathrm{A}'t't\mathrm{A}|^{\frac{n}{2}}$ ۴. باید روی ماتریس بحث کرد.

۷- فرض کنید $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} \sim N_4\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}\right)$ باشد. در این صورت توزیع $\begin{pmatrix} X_2 \\ X_4 \end{pmatrix}$ کدام گزینه است؟

۱. $\begin{pmatrix} X_2 \\ X_4 \end{pmatrix} \sim N_2\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right)$

۲. $\begin{pmatrix} X_2 \\ X_4 \end{pmatrix} \sim N_2\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}\right)$

۳. $\begin{pmatrix} X_2 \\ X_4 \end{pmatrix} \sim N_2\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\right)$

۴. $\begin{pmatrix} X_2 \\ X_4 \end{pmatrix} \sim N_2\left(\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}\right)$

۸- فرض کنید $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} \sim N_4\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}\right)$ باشد. در این صورت توزیع $X_1 - X_4$ کدام گزینه است؟

۱. $N(-13\,,11)$

۲. $N(13\,,11)$

۳. $N(-3\,,11)$

۴. $N(-3\,,18)$

۹- اگر $X \sim N_p(\mu, \mathrm{I}_p)$ و Λ یک ماتریس متعامد باشد. در این صورت، AX دارای کدام ویژگی است؟

۱. AX از X مستقل است.

۲. AX دارای ماتریس کواریانس I است.

۳. AX هم توزیع X است.

۴. AX دارای بردار میانگین μ است.

۱۰- اگر $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \sim N_3\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}\right)$ باشد، مقدار $\mathrm{var}(X_1 + X_3 | X_2 = x_2)$ کدام گزینه است؟

۱. $\frac{33}{3}$

۲. $\frac{x_2 + 16}{3}$

۳. $\frac{32}{3}$

۴. 8

۱۱- اگر تابع مولد گشتاورهای متغیرهای تصادفی X_1 و X_2 برابر با $M(t_1, t_2) = e^{t_1 + t_1^2 + t_2^2}$ باشد. در این صورت توزیع $2X_1 + X_2$ کدام گزینه است؟

۱. $N(2\,,8)$

۲. $N(1\,,6)$

۳. $N(2\,,10)$

۴. $N(1\,,8)$

۱۲- در بردار تصادفی X با توزیع احتمال $N_p(\mu,\Sigma)$ کدام گزینه برقرار است؟

۱. $E(X'AX)=tr\Sigma A$

۲. $E(X'X)=\Sigma+\mu'\mu$

۳. $E(X'X)=\Sigma$

۴. گزینه 1 و 2 صحیح است.

۱۳- اگر $X=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}\sim N_2\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4&1\\1&16\end{pmatrix}\right)$ باشد، مقدار $E(X_1|X_2=4)$ کدام گزینه است؟

۱. $\frac{7}{8}$

۲. $\frac{9}{8}$

۳. $\frac{8}{9}$

۴. 8

۱۴- تابع درجه دوم $X'AX$ تحت کدام گزینه دارای توزیع احتمال کای اسکور است؟

۱. A متقارن

۲. X دارای توزیع نرمال

۳. A خودتوان

۴. همه موارد

۱۵- فرض کنید $X\sim N_2(o\ ,\ \mathrm{I}_2)$ و $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ باشد. در این صورت توزیع $X'AX$ کدام است؟

۱. $\chi^2_{(1)}$

۲. $\chi^2_{(2)}$

۳. $W(AA')$

۴. T^2 هتلینگ

۱۶- فرض کنید $\Sigma=\sigma^2\begin{pmatrix}\rho&1\\1&\rho\end{pmatrix}$ و $S=\begin{pmatrix}S_{11}&S_{12}\\S_{21}&S_{22}\end{pmatrix}$ باشد. در این صورت برآورد درستنمایی ماکسیمم σ^2 کدام است؟

۱. $\frac{S_{11}+S_{22}}{2}$

۲. $S_{11}+S_{22}$

۳. $\frac{S_{11}S_{22}}{2}$

۴. $S_{11}S_{22}$

۱۷- فرض کنید نمونه تصادفی $X_1,X_2,\dots,X_n$ به اندازه n دارای توزیع احتمال $N_p(\mu,\Sigma)$ باشد. توزیع آماره بسنده $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})(X_i-\bar{X})'$ کدام گزینه است؟

۱. ویشارت با $n-1$ درجه آزادی

۲. خی دو با n درجه آزادی

۳. خی دو n با درجه آزادی

۴. ویشارت با $n-1$ درجه آزادی

۱۸- اگر $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ و $x_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ نمونه ای تصادفی از توزیع $N_2(\mu, \Sigma)$ باشند. برآورد درستنمائی ماکسیمم Σ کدام گزینه است؟

۱. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ۲. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ۳. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ۴. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

۱۹- توزیع آماره آزمون $\rho_{3.14} = 0$ در یک نمونه 10 تایی در فضای 4 بعدی کدام گزینه است؟

۱. $N(0, \frac{1}{3})$ ۲. $F_{(3,6)}$ ۳. $N(0, \frac{1}{\sqrt{7}})$ ۴. $F_{(2,7)}$

۲۰- فرض کنید ماتریس کوواریانس نمونه به اندازه n از $x' = (x_1, x_2, x_3)$ به صورت $S = \begin{pmatrix} 4 & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$ و $s_{12}s_{22}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ باشند، مقدار $r_{1.23}$ کدام گزینه است؟

۱. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲. $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ ۳. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۴. $\frac{1}{2}$

۲۱- اندازه همبستگی بین دو مجموعه از متغیرهای تصادفی کدام گزینه است؟

۱. همبستگی متعارف ۲. همبستگی چندگانه ۳. همبستگی ساده ۴. همبستگی جزئی

۲۲- مشاهدات $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ از توزیع $N_2\left(\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \Sigma\right)$ به‌دست آمده است. مقدار T^2 برای آزمون $H_0 : \mu = 0$ کدام گزینه است؟

۱. 0/063 ۲. 0/078 ۳. 0/1875 ۴. 3/06

۲۳- در یک جامعه نرمال، برای آزمودن بردار میانگین در حالت چندمتغیره، اگر ماتریس کوواریانس معلوم باشد توزیع آماره آزمون کدام است؟

۱. نرمال ۲. توزیع F ۳. T^2 هتلینگ ۴. کای اسکور

۲۴- متغیر $5\left(\frac{1-\sqrt{U_{2,4,6}}}{4\sqrt{U_{2,4,6}}}\right)$ دارای کدام توزیع احتمال است؟

۱. $F_{(4,8)}$ ۲. $F_{(8,10)}$ ۳. $F_{(5,4)}$ ۴. $F_{(4,12)}$

۲۵- کدام گزینه درباره ماتریس $SStr$ صحیح است؟

۱. $SStr$ یک ماتریس معین غیر منفی است.
۲. $SStr$ متقارن است.
۳. بعد $SStr$ همواره p است.
۴. همه موارد

سوالات تشریحی

۱- فرض کنید $X \sim N_p(o, \mathrm{I}_p)$ باشد. ثابت کنید تابع مولد گشتاورهای X به صورت $M_X(t) = e^{\frac{1}{2}t't}$ است. ۱،۲۰ نمره

۲- فرض کنید $x_1, x_2, \ldots, x_n$ یک نمونه تصادفی از جامعه نرمال با میانگین μ و ماتریس کوواریانس Σ باشد. برآورد درستنمایی ماکسیمم μ و Σ را به‌دست آورید. ۱،۲۰ نمره

۳- ماتریس کوواریانس افراز شده با ماتریس‌های زیرا در نظر بگیرید. مقادیر همبستگی کانونی ρ_1, ρ_2 را محاسبه کنید. ۱،۲۰ نمره

$$\Sigma_{11} = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \text{ و } \Sigma_{22} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \text{ و } \Sigma_{12} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

۴- برای آزمودن فرض $H_0 : \mu' = (7,11)$ با استفاده از داده‌های $x = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 6 & 8 \\ 12 & 9 & 9 & 10 \end{bmatrix}$، مقدار T^2 را محاسبه نمائید و توزیع T^2 را مشخص کنید. ۱،۲۰ نمره

۵- فرض کنید S_p ماتریس کوواریانس آمیخته از کوواریانس‌های نمونه‌های مستقل دو جامعه نرمال با ماتریس کوواریانس مشترک،یک برآورد برای Σ در حالت دومتغیره باشد. ثابت کنید : $E(S_p) = \Sigma$ ۱،۲۰ نمره

شماره سوال	پاسخ صحیح
1	الف
2	ج
3	د
4	ب
5	ج
6	الف
7	د
8	ج
9	ب
10	ج
11	ج
12	ب
13	ب
14	د
15	الف
16	الف
17	الف
18	ج
19	ب
20	د
21	الف
22	ب
23	د
24	ب
25	د

۱- اگر $\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \sim N_2(\begin{bmatrix} \mu \\ 2\mu \end{bmatrix} و \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix})$ آنگاه توزیع X_1+X_2 کدام گزینه است؟

۱. $N(3\mu,1)$ ۲. $N(3\mu,2)$ ۳. $N(0,2\mu)$ ۴. $N(1-\mu,2)$

۲- فرض کنید X_1 و X_2 مولفه‌های مستقل بردار تصادفی X باشند و $Y_1=2X_1+X_2$ و $Y_2=X_1+2X_2$ آنگاه ژاکوبی تبدیل برابر با کدام گزینه است؟

۱. 3 ۲. صفر ۳. 0/5 ۴. 4

۳- کدام گزینه نادرست است؟

۱. $E(tr(M))=tr(E(M))$ ۲. $E(M')=E(M)'$

۳. ماتریس کواریانس، ماتریسی متقارن است. ۴. مقادیر ویژه ماتریس همبستگی، ممکن است منفی شود.

۴- اگر $\Sigma=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ و $\mu=\begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix}$ آنگاه کدام گزینه برابر با $E(XX')$ است؟

۱. $\begin{bmatrix} 1/01 & -0/98 \\ -0/98 & 1/04 \end{bmatrix}$ ۲. $\begin{bmatrix} 1.01 & 1.02 \\ -0.98 & 1.04 \end{bmatrix}$ ۳. $\begin{bmatrix} 0/01 & 0/02 \\ 0/02 & 0/04 \end{bmatrix}$ ۴. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

۵- اگر $Y=a'X=a_1X_1+...+a_pX_p$، کدام گزینه نادرست است؟

۱. $E(Y)=a'\mu$ ۲. $V(Y)=a'\Sigma a$ ۳. $V(Y)=\Sigma+\mu\mu'$ ۴. $tr(V(Y))=V(Y)$

۶- فرض کنید X_1 و X_2 متغیرهای تصادفی به ترتیب با میانگین‌های μ_1 و μ_2 و واریانس یکسان σ^2 باشند. اگر $Y=\begin{bmatrix} X_1+X_2 \\ X_1-X_2 \end{bmatrix}$ آنگاه کدام گزینه برقرار است؟

۱. $E(Y)=\begin{bmatrix} 2\mu_1+\mu_2 \\ 2\mu_1-\mu_2 \end{bmatrix}$ ۲. مولفه‌های Y ناهمبسته خواهد شد.

۳. ماتریس کوواریانس Y قطری نمی‌شود. ۴. بردار Y هم‌توزیع بردار X است.

۷- کدام گزینه فرمول محاسباتی ماتریس کواریانس نمونه (S_n) را نشان می‌دهد؟

۱. $\frac{1}{n}XL$

۲. $\frac{\Sigma}{n}$

۳. $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)(X_i-\mu)'+n(\bar{X}-\mu)(\bar{X}-\mu)'$

۴. $\frac{1}{n}X(I-\frac{1}{n}LL')X'$

۸- اگر $E(X)=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ و $\Sigma=\begin{bmatrix}4 & 2\\2 & 6\end{bmatrix}$ آنگاه مقدار $E(X\acute{X})$ برابر با کدام گزینه است؟

۱. 15

۲. 3

۳. 10

۴. 13

۹- اگر تبدیل $X=\mu+BZ$ را روی بردار p-متغیره نرمال استاندارد اعمال کنیم، به طوریکه در آن Bماتریس مربعی وارون‌پذیر و μ برداری از ثابت‌های حقیقی باشد. دترمینان ژاکوبی این تبدیل برابر است با:

۱. $|B|^2$

۲. $|B|$

۳. $\frac{1}{|B|}$

۴. $\frac{1}{|B|^2}$

۱۰- کدام گزینه تابع مولد گشتاور توزیع نرمال استاندارد p-متغیره را نشان می‌دهد؟

۱. $e^{\frac{t'\Sigma t}{2}}$

۲. $e^{\frac{t'\mu+t'\Sigma t}{2}}$

۳. $e^{\frac{t'\mu+t't}{2}}$

۴. $e^{\frac{t't}{2}}$

۱۱- فرض کنید $X\sim N_p(\mu,I_p)$ و A یک ماتریس متعامد باشد، AX دارای کدام ویژگی است؟

۱. AX دارای بردار میانگین μ است.

۲. AX دارای ماتریس کواریانس I است.

۳. AX هم توزیع X است.

۴. AX از X مستقل است.

۱۲- اگر $X_1,...,X_n$ یک نمونه تصادفی از $N_p(\mu,\Sigma)$ باشد، برآورد درستنمایی ماکزیمم برای Σ عبارت است از:

۱. $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})(X_i-\bar{X})'$

۲. $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})(X_i-\bar{X})'$

۳. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})(X_i-\bar{X})'$

۴. $\frac{n-1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})(X_i-\bar{X})'$

۱۳- اگر $X \sim N_p(\mu,\Sigma)$ آنگاه :

۱. $\bar{X} \sim N_p(\mu,\Sigma)$

۲. $X-\mu \sim N_p(\mu,\Sigma)$

۳. $(X-\mu)\Sigma(X-\mu)\chi_p^2$

۴. $\Sigma^{\frac{-1}{2}}(X-\mu) \sim N_p(0,I)$

۱۴- اگر $X \sim N_p(0,\Sigma)$ به طوریکه $\Sigma=\begin{bmatrix}4&1&1&1\\1&4&1&1\\1&1&4&1\\1&1&1&4\end{bmatrix}$. مقدار ضریب همبستگی جزیی $\rho_{12.34}$ برابر با کدام گزینه است؟

۱. $\frac{3}{5}$

۲. $\frac{1}{6}$

۳. $\frac{1}{5}$

۴. $\frac{1}{9}$

۱۵- هدف از همبستگی چندگانه بین X_1 و X_2 چیست؟

۱. مجموع همبستگی‌ها بین X_1 و تک تک مولفه‌های X_2

۲. ماکسیمم قدرمطلق ضریب همبستگی بین ترکیب خطی X_1 و ترکیب خطی X_2

۳. همبستگی بین X_1 و هر ترکیب خطی از X_2

۴. ضریب همبستگی بین X_1 و یک ترکیب خطی خاص از X_2

۱۶- فرض کنید که $X \sim N_2(0,I_2)$ و $A_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{-1}{2}\\\frac{-1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$ و $A_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$ آنگاه :

۱. $tr(A_1)\neq tr(A_2)$

۲. $X'A_1X$ دارای توزیع کای دو با درجه آزادی 2 است.

۳. $X'A_1X$ و $X'A_2X$ مستقلند.

۴. $X'A_2X$ دارای توزیع کای دو با درجه آزادی 2 است.

۱۷- اگر $\Sigma=\sigma^2\begin{bmatrix}1&\rho\\\rho&1\end{bmatrix}$ و ماتریس کواریانس نمونه‌ای $S=\begin{bmatrix}7&7\\7&9\end{bmatrix}$ باشد. آنگاه برآورد درستنمایی ماکزیمم پارامتر مجهول σ^2 برابر با کدام گزینه است؟

۱. $\frac{7}{8}$

۲. 8

۳. 7

۴. $\frac{7}{16}$

۱۸- مشاهدات $\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}-4\\2\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}3\\-4\end{bmatrix}$ از توزیع $N_2(\mu,\Sigma)$ به دست آمده‌اند. در این‌صورت برای آزمون فرضیه $H_0:\mu=0$، مقدار آماره T^2 هتلینگ برابر با کدام گزینه است؟

۱. 0/1875 ۲. 3/06 ۳. 0/063 ۴. 0/078

۱۹- اندازه وابستگی دو مجموعه از متغیرهای تصادفی ..... است.

۱. همبستگی چندگانه ۲. همبستگی ساده ۳. همبستگی جزیی ۴. همبستگی متعارف

۲۰- کدام گزینه درست است؟

۱. T^2 هتلینگ تحت تبدیلات خطی پایا نیست.

۲. در مدل کوواریانس بین طبقه‌ای $\hat{\sigma}^2 = \frac{trS}{\sqrt{P}}$

۳. SS_{tr} ماتریسی با دترمینان مثبت است.

۴. طول بازه‌های اطمینان بونفرونی از طول بازه‌های اطمینان T^2 کوتاهتر است.

۲۱- فرض کنید 4 نوع برنج در 20 کرت کاشته می‌شود به طوریکه هر نوع برنج به طور تصادفی به پنج کرت اختصاص داده می‌شود. در این‌صورت برای آزمون برابری میانگین‌های چهار نوع برنج، درجه آزادی خطا منهای درجه آزادی تیمار برابر است با:

۱. 16 ۲. 3 ۳. 13 ۴. 19

۲۲- در آزمون کولموگروف با بزرگ شدن آماره در کدام گزینه، فرضیه نرمال بودن رد می‌شود؟

۱. $\sum(X_i-\bar{X})^2$ ۲. $SUP\,|F_n(x)-F_H(x)|$

۳. $\frac{1}{2}Ln\frac{1+r}{1-r}$ ۴. $\phi^{-1}\left(\frac{i+\frac{3}{8}}{n+\frac{1}{4}}\right)$

۲۳- با فرض $S=\begin{bmatrix}2&2\\2&3\end{bmatrix}$، برای یک نمونه تصادفی 8 تایی، مقدار آماره آزمون برای فرضیه $H_0:\Sigma=\sigma^2 I$ برابر با کدام گزینه است؟

۱. 6/83 ۲. -1/139 ۳. 23/61 ۴. 0/326

۲۴-
فرض کنید $X \sim N_3(\mu,\Sigma)$ و $\Sigma=\begin{bmatrix}4 & 5 & 0\\ 2 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$، آنگاه کدام یک از متغیرها از هم مستقل نیستند؟

۱. X_1 و X_3 ۲. X_2 و X_3 ۳. X_1 و X_2 ۴. 1 و 2

۲۵- کدام گزینه، برآورد کشیدگی متغیر تصادفی X را آشکار می‌کند؟

۱. $\phi^{-1}=(\frac{i-0.5}{n})$ ۲. $\frac{n\Sigma(X_i-\bar{X})^4}{(\Sigma(X_i-\bar{X})^2)^2}$ ۳. $\phi^{-1}=(\frac{i+\frac{3}{8}}{n+\frac{1}{4}})$ ۴. $\frac{n(\Sigma(X_i-\bar{X})^3)^2}{(\Sigma(X_i-\bar{X})^2)^3}$

سوالات تشریحی

۱- ثابت کنید $E(X'AX)=tr(A\Sigma)+\mu'A\mu$ که در آن $E(X)=\mu$ و $Cov(X)=\Sigma$. ۱،۲۰ نمره

۲- اگر $\begin{bmatrix}X_1\\X_2\end{bmatrix}\sim N_2(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{bmatrix})$، مطلوبست توزیع X_1 به شرط $X_1+X_2=y$. ۱،۲۰ نمره

۳- ثابت کنید اگر $X \sim N_p(\mu,I_p)$، آنگاه $X'A_1X$ و $X'A_2X$ مستقلند اگر و تنها اگر $A_1A_2=0$. ۱،۲۰ نمره

۴- اگر $X \sim N_3(\mu,\Sigma)$ و $\mu=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ و $\Sigma=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\1 & 4 & 1\\1 & 1 & 6\end{bmatrix}$ آنگاه مقدار $E(X_1+X_2|X_2+X_3=2)$ را به دست آورید. ۱،۲۰ نمره

۵- بر اساس نمونه‌ای تصادفی به اندازه 25، ماتریس کوواریانس به صورت زیر به دست آمده است. مطلوبست: ۱،۲۰ نمره

$$S=\begin{bmatrix}7 & 4 & -1\\4 & 6 & 2\\-1 & 2 & 9\end{bmatrix}$$

الف: مقدار آماره F برای فرضیه $H_0:\rho_{1.23}=0$

ب :مطلوبست $\rho^2_{1.23}$

۱- کدام گزینه نادرست است؟

۱. $E\left[AX+B\right]=A\,E\left[X\right]+B$

۲. $E\left[tr\left(M'\right)\right]=tr\left(E\left[M'\right]\right)$

۳. $E\left[CM+D\right]=ME\left[C\right]+D$

۴. $E\left[M'\right]=E\left[M\right]'$

۲- فرض کنید متغیرهای تصادفی مستقل X_1 و X_2 مولفه‌های بردار تصادفی X باشند. اگر $Y_1=X_1+X_2$ و $Y_2=X_1-X_2$ باشند، قدرمطلق ژاکوبین تبدیل برابر با کدام گزینه است؟

۱. 1

۲. 0/5-

۳. 0/5

۴. صفر

۳- اگر $E\left(X\right)=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$ و $\Sigma=\begin{bmatrix}4&2\\2&6\end{bmatrix}$ باشد، کدام گزینه برابر با $E\left(X'X\right)$ است؟

۱. $\begin{bmatrix}4&1\\2&6\end{bmatrix}$

۲. 10

۳. 20

۴. $\begin{bmatrix}7&3\\11&9\end{bmatrix}$

۴- تحت چه شرایطی عبارت درجه دوم $X'AX$ دارای توزیع کای‌اسکور است؟

۱. A متقارن باشد.

۲. A خودتوان است.

۳. X دارای توزیع نرمال باشد.

۴. هر 3 مورد

۵- کدام گزینه برای کوواریانس نمونه‌ای بین مولفه‌ی اول و دوم درست است؟

۱. اگر با افزایش مولفه‌ی اول، مولفه‌ی دوم افزایش یابد آنگاه S_{12} منفی خواهد شد.

۲. اگر مولفه‌ی اول مستقل از مولفه‌ی دوم باشد آنگاه S_{12} صفر می‌شود.

۳. مقدار تقریباً صفر همبستگی بین دو متغیر را نشان می‌دهد.

۴. اگر با افزایش مولفه‌ی اول، مولفه‌ی دوم کاهش یابد آنگاه S_{12} منفی خواهد شد.

۶- اگر $X\sim N_p\left(o,\sigma^2\right)$ باشد آنگاه توزیع $X'X$ کدام گزینه است؟

۱. ویشارت با 1 درجه آزادی

۲. ویشارت با p درجه آزادی

۳. χ_p^2

۴. $t\left(p\right)$

۷- تابع مولد گشتاورها $X \sim N_p(\mu,\Sigma)$ برابر کدام گزینه است؟

۱. $M_X(t)=e^{-\frac{1}{2}t't}$ ۲. $M_X(t)=e^{t\mu+\frac{1}{2}t't}$ ۳. $M_X(t)=e^{t'\mu+\frac{1}{2}t'\Sigma t}$ ۴. $M_X(t)=e^{\frac{1}{2}t^2}$

۸- اگر $(X_1,X_2,X_3)' \sim N_3(\mu,\Sigma)$، $\mu=L$، $\Sigma=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&4&1\\1&1&6\end{bmatrix}$ باشند، آن‌گاه کدام گزینه توزیع $\frac{1}{3}(X_1+X_2+X_3)$ است؟

۱. $N_3\left(\mu,\frac{1}{3}\Sigma\right)$ ۲. $N(1,2)$ ۳. $N_3\left(\frac{1}{3}\mu,\frac{1}{9}\Sigma\right)$ ۴. $N(1,4)$

۹- اگر مولفه‌های بردار تصادفی دارای توزیع نرمال استاندار و مستقل باشند، آنگاه کدام گزینه برای توزیع شرطی درست است؟

۱. $[X_1 \mid X_2=x_2] \sim N(\rho x_2, 1-\rho^2)$ ۲. $[X_1 \mid X_2=x_2] \sim N(0,1)$

۳. $[X_1 \mid X_2=x_2] \sim N(\rho, \sigma_{11}(1-\rho^2))$ ۴. $[X_1 \mid X_2=x_2] \sim N(\rho x_1, \rho^2)$

۱۰- اگر $X \sim N_2(\mu,\sigma^2 I_2)$ و a و b بردارهایی با مؤلفه‌های اعداد ثابت باشند، آنگاه تحت چه شرطی مؤلفه‌های بردار تصادفی $Y=\begin{bmatrix}a'X\\b'X\end{bmatrix}$ از یکدیگر مستقل خواهند شد؟

۱. $ba=0$ ۲. $a'b=0$ ۳. $a=1$ ۴. $a'b'=1$

۱۱- اگر $X \sim N_p(O,\sigma^2 I_p)$ باشد، آن‌گاه $\frac{X'X}{\sigma^2}$ دارای چه توزیعی است؟

۱. χ^2_{p-1} ۲. ویشارت با یک درجه آزادی

۳. χ^2_p ۴. ویشارت با p درجه آزادی

۱۲- دو سری داده‌ی تصادفی به اندازه‌ی 8 از توزیع نرمال استاندارد انتخاب کرده‌ایم، مقدار ضریب همبستگی بین این دو سری $0/56$ به‌دست آمده است. فرض استقلال را آزمون کنید. (عدد جدول: $2/44$)

۱. فرض استقلال را نمی‌توان رد کرد. ۲. فرض استقلال رد می‌شود.

۳. نیاز به واریانس‌های دو متغیر است. ۴. باید شرط نرمال دومتغیره برقرار باشد.

۱۳- اگر $X=\begin{bmatrix}X_1\\X_2\end{bmatrix}\sim N_3\left(\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4&1\\1&16\end{bmatrix}\right)$ باشد آنگاه مقدار $E\left(X_1|X_2=4\right)$ کدام گزینه است؟

۱. $\frac{9}{8}$ ۲. $\frac{8}{9}$ ۳. $\frac{7}{8}$ ۴. 8

۱۴- اگر $\Sigma_{1.2}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}18&3\\3&18\end{bmatrix}$ باشد، ضریب همبستگی جزئی $\rho_{12.34}$ کدام گزینه است؟

۱. $\frac{18}{5}$ ۲. $\frac{3}{5}$ ۳. $\frac{1}{6}$ ۴. $\frac{6}{5}$

۱۵- برای نمونه به اندازه n تحت فرض $\rho=\rho_0$ توزیع $\frac{1}{2}Ln\frac{1+r}{1-r}$ چیست؟ $\left(W=\frac{1}{2}Ln\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}\right)$

۱. $N\left(W,\frac{1}{n-3}\right)$ ۲. $N\left(W,\frac{1}{n-2}\right)$ ۳. t_{n-2} ۴. $N\left(W,\frac{1}{n-1}\right)$

۱۶- فرضیه $\mu_{2\bullet}=\mu_2$ با شرط $\mu_{1\bullet}=\mu_1$ رد می‌شود اگر:

۱. $\frac{n-1}{p-q}.\frac{T_p^2}{T_q^2}>F_{p-q,n-p,\alpha}$

۲. $\frac{n}{p-1}.\frac{T_p^2}{n-1+T_q^2}>F_{p,n,\alpha}$

۳. $\frac{n-p}{p-q}.\frac{T_p^2-T_q^2}{n-1+T_q^2}>F_{q,n-p,\alpha}$

۴. $\frac{n-p}{p-q}.\frac{T_p^2-T_q^2}{n-1+T_q^2}>F_{p-q,n-p,\alpha}$

۱۷- در آنالیز واریانس چند متغیره یک راهه $Y_{ij}\sim N_p\left(\mu_j,\Sigma\right)$ ، دترمینان $SSTr$ برابر با کدام گزینه است؟

۱. p ۲. $J-1$ ۳. 1 ۴. صفر

۱۸- اگر $\Sigma=\sigma^2 I_p$ و $\lambda=\frac{|S|}{\left(\frac{trS}{p}\right)^p}$ و ناحیه رد آزمون ماتریس کوواریانس به‌صورت زیر باشند، مقدار f برابر با کدام گزینه است؟

$$-\left[n-1-\frac{\left(2p^2+p+2\right)}{6p}\right]Ln\lambda>\chi^2_{f,\alpha}$$

۱. $f=\frac{p}{2}+1$ ۲. $f=p+1$ ۳. $f=\frac{p(p+1)}{2}-1$ ۴. $f=\frac{p(p+1)}{2}$

۱۹- در آزمون $H_0:\Sigma=I$ مقدار آماره‌ی آزمون به چه کمیت‌هایی بستگی دارد؟

۱. اثر S ۲. دترمینان و اثر S ۳. دترمینان S ۴. وارون S

۲۰- کدام گزینه آماره‌ی آزمون کولموگروف است؟

۱. $D=Sup_x\,|F_n(x)-F_H(x)|$ ۲. $D=Sup_x\,|F_{n-1}(x)-F_n(x)|$

۳. $D=Sup_x\,|\frac{u_x}{n-1}-F_H(x)|$ ۴. $D=Sup_x\,|F_X(n)-F_X(H)|$

۲۱- ضرایب همبستگی r را چگونه به توزیع تقریباً نرمال تبدیل می‌کنیم؟

۱. با گرفتن ریشه دوم ۲. با تبدیل لجیت ۳. با تبدیلات توانی ۴. با تبدیل Z فیشر

۲۲- در همبستگی چندگانه بین X_1 و X_2 چه چیز محاسبه می‌شود؟

۱. همبستگی بین X_1 و هر ترکیب خطی از X_2

۲. مجموع همبستگی‌ها بین X_1 و تک تک مولفه‌های X_2

۳. ضریب همبستگی بین X_1 و یک ترکیب خطی خاص از X_2

۴. ماکزیمم قدرمطلق ضریب همبستگی بین ترکیب خطی X_1 و ترکیب خطی X_2

۲۳- کدام گزینه برای ارزیابی نرمال بودن داده‌ها استفاده نمی‌شود؟

۱. آزمون شاپیرو ـ ویلک ۲. آزمون هتلینگ

۳. آزمون کولموگروف ۴. نمودارهای چندک ـ چندک

۲۴- رابطه‌ی $\Delta^2=(\mu_1-\mu_2)'\Sigma^{-1}(\mu_1-\mu_2)$ چه نام دارد؟

۱. تابع ممیز خطی فیشر ۲. تابع ممیز درستنمایی ۳. فاصله ماهالانوبیس ۴. فاصله اقلیدسی

۲۵- اگر $p=3$ و $n=6$ درجه آزادی بین نمونه‌ها کدام گزینه است؟

۱. 2 ۲. 10 ۳. 17 ۴. 5

سوالات تشریحی

۱- فرض کنید X دارای توزیع $N_3(\mu,\Sigma)$ با $\mu=\begin{bmatrix}2\\-3\\1\end{bmatrix}$ و $\Sigma=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&3&2\\1&2&2\end{bmatrix}$ باشد. توزیع $3X_1-2X_2+X_3$ را به دست آورید. ۱،۲۰ نمره

۲- در خانواده نرمال دو متغیره نشان دهید r برآورد ماکزیمم درست‌نمایی ρ است. ۱،۲۰ نمره

۳- برآورد درستنمایی ماکسیمم Σ در خانواده‌های نرمالی با $\Sigma_1=\Sigma_2=\Sigma$ و بردارهای میانگین معلوم μ_1 و μ_2 را به دست آورید. ۱،۲۰ نمره

۴- برای آزمون فرض $H_0:\mu'=[7\quad 11]$ با استفاده از داده‌های $X=\begin{bmatrix}2&8&6&8\\12&9&9&10\end{bmatrix}$، T^2 را محاسبه کنید. ۱،۲۰ نمره

۵- برآوردهای درستنمایی ماکسیمم بردار میانگین μ و ماتریس کوواریانس Σ را بر مبنای نمونه تصادفی $\langle X\rangle=\begin{bmatrix}3&4&5&4\\6&4&7&7\end{bmatrix}$ از یک جامعه‌ی نرمال دو متغیری به دست آورید. ۱،۲۰ نمره

شماره سوال	پاسخ صحیح
1	ج
2	ج
3	ج
4	د
5	د
6	الف
7	ج
8	ب
9	ب
10	ب
11	ج
12	ب
13	الف
14	ج
15	الف
16	د
17	د
18	ج
19	ب
20	الف
21	د
22	د
23	ب
24	ج
25	د

سوالات تشریحی

۱- نمره ۱،۲۰

$$3X_1 - 2X_2 + X_3 = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = AX$$

$$A\mu = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = 6+6+1 = 13$$

$$A\Sigma A' = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 6+2+1 = 9$$

$$3X_1 - 2X_2 + X_3 \sim N(13,9)$$

۲- سوال 1ص 130 جواب 131 نمره ۱،۲۰

۳- سوال ص 205 جواب ص 206و207 نمره ۱،۲۰

۴- نمره ۱،۲۰

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \dfrac{2+8+6+8}{4} \\ \dfrac{12+9+9+10}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$Y = X - \begin{bmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 \\ 10 & 10 & 10 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{n} YY' = S \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 24 & -10 \\ -10 & 6 \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 12 & -5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$S^{-1} = \frac{3}{2} \frac{1}{36-25} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 12 \end{bmatrix} = \frac{3}{22} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 12 \end{bmatrix}$$

$$T^2 = 4 \times \frac{3}{22} \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{6}{11}(3+5+5+12) = 13.636$$

۱- فرض کنید X_1 و X_2 مولفه‌های مستقل از بردار تصادفی X باشد به طوری‌که $Y_1=2X_1+X_2$ و $Y_2=2X_1-X_2$. در این‌صورت قدر مطلق ژاکوبین تبدیل برابر با کدام گزینه است؟

۱. $\frac{1}{2}$ ۲. $\frac{1}{4}$ ۳. $\frac{2}{3}$ ۴. صفر

۲- بر اساس بردار میانگین $\mu=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ و ماتریس کواریانس $\Sigma=\begin{bmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&4\end{bmatrix}$ کدام گزینه درست است؟

۱. $Cov(X_1,X_1)=1$ ۲. $E(X_1X_2)=4$ ۳. $Cov(X_1,X_2)=4$ ۴. $E(X_1X_3)=4$

۳- اگر $E(X)=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ و $\Sigma=\begin{bmatrix}4&2\\2&6\end{bmatrix}$ باشد. آنگاه حاصل $E(XX')$ و $E(X'X)$ به ترتیب برابر با کدام گزینه است؟

۱. $\begin{bmatrix}4&2\\2&6\end{bmatrix}$ و 15 ۲. $\begin{bmatrix}1&2\\2&4\end{bmatrix}$ و 15 ۳. $\begin{bmatrix}4&2\\2&6\end{bmatrix}$ و 10 ۴. $\begin{bmatrix}1&2\\2&4\end{bmatrix}$ و 10

۴- اگر ρ ماتریس همبستگی نمونه با بعد P باشد. کدام گزینه <u>نادرست</u> است؟

۱. اثر ماتریس مربع ρ ، P است.

۲. دترمینان ماتریس ρ مضربی از دترمینان ماتریس کواریانس است.

۳. مقادیر ویژه ماتریس ρ ممکن است منفی باشد.

۴. ماتریس ρ معین مثبت است.

۵- اگر $\begin{bmatrix}X_1\\X_2\end{bmatrix}\sim N_2(\begin{bmatrix}\mu_1\\\mu_2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&\rho\\\rho&1\end{bmatrix})$ باشد . آنگاه توزیع X_1-X_2 کدام گزینه است؟

۱. $N(\mu_1-\mu_2,2(1+\rho))$ ۲. $N(\mu_1-\mu_2,2(1-\rho))$ ۳. $N(\mu_1-\mu_2,2-\rho)$ ۴. $N(\mu_1+\mu_2,1-2\rho)$

۶- اگر $\begin{bmatrix}X_1\\X_2\end{bmatrix}\sim N_2(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix})$ آنگاه توزیع X_1 به شرط $X_1+X_2=y$ کدام گزینه است؟

۱. $N(\frac{y-2}{2},\frac{1}{2})$ ۲. $N(\frac{y}{2},\frac{1}{2})$ ۳. $N(1,\frac{1}{2})$ ۴. $N(\frac{2+y}{2},\frac{1}{2})$

۷- اگر افراز بردار X به‌صورت $X=\begin{bmatrix}\frac{X_1}{X_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X_1\\X_2\\X_3\end{bmatrix}$ باشد و $\mu=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ و $\Sigma=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&3&2\\1&2&4\end{bmatrix}$، در این‌صورت با توجه به افراز بردار X، مقدار $Var(2X_1-X_2|X_3)$ برابر با کدام گزینه است؟

۱. 7
۲. $\frac{1}{11}$
۳. 11
۴. $\frac{1}{7}$

۸- فرض کنید $X\sim N_p(\mu,\Sigma)$، کدام گزینه درست است؟

۱. $E(X'AX)=tr(A\Sigma+\mu'\mu)$
۲. $E(XX')=\Sigma$
۳. $E(XX')=\Sigma+\mu\mu'$
۴. $E(X'AX)=tr(A\Sigma+\mu'\mu)$

۹- اگر $X\sim N_2(\circ,I_2)$ و $A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$. کدام گزینه توزیع $X'AX$ است؟

۱. ویشارت
۲. کی دو با دو درجه آزادی
۳. استودنت با یک درجه آزادی
۴. کی دو با یک درجه آزادی

۱۰- کدام گزینه نادرست است؟

۱. اگر $X\sim N_p(\circ,\sigma^2I_p)$ باشد آنگاه $\frac{X'X}{\sigma^2}$ دارای توزیع ویشارت است.

۲. اگر $X\sim N_p(\circ,\Sigma)$ باشد آنگاه $X'X$ دارای توزیع ویشارت با یک درجه آزادی است.

۳. اگر $X\sim N_p(\circ,I_p)$ آنگاه $X'A_1X$ و $X'A_2X$ در صورتی مستقلند که $A_1A_2=\circ$

۴. $E(X'AX)=tr(A\Sigma)+\mu'A\mu$

۱۱- اگر $X_1=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ و $X_2=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$ نمونه تصادفی از توزیع $N_2(\mu,\Sigma)$ باشند، برآورد درستنمایی ماکزیمم، ماتریس کواریانس Σ، کدام گزینه است؟

۱. $\begin{bmatrix}1&\circ\\\circ&1\end{bmatrix}$
۲. $\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$
۳. $\begin{bmatrix}2&\circ\\\circ&2\end{bmatrix}$
۴. $\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}$

۱۲- هدف از همبستگی چندگانه بین X_1 و X_2 چیست؟

۱. ماکسیمم قدرمطلق ضریب همبستگی بین ترکیب خطی X_1 و ترکیب خطی X_2

۲. مجموع همبستگی‌ها بین X_1 و تک تک مولفه‌های X_2

۳. همبستگی بین X_1 و هر ترکیب خطی از X_2

۴. ضریب همبستگی بین X_1 و یک ترکیب خطی خاص از X_2

۱۳- اگر $X \sim N_4(\circ,\Sigma)$ که در آن $\Sigma=\begin{bmatrix}4&1&1&1\\1&4&1&1\\1&1&4&1\\1&1&1&4\end{bmatrix}$ است. در این‌صورت برای محاسبه $\rho_{12.34}$ مقدار $\Sigma_{1.2}$ برابر با گزینه است؟

۱. $\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$ ۲. $\begin{bmatrix}2&1\\\circ&2\end{bmatrix}$ ۳. $\begin{bmatrix}\frac{18}{5}&\frac{3}{5}\\\frac{3}{5}&\frac{18}{5}\end{bmatrix}$ ۴. $\begin{bmatrix}\frac{1}{5}&\frac{2}{5}\\\frac{2}{5}&\frac{1}{5}\end{bmatrix}$

۱۴- اگر $X \sim N_4(\circ,\Sigma)$ که در آن $\Sigma=\begin{bmatrix}4&1&1&1\\1&4&1&1\\1&1&4&1\\1&1&1&4\end{bmatrix}$ است، آنگاه مقدار ضریب همبستگی جزیی $\rho_{12.34}$ برابر با کدام گزینه است؟

۱. $\frac{1}{5}$ ۲. $0/251$ ۳. $\frac{3}{5}$ ۴. $\frac{1}{6}$

۱۵- مشاهدات $\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix}-4\\2\end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix}3\\-4\end{bmatrix}$ از توزیع $N_2(\mu,\Sigma)$ به‌دست آمده است. در این‌صورت برای آزمون فرض $H_\circ: \mu=\circ$ مقدار آماره T^2 هتلینگ برابر با کدام گزینه است؟

۱. $0/078$ ۲. $0/1875$ ۳. $3/06$ ۴. $0/063$

۱۶- در توزیع نرمال دو متغیره تحت چه شرطی X_1+X_2 و X_1-X_2 از هم مستقل هستند؟

۱. واریانس X_1 با واریانس X_2 برابر باشد.

۲. واریانس X_1 با کوواریانس X_1 و X_2 برابر باشد.

۳. واریانس X_2 با کوواریانس X_1 و X_2 برابر باشد.

۴. کوواریانس X_1 و X_2 برابر صفر باشد.

۱۷- برآورد درستنمایی ماکزیمم ρ تحت مدل کواریانس بین طبقه‌ای برابر کدام گزینه است؟

۱. $\frac{L'SL-trS}{(p-1)trS}$ ۲. $\frac{trS}{p}$ ۳. $\frac{L'SL+trS}{(p-1)trS}$ ۴. $\frac{L'SL}{1-(p-1)\rho}$

۱۸- در آزمون فرض بردار میانگین توزیع نرمال چند متغیره، مقدار آماره‌ی هتلینگ با کدام گزینه مقایسه می‌شود؟

۱. $\frac{n-1}{n-p}F_{n-p,p}$ ۲. $\frac{n-1}{n-p}pF_{p,n-p}$ ۳. $\frac{n-1}{n-p}pF_{n-p,p}$ ۴. $\frac{n-1}{n-p}F_{p,n-p}$

۱۹- با فرض $n=8$ و $S=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ مقدار آماره آزمون برای فرضیه $H_\circ : \Sigma=\sigma^2 I_2$ برابر با کدام گزینه است؟

۱. 23/61 ۲. -1/139 ۳. 6/83 ۴. 0/32

۲۰- درجدول آنالیز واریانس چند متغیره، منظور از $U_{p,m,f}$ کدام گزینه است؟

۱. $\frac{|SS\,tr|}{|SSE+SStr|}$ ۲. $\frac{|SS\,tr|}{|SSE+SST|}$ ۳. $\frac{|SS\,E|}{|SSE+SStr|}$ ۴. $\frac{|SS\,E|}{|SSE+SST|}$

۲۱- فرض کنید که چهار نوع برنج در 20 کرت(هر نوع به طور تصادفی به 5 کرت اختصاص داده می‌شود) کاشته می‌شود. در این‌صورت برای آزمون برابری میانگین‌های چهار نوع برنج، درجه آزادی تیمار و درجه آزادی کل به ترتیب کدام گزینه است؟

۱. 16 و 19 ۲. 16 و 20 ۳. 3 و 20 ۴. 3 و 19

۲۲- برای آزمون $H_\circ : \Sigma=\sigma^2 I$ ، مقدار λ (آماره‌ی آزمون به روش درستنمایی ماکزیمم) برابر با کدام گزینه است؟

۱. $|S|(p^{-1}trS)^{-p}$ ۲. $\frac{n-1}{n}.\frac{trS}{p}$ ۳. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p}s_{ii}$ ۴. $(1-\rho)I_p+\rho LL'$

۲۳- کدام گزینه درست است؟

۱. طول بازه‌های اطمینان T^2 کوتاهتر از طول بازه‌های اطمینان بونفرونی است.

۲. $SS\,tr$ یک ماتریس معین غیرمنفی است.

۳. برای آزمون بردار میانگین در حالت چند متغیره از جامعه نرمال اگر Σ معلوم باشد توزیع آماره آزمون تی است.

۴. T^2 هتلینگ تحت تبدیلات خطی پایا نیست.

۲۴- اگر متغیر تصادفی X با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد، آنگاه فرمول $\frac{n\left[\sum_i (x_i-\bar{x})^3\right]^2}{\left[\sum_i (x_i-\bar{x})^2\right]^3}$، برآورد ..... است.

۱. کشیدگی ۲. آماره آزمون کولموگورف

۳. چولگی ۴. آماره‌ی آزمون گشتاور سوم

۲۵- در نمودار چندک-چندک (نمودار ارزیابی فرض نرمال بودن)، محور عمودی، کدام گزینه است؟

۱. $\Phi^{-1}(\frac{i-0/5}{n})$

۲. چندک‌های مشاهده شده $X_{(i)}$

۳. $\frac{i}{n}$

۴. $\frac{i-0/5}{n}$

سوالات تشریحی

۱- الف- به ازای هر بردار a تعریف کنید $Y=a'X$. ثابت کنید: $V(Y)=a'\Sigma a$ که در آن Σ ماتریس کواریانس بردار X است. ۱،۲۰ نمره

ب- با استفاده از قسمت الف، اگر $Y=\begin{bmatrix} X_1+X_2 \\ X_1-X_2 \end{bmatrix}$، مطلوبست ماتریس کواریانس بردار تصادفی Y.

۲- الف-ثابت کنید: اگر $Z\sim N_p(0,I_p)$، آنگاه تابع مولد گشتاورهای آن برابر است با: $M_Z(t)=e^{\frac{t't}{2}}$ ۱،۲۰ نمره

ب- اگر $X\sim N_3(\mu,\Sigma)$ و $\mu=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ و $\Sigma=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&4&1\\1&1&6\end{bmatrix}$، آنگاه مطلوبست: توزیع $\begin{bmatrix}X_1\\X_2\end{bmatrix}$ به شرط $X_3=x_3$ و $E(X_1+X_2|X_2+X_3=2)$.

۳- ثابت کنید اگر $X\sim N_p(\mu,I_p)$، آنگاه فرم‌های درجه دوم $X'A_1X$ و $X'A_2X$ مستقل هستند اگر و تنها اگر $A_1A_2=0$. ۱،۲۰ نمره

۴- بر اساس نمونه‌ای تصادفی به اندازه‌ی 25 از $X=\begin{bmatrix}X_1\\X_2\\X_3\end{bmatrix}$ ماتریس کواریانس نمونه $S=\begin{bmatrix}7&4&-1\\4&6&2\\-1&2&9\end{bmatrix}$ به‌دست آمده است. ۱،۲۰ نمره

الف- مقدار آماره‌ی F برای آزمودن $\rho_{1.23}=0$ را محاسبه کنید.

ب- برآورد درستنمایی ماکزیمم برای ماتریس کوواریانس را با توجه به قسمت الف بیابید.

۵- برای یک نمونه به اندازه $n=10$ از یک جامعه دو متغیری داریم: ۱،۲۰ نمره

$$\begin{bmatrix}\bar{X}_1\\\bar{X}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0/5\\1/5\end{bmatrix} \text{ و } S=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}$$

یک فاصله اطمینان همزمان 90 درصدی به روش بونفرونی برای $\begin{bmatrix}\mu_1\\\mu_2\end{bmatrix}$ بیابید. ($t_{9,0/025}=2/2622$ و $t_{9,0/05}=1/8331$ و $F_{2,8,0/05}=4/459$)

شماره سوال	پاسخ صحیح
1	ب
2	د
3	الف
4	ج
5	ب
6	ب
7	الف
8	ج
9	د
10	الف
11	ب
12	الف
13	ج
14	د
15	ب
16	الف
17	الف
18	ب
19	ج
20	ج
21	د
22	الف
23	ب
24	ج
25	الف

۱- اگر افزارهای ماتریس $\sum$ به صورت زیر می‌باشد. به ترتیب تعداد سطرها و ستون‌های ماتریس‌ها A و B برای محاسبه عبارت $Cov\left(Ax_{۱},Bx_{۲}\right)$ چیست؟

$$\sum_{۱۲}=\begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ ۲ & ۲ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix} \qquad \sum_{۱۱}=\begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۳ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۳ \end{bmatrix} \qquad \sum_{۲۲}=\begin{bmatrix} ۶ & ۰ \\ ۰ & ۶ \end{bmatrix}$$

۱. ۳و۲ ۲. ۵و۲ ۳. ۳و۵ ۴. ۲و۳

۲- اگر $E\left(X\right)=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$ و $\sum=\begin{bmatrix} ۴ & ۲ \\ ۲ & ۶ \end{bmatrix}$ آنگاه مقدار $E\left(X'X\right)$ برابرکدام گزینه است؟

۱. ۳ ۲. ۱۰ ۳. ۱۵ ۴. ۱۳

۳- بر اساس نمونه‌ای تصادفی به اندازه ده از بردار تصادفی X ، $\bar{x}'=\begin{pmatrix} ۲ & ۳ \end{pmatrix}'$ به دست آمده است. اگر $\mu=\begin{bmatrix} ۵ \\ ۱ \end{bmatrix}$ و $V=\sum_{i=۱}^{۱۰}\left(x-\bar{x}\right)\left(x_i-\bar{x}\right)'=\begin{pmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۴ \end{pmatrix}$ آنگاه مقدار $\sum_{i=۱}^{۱۰}\left(x_i-\mu\right)\left(x_i-\mu\right)'$ برابر کدام گزینه است؟

۱. $\begin{bmatrix} ۹۱ & -۵۸ \\ -۵۸ & ۴۴ \end{bmatrix}$ ۲. $\begin{bmatrix} ۴۴ & ۹۱ \\ ۶۲ & ۶۲ \end{bmatrix}$ ۳. $\begin{bmatrix} ۹۱ & ۲۶ \\ ۲۶ & ۴۴ \end{bmatrix}$ ۴. $\begin{bmatrix} ۱۹ & ۲۶ \\ ۲۲ & ۴۰ \end{bmatrix}$

۴- فرض کنید X بردار تصادفی با توزیع نرمال P متغیره که ماتریس کوواریانس آن $\sum$ است. ماتریس $A_{۲\times P}$ دارای دو سطر می‌باشد AX دارای دو مولفه مستقل است اگر و تنها اگر:

۱. A دارای دو سطر مستقل خطی است.
۲. مولفه‌های X از هم مستقل است.
۳. کوواریانس بین سطرهای A صفر می‌شود.
۴. $A\sum A'$ یک ماتریس قطری است.

۵- اگر $\mu=L,\left(x_{۱},x_{۲},x_{۳}\right)'\sim N_{۳}\left(\mu,\frac{۱}{۳}\sum\right)$ و $\sum=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۴ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۶ \end{bmatrix}$ باشد آن‌گاه توزیع $\frac{۱}{۳}\left(X_{۱}+X_{۲}+X_{۳}\right)$ چیست؟

۱. $N_{۳}\left(\mu,\frac{۱}{۳}\sum\right)$ ۲. $N\left(۱,۲\right)$ ۳. $N_{۳}\left(\frac{۱}{۳}\mu,\frac{۱}{۹}\sum\right)$ ۴. $N\left(۱,\frac{۲}{۳}\right)$

۶- اگر $\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \sim N_2\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right)$ باشد،آنگاه کدام گزینه توزیع $X_1 - X_2$ است؟

۱. $N(0,2)$ ۲. $N(0,1)$ ۳. $N(1,1)$ ۴. $N(1,2)$

۷- فرض کنید $X \sim N_p(\mu, \Sigma)$ ، کدام گزینه درست است؟

۱. $E(XX') = \Sigma + \mu\mu'$ ۲. $E(XX') = \Sigma$

۳. $E(X'AX) = tr\,\Sigma A$ ۴. $E(X'AX) = \Sigma$

۸- اگر $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \sim N_3\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 16 \end{bmatrix}\right)$ باشد،آنگاه مقدار $E(X_1 | X_2 = 4)$ برابر کدام گزینه است؟

۱. $\frac{9}{8}$ ۲. $\frac{8}{9}$ ۳. $\frac{7}{8}$ ۴. 8

۹- تحت چه شرایطی عبارت درجه دوم $X'AX$ دارای توزیع کای اسکور است؟

۱. A متقارن باشد. ۲. A خودتوان باشد.

۳. X دارای توزیع نرمال باشد. ۴. هر 3 مورد

۱۰- اگر $\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \sim N_3\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \sigma^2 I_3\right)$ آنگاه توزیع $\frac{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}{\sigma^2}$ کدام گزینه است؟

۱. $\chi^2(3)$

۲. $\chi^2(1)$

۳. کای اسکور نامرکزی با سه درجه آزادی و نامرکزیت $14\sigma^2$

۴. کای اسکور نامرکزی با یک درجه آزادی و نامرکزیت $6\sigma^2$

۱۱- اگر $\Sigma = \sigma^{۲}\left[(۱-\rho)I_{۳} + \rho LL'\right]$ و ماتریس کوواریانس نمونه‌ای $S = \begin{bmatrix} ۷/۸۲ & ۷/۹۳ & ۷/۹۸ \\ ۷/۹۳ & ۹/۳۸ & ۸/۸۷ \\ ۷/۹۸ & ۸/۸۷ & ۹/۷۹ \end{bmatrix}$ باشند، آنگاه برآورد درست‌نمایی ماکسیمم $\left(\sigma^{۲}, \rho\right)$ کدام گزینه است؟

۱. $\hat{\rho} = ۰/۸۸, \hat{\sigma}^{۲} = ۹$

۲. $\hat{\rho} = ۰/۹۱۸, \hat{\sigma}^{۲} = ۹$

۳. $\hat{\rho} = ۰/۲, \hat{\sigma}^{۲} = ۹$

۴. $\hat{\rho} = ۰/۹, \hat{\sigma}^{۲} = ۰/۹۱۸$

۱۲- اگر $X \sim N_p(\mu, \Sigma)$ باشد آنگاه کدام گزینه توزیع $X'AX$ است؟

۱. ویشارت با 1 درجه آزادی

۲. $\chi^{۲}_{p}$

۳. ویشارت با p درجه آزادی

۴. بستگی به ماتریس A دارد

۱۳- اگر $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma^{۲} & C & C \\ C & \sigma^{۲} & C \\ C & C & \sigma^{۲} \end{bmatrix}$ و همتای آن در نمونه $R = \begin{bmatrix} ۱ & ۰/۹۲۶ & ۰/۹۱۲ \\ & ۱ & ۰/۹۲۶ \\ & & ۱ \end{bmatrix}$ باشد برآورد ضریب همبستگی $\frac{C}{\sigma^{۲}}$ برابر کدام گزینه است؟

۱. 0/926

۲. 0/912

۳. 1

۴. 0/921

۱۴- اگر $\Sigma = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۴ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۶ \end{bmatrix}$ باشد آنگاه $\rho^{۲}_{۱.۲۳}$ برابر کدام گزینه است؟

۱. $\frac{۳۸}{۲۳}$

۲. $\frac{۴\sqrt{۲}}{۲۳}$

۳. $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$

۴. $\frac{۴}{۲۳}$

۱۵- فرض کنید ماتریس کوواریانس نمونه‌ای به اندازه n از $X' = \left(X_{۱}, X_{۲}, X_{۳}\right)$ به صورت زیر باشد، مقدار $r_{۱.۲۳}$ کدام است؟

$$S = \begin{bmatrix} ۴ & S_{۱۲} \\ S_{۲۱} & S_{۲۲} \end{bmatrix}, \quad S_{۱۲}S_{۲۲}^{\frac{۱}{۲}} = \left(\frac{۱}{\sqrt{۲}} \quad \frac{۱}{\sqrt{۲}}\right)$$

۱. $\frac{۱}{۲}$

۲. $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۳. $\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}$

۴. $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

۱۶- اگر ماتریس کوواریانس به صورت $\Sigma = \begin{bmatrix} ۱ & ۰/۵ & ۰/۵ & ۰/۵ \\ & ۱ & ۰/۵ & ۰/۵ \\ & & ۱ & ۰/۵ \\ & & & ۱ \end{bmatrix}$ مقدار $\rho_{۱.۲۳۴}$ برابر کدام گزینه است؟

۱. 0/5 ۲. 0/15 ۳. 0/65 ۴. 0/25

۱۷- اندازه وابستگی دو مجموعه از متغیرهای تصادفی، مقدار ..... است.

۱. همبستگی متعارف ۲. همبستگی جزئی ۳. همبستگی ساده ۴. همبستگی چندگانه

۱۸- برای آزمون بردار میانگین در حالت چندمتغیره از جامعه نرمال، اگر ماتریس کوواریانسی معلوم باشد توزیع آماره‌ی آزمون چیست؟

۱. نرمال ۲. کای اسکور ۳. اف ۴. هتلینگ

۱۹- اگر دریک نمونه‌ی 5تایی، $\begin{bmatrix} \bar{X}_۱ \\ \bar{X}_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۴ \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ & ۱ \end{bmatrix}$ یک فاصله اطمینان 90 درصدی همزمان برای $\begin{bmatrix} \mu_۱ \\ \mu_۲ \end{bmatrix}$ کدام گزینه است؟

۱. $\begin{bmatrix} ۱/۳ & ۴/۷ \\ ۲/۳ & ۵/۷ \end{bmatrix}$ ۲. $\begin{bmatrix} ۱/۴ & ۵/۷ \\ ۲/۳ & ۵/۷ \end{bmatrix}$ ۳. $\begin{bmatrix} ۱/۳ & ۴/۷ \\ ۳/۳ & ۵/۷ \end{bmatrix}$ ۴. $\begin{bmatrix} ۱/۳ & ۴/۷ \\ ۲/۳ & ۶/۷ \end{bmatrix}$

۲۰- بر اساس نمونه‌ای تصادفی به اندازه 25 از $X = \begin{bmatrix} X_۱ \\ X_۲ \\ X_۳ \end{bmatrix}$ ماتریس کوواریانس نمونه‌ای $S = \begin{bmatrix} ۷ & ۴ & -۱ \\ ۴ & ۶ & ۲ \\ -۱ & ۲ & ۹ \end{bmatrix}$ به دست آمده است. مقدار آماره F مربوط فرض $\rho_{۱.۲۳} = ۰$ کدام گزینه است؟

۱. ۰/۳۱۲ ۲. ۲۱/۳ ۳. ۳/۱۲ ۴. ۲/۱۳

۲۱- اگر ρ ضریب همبستگی دو متغیر تصادفی باشد برآورد ρ بر اساس نمونه‌ای ۱۰۳ تایی از (X, Y) برابر با $r = ۰/۴$ باشد، توزیع حدی $W = \frac{۱}{۲} Ln \frac{۱+r}{۱-r}$ کدام گزینه است؟

۱. $N(۲۴,۱۱)$ ۲. $N(۰/۴۲,۰/۰۱)$ ۳. $N(۰/۲۴,۰/۰۱)$ ۴. $N(۰/۴۲,۰/۱)$

۲۲- در آزمون $H_0: \Sigma = S$ چند پارامتر به‌طور همزمان مورد آزمون قرار می‌گیرد؟

۱. $\frac{P(P-1)}{2}$ ۲. $\frac{P(P+1)}{2}$ ۳. P^2 ۴. $(P-1)^2$

۲۳- متغیر $\frac{5\left(1-\sqrt{U_{2,4,6}}\right)}{4\sqrt{U_{2,4,6}}}$ دارای چه توزیعی است؟

۱. $F_{8,10}$ ۲. $F_{4,8}$ ۳. $F_{4,12}$ ۴. $F_{5,4}$

۲۴- برای نمونه به اندازه n تحت فرض $\rho = \rho_0$ توزیع $\frac{1}{2}Ln\frac{1+r}{1-r}$ چیست؟ $\left(W = \frac{1}{2}Ln\frac{1+\rho_0}{1-\rho_0}\right)$

۱. $N\left(W, \frac{1}{n-3}\right)$ ۲. $N\left(W, \frac{1}{n-2}\right)$ ۳. t_{n-2} ۴. $N\left(W, \frac{1}{n-1}\right)$

۲۵- در همبستگی چندگانه بین X_1 و X_2 چه چیز محاسبه می‌شود؟

۱. همبستگی بین X_1 و هر ترکیب خطی از X_2

۲. مجموع همبستگی‌ها بین X_1 و تک تک مولفه‌های X_2

۳. ضریب همبستگی بین X_1 و یک ترکیب خطی خاص از X_2

۴. ماکزیمم قدرمطلق ضریب همبستگی بین ترکیب خطی X_1 و ترکیب خطی X_2

سوالات تشریحی

۱- اگر ماتریس P متعامد باشد تابع چگالی بردار $Y = PX$ را بر حسب تابع چگالی بردار X بنویسید. ۱،۲۰ نمره

۲- در یک جامعه‌ی نرمال چندمتغیره، ثابت کنید $\bar{X}$ از S مستقل است. ۱،۲۰ نمره

۳- در خانواده نرمال دو متغیره نشان دهید ضریب همبستگی نمونه‌ای، r ، برآورد ماکزیمم درست‌نمایی ضریب همبستگی ρ است. ۱،۲۰ نمره

۴- برآورد درستنمایی ماکسیمم برای Σ در خانواده‌های نرمالی با $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma$ و بردارهای میانگین معلوم μ_1 و μ_2 را به‌دست آورید. ۱،۲۰ نمره

۵- ثابت کنید (برای هر ماتریس مربعی A) ۱،۲۰ نمره

$$E(X'AX) = tr(A\Sigma) + \mu' A\mu$$

شماره سوال	پاسخ صحیح
1	الف
2	ج
3	الف
4	د
5	د
6	الف
7	الف
8	الف
9	د
10	ج
11	ب
12	د
13	د
14	د
15	الف
16	ب
17	الف
18	ب
19	الف
20	ب
21	ب
22	ب
23	الف
24	الف
25	د

۱- فرض کنید X_1 و X_2 دارای تابع احتمال توأم زیر باشد. در این صورت بردار میانگین $\mu=\begin{bmatrix}E(X_1)\\E(X_2)\end{bmatrix}$ برابر با کدام گزینه است؟

X_1 \ X_2	0	1
-1	0/24	0/06
0	0/16	0/14
1	0/4	0

۱. $\begin{bmatrix}0/1\\0/2\end{bmatrix}$ ۲. $\begin{bmatrix}0/2\\0/1\end{bmatrix}$ ۳. $\begin{bmatrix}0/16\\0/2\end{bmatrix}$ ۴. $\begin{bmatrix}0/69\\0/2\end{bmatrix}$

۲- بر اساس بردار میانگین $\mu=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ و ماتریس کواریانس $\Sigma=\begin{bmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&4\end{bmatrix}$ کمیت $Cov(X_1,X_2)-E(X_1X_2)$ برابر با کدام گزینه است؟

۱. -3 ۲. 1 ۳. -1 ۴. 3

۳- کدام گزینه یک برآورد نااریب برای ماتریس کواریانس Σ از نمونه تصادفی $X_1,...,X_n$ است؟

۱. $\frac{n-1}{n}S_n$ ۲. $\frac{n}{n-1}S_n$ ۳. $\frac{S_n}{n-1}$ ۴. $\frac{S_n}{n}$

۴- اگر $E(X)=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ و $\Sigma=\begin{bmatrix}4&2\\2&4\end{bmatrix}$ ، آنگاه مقدار $E(X'X)$ برابر با کدام گزینه است؟

۱. 13 ۲. 8 ۳. 5 ۴. 3

۵- اگر $X\sim N_p(\mu,\Sigma)$ آنگاه تابع مولد گشتاور آن برابر کدام گزینه است؟

۱. $\exp\{t'\mu+\frac{1}{2}t'\Sigma^{-1}t\}$ ۲. $\exp\{\frac{t'\Sigma t}{2}\}$ ۳. $\exp\{\frac{t't}{2}\}$ ۴. $\exp\{t'\mu+\frac{t'\Sigma t}{2}\}$

۶- اگر $\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \sim N_3(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix})$ باشد، آنگاه مقدار $V(X_1 + X_3 | X_2)$ کدام گزینه است؟

۱. $\frac{33}{5} X_2$ ۲. $\frac{33}{3}$ ۳. 8 ۴. $\frac{X_2 + 11}{3}$

۷- کدام گزینه نادرست است؟

۱. اگر X_1 و X_2 مستقل باشند آنگاه $Cov(X_1, X_2) = 0$.

۲. ماتریس همبستگی یک ماتریس معین غیرمنفی است.

۳. در ماتریس کواریانس $\Sigma = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ ، X_1 و X_3 مستقلند.

۴. مقادیر ویژه ماتریس همبستگی منفی نمی‌شود.

۸- اگر $\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \sim N_2(\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix})$ آنگاه توزیع $2X_1 - X_2$ کدام گزینه است؟

۱. $N(2\mu_1 - \mu_2, 12)$ ۲. $N(\mu_1 - 2\mu_2, 6)$ ۳. $N(2\mu_1 - \mu_2, 6)$ ۴. $N(\mu_1 - 2\mu_2, 12)$

۹- اگر $X \sim N_p(0, \sigma^2 I_p)$ ، آنگاه $\frac{X'X}{\sigma^2}$ دارای چه توزیعی است؟

۱. t_p ۲. χ^2_p ۳. χ^2_{p-1} ۴. F

۱۰- کدام گزینه برآورد درستنمایی ماکسیمم ρ تحت مدل کواریانس بین طبقه‌ای است؟

۱. $\frac{L'SL - trS}{(p-1)trS}$ ۲. $\frac{L'SL}{1-(p-1)trS}$ ۳. $\frac{L'SL + trS}{(p-1)trS}$ ۴. $\frac{trS}{p}$

۱۱- اگر $\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \sim N_3(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \sigma^2 I_3)$ آنگاه $\frac{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}{\sigma^2}$ چه توزیعی دارد؟

۱. χ^2_1 ۲. χ^2_3

۳. کی‌دو غیرمرکزی با سه درجه آزادی و نامرکزیت $6\sigma^2$ ۴. کی‌دو غیرمرکزی با سه درجه آزادی و نامرکزیت $14\sigma^2$

۱۲- اگر $X_1,...,X_n$ یک نمونه تصادفی به حجم n از توزیع $N_p(\mu,\Sigma)$ باشد. با فرض $p=1$ و نامعلوم بودن بردار میانگین، کدام گزینه توزیع آماره بسنده Σ است؟

۱. ویشارت با $(n-1)$ درجه آزادی
۲. خی‌دو با n درجه آزادی
۳. خی‌دو با $(n-1)$ درجه آزادی
۴. ویشارت با n درجه آزادی

۱۳- دو سری داده تصادفی به اندازه‌ی 18 از نرمال استاندارد تولید کرده‌ایم و مقدار ضریب همبستگی بین این دو سری داده، $r=0/6$ به‌دست آمده است. مقدار آماره آزمون t برای آزمودن $H_0:\rho=0$ در مقابل $H_1:\rho\neq 0$ برابر کدام گزینه است؟

۱. 0/92
۲. 0/826
۳. 3
۴. 8/93

۱۴- اگر $X\sim N_4(0,\Sigma)$ و $\Sigma=\begin{bmatrix}4&1&1&1\\1&4&1&1\\1&1&4&1\\1&1&1&4\end{bmatrix}$. در این صورت مقدار $\rho_{12.34}$ کدام گزینه است؟

۱. 0/93
۲. 0/16
۳. 0/85
۴. 0/01

۱۵- در همبستگی چندگانه بین X_1 و X_2 چه چیز محاسبه می‌شود؟

۱. مجموع همبستگی بین X_1 و تک تک مولفه‌های X_2
۲. ماکسیمم قدرمطلق ضریب همبستگی بین ترکیب خطی X_1 و ترکیب خطی X_2
۳. ضریب همبستگی X_1 و یک ترکیب خطی خاص از X_2
۴. همبستگی بین X_1 و هر ترکیب خطی از X_2

۱۶- کدام گزینه اندازه همبستگی دو مجموعه از متغیرهای تصادفی است؟

۱. چندگانه
۲. جزیی
۳. ساده
۴. متعارف

۱۷- فرض کنید $X=\begin{bmatrix}8&6&10\\3&9&6\end{bmatrix}$ ماتریس داده‌های مربوط به یک نمونه تصادفی به اندازه‌ی 3 از توزیع نرمال دو متغیره باشد. اگر $\mu_0=\begin{bmatrix}9\\5\end{bmatrix}$. آنگاه مقدار آماره T^2 هتلینگ برابر کدام گزینه است؟

۱. $\frac{9}{16}$
۲. $\frac{9}{7}$
۳. $\frac{7}{9}$
۴. $\frac{16}{9}$

۱۸- برای آزمون بردار میانگین در حالت چند متغیره از جامعه نرمال ، اگر ماتریس کواریانس معلوم باشد توزیع آماره آزمون چیست؟

۱. کای اسکور ۲. اف ۳. نرمال ۴. تی

۱۹- طول بازه‌های اطمینان ..... از طول بازه‌های اطمینان ..... است.

۱. بون فرونی - T^2 کوتاهتر ۲. T^2 - بون فرونی کوتاهتر

۳. برای واریانس - برای میانگین ۴. برای میانگین - برای واریانس

۲۰- با فرض $S=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ مقدار آماره آزمون برای $H_0:\Sigma=\sigma^2 I_2$ کدام گزینه است؟

۱. 0/32 ۲. 23/61 ۳. 6/83 ۴. -1/13

۲۱- کدام گزینه درست است؟

۱. T^2 هتلینگ تحت تبدیلات خطی پایا نیست. ۲. در مدل کواریانس بین طبقه‌ای $\hat{\sigma}^2=\frac{trS}{\sqrt{p}}$

۳. $SStr$ ماتریسی با دترمینان مثبت است. ۴. $SStr$ ماتریس معین نامنفی است.

۲۲- کدامیک از تبدیلات زیر بر روی داده‌ها سودمند است و مقادیر بزرگ X را افزایش می‌دهد؟

۱. $Ln\,X$ ۲. X^3 ۳. $\frac{1}{X}$ ۴. $\sqrt[4]{X}$

۲۳- در کدام آزمون بزرگ شدن آماره‌ی $D=\sup_x|F_n(x)-F_H(x)|$، منجر به رد فرضیه نرمال می شود؟

۱. کولموگروف ۲. باکس-کاکس ۳. جان-دراپر ۴. شاپیرو-ویلک

۲۴- متغیر $\frac{5(1-\sqrt{U_{2,4,6}})}{4\sqrt{U_{2,4,6}}}$ دارای چه توزیعی است؟

۱. $F_{5,4}$ ۲. $F_{4,8}$ ۳. $F_{8,10}$ ۴. $F_{4,12}$

۲۵- اگر $\Sigma=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 6\end{bmatrix}$ آنگاه مقدار $\rho^2_{1.23}$ برابر کدام گزینه است؟

۱. $\frac{38}{23}$ ۲. $\frac{4}{23}$ ۳. $\frac{4\sqrt{2}}{23}$ ۴. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

سوالات تشریحی

۱- ثابت کنید، برای هر ماتریس مربع A ، داریم: $E(X'AX) = tr(A\Sigma) + \mu' A\mu$ ۱،۰۰ نمره

۲- اگر $X \sim N_2(\mu, \sigma^2 I_p)$ ، تحت چه شرایطی مولفه‌های بردار تصادفی $Y = \begin{bmatrix} a'X \\ b'X \end{bmatrix}$ از یکدیگر مستقل خواهند شد ۱،۰۰ نمره

که در آن a و b بردارهایی با مولفه‌های اعداد ثابت است.

۳- اگر $X \sim N_4(\mu, \Sigma)$ و $\mu = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $\Sigma = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ باشد. مطلوبست: ۲،۰۰ نمره

الف-توزیع شرطی $X_1 = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_3 \end{bmatrix}$ به شرط $X_2 = \begin{bmatrix} X_2 \\ X_4 \end{bmatrix}$

ب- $E(X_1 X_3 | X_2 = X_4 = 0)$

۴- ناحیه بحرانی در آزمون $H_0: \mu = \mu_0$ با Σ معلوم را تعیین کنید. ۱،۰۰ نمره

۵- دو سری داده به اندازه 10 از نرمال استاندارد تولید شده و ماتریس کواریانس نمونه‌ای آن ۲،۰۰ نمره

$S = \begin{bmatrix} 0/29141 & -0/47425 \\ -0/47425 & 1/37003 \end{bmatrix}$ به دست آمده است. در سطح خطای پنج درصد فرضیه $\Sigma = I_2$ را بیازمایید.

(عدد جدول کی دو 7/8147)

شماره سوال	پاسخ صحیح
1	الف
2	ج
3	ب
4	الف
5	د
6	ب
7	ج
8	ج
9	ب
10	الف
11	د
12	ج
13	ج
14	ب
15	ب
16	د
17	ج
18	الف
19	الف
20	ج
21	د
22	ب
23	الف
24	ج
25	ب

۱- بر اساس بردار میانگین $\mu = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$ و ماتریس کوواریانس $\Sigma = \begin{bmatrix} ۴ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۴ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۴ \end{bmatrix}$. کمیت $E(X_۱ X_۳)$ برابر با کدام گزینه است؟

۱. ۳ ۲. ۲- ۳. ۲ ۴. ۶

۲- اگر $M_X(t) = \left|I - tt'\right|^{-\frac{n}{۲}}$، آنگاه تابع مولد گشتاور $Y = AX + b$ کدام است؟

۱. به ابعاد ماتریس A بستگی دارد.

۲. $\left|I - tA'At'\right|^{-\frac{n}{۲}}$

۳. $e^{\frac{n}{۲}t'b}\left|I - tAA't'\right|^{-\frac{n}{۲}}$

۴. $e^{t'b}\left|I - A'tt'A\right|^{-\frac{n}{۲}}$

۳- کدام گزینه نادرست است؟

۱. مقادیر ویژه ماتریس همبستگی ممکن است منفی شود.

۲. ماتریس همبستگی یک ماتریس معین مثبت است.

۳. $nE(S_n) = (n-۱)\Sigma$

۴. $\sum_{i=۱}^{n}(X_i - \bar{X})(\bar{X} - \mu)' = ۰$

۴- اگر $\Sigma = \begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۴ & ۸ \end{bmatrix}$ آنگاه ماتریس همبستگی (ρ) کدام گزینه است؟

۱. $\begin{bmatrix} ۱ & ۸ \\ ۸ & ۱ \end{bmatrix}$

۲. $\begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۴ & ۱ \end{bmatrix}$

۳. $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$

۴. $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$

۵- اگر $\begin{bmatrix} X_۱ \\ X_۲ \end{bmatrix} \sim N(\begin{bmatrix} \mu_۱ \\ \mu_۲ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ & \rho \\ \rho & ۱ \end{bmatrix})$، آنگاه توزیع $\begin{bmatrix} X_۱ + X_۲ \\ X_۱ - X_۲ \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱. $N(\begin{bmatrix} \mu_۱ + \mu_۲ \\ \mu_۱ - \mu_۲ \end{bmatrix}, ۲\begin{bmatrix} ۱+\rho & ۰ \\ ۰ & ۱-\rho \end{bmatrix})$

۲. $N(\begin{bmatrix} \mu_۱ + \mu_۲ \\ ۰ \end{bmatrix}, ۲(۱+\rho)I_۲)$

۳. $N(\begin{bmatrix} \mu_۱ + \mu_۲ \\ ۰ \end{bmatrix}, ۲(۱-\rho)I_۲)$

۴. $N(\begin{bmatrix} \mu_۱ - \mu_۲ \\ \mu_۱ + \mu_۲ \end{bmatrix}, ۲\begin{bmatrix} ۱-\rho & ۰ \\ ۰ & ۱+\rho \end{bmatrix})$

۶- اگر $\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \sim N(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \end{bmatrix})$ باشد .آنگاه $E(X_1 + X_2 | X_2 + X_3 = 2)$ برابر کدام گزینه است؟

۱. ۲ ۲. ۴ ۳. صفر ۴. $1 + X_2$

۷- فرض کنید، $X \sim N_3(\mu, \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix})$ ، کدامیک از متغیرهای زیر از یکدیگر مستقلند؟

۱. X_1, X_2 ۲. X_1, X_3

۳. $X_2, X_1 + X_3$ ۴. ۲ و ۳ هر دو صحیح است.

۸- اگر $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \sim N(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix})$ ، مقدار $Var(X_1 + X_3 | X_2 = x_2)$ برابر کدام گزینه است؟

۱. $\frac{x_2 + 11}{3}$ ۲. ۸ ۳. $\frac{33}{3}$ ۴. $\frac{32}{3}$

۹- اگر $X \sim N_p(0, \sigma^2 I_p)$ باشد. آنگاه $\frac{X'X}{\sigma^2}$ دارای چه توزیعی است؟

۱. χ^2_p ۲. t_p ۳. χ^2_{p-1} ۴. ویشارت

۱۰- اگر $\Sigma = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$ و $S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$ ، آنگاه برآورد درستنمایی ماکزیمم σ^2 کدام است؟

۱. $\frac{S_{11} + S_{21}}{2}$ ۲. $\frac{S_{11} + S_{22}}{2}$ ۳. $S_{11} + S_{22}$ ۴. $\frac{1}{2}(S_{11}S_{22})$

۱۱- اگر $\langle X \rangle = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 4 \\ 6 & 4 & 7 & 7 \end{pmatrix}$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع $N_2(\mu, \Sigma)$ باشد آنگاه برآورد درستنمایی ماکزیمم Σ کدام گزینه است؟

۱. $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$ ۲. $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ۳. $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$ ۴. $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

۱۲- بر اساس نمونه‌ای تصادفی به حجم ۱۰ از بردار تصادفی X بردار میانگین $\overline{X}=\begin{bmatrix}۲\\۳\end{bmatrix}$ به‌دست آمده است . با فرض $\mu=\begin{bmatrix}۵\\۱\end{bmatrix}$ و $V=\begin{bmatrix}۱&۲\\۲&۴\end{bmatrix}$ ، مقدار $\sum_{i=۱}^{۱۰}(X_i-\mu)(X_i-\mu)'$ کدام است؟

۱. $\begin{bmatrix}۱۹&۲۶\\۲۶&۴۰\end{bmatrix}$ ۲. $\begin{bmatrix}۹۱&۲۶\\۲۶&۴۴\end{bmatrix}$ ۳. $\begin{bmatrix}۹۱&۵۸\\۵۸&۴۴\end{bmatrix}$ ۴. $\begin{bmatrix}۴۴&۹۱\\۶۲&۶۲\end{bmatrix}$

۱۳- اگر $\Sigma=\begin{pmatrix}۲&۱&۱\\۱&۴&۱\\۱&۱&۶\end{pmatrix}$ آنگاه $\rho^۲_{۱.۲۳}$ چقدر است؟

۱. $\frac{۴}{۲۳}$ ۲. $\frac{۳۸}{۲۳}$ ۳. $\frac{۴\sqrt{۲}}{۲۳}$ ۴. $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۱۴- اگر $X\sim N_۴(۰,\Sigma)$ که در آن $\Sigma=\begin{bmatrix}۴&۱&۱&۱\\۱&۴&۱&۱\\۱&۱&۴&۱\\۱&۱&۱&۴\end{bmatrix}$ است. در این صورت $\rho_{۱۲.۳۴}$ کدام است؟

۱. ۰/۹۳ ۲. ۰/۸۵ ۳. ۰/۰۱ ۴. ۰/۱۶

۱۵- بر اساس نمونه‌ای تصادفی به حجم ۲۵ از $X=\begin{bmatrix}X_۱&X_۲&X_۳\end{bmatrix}'$ ، ماتریس کواریانس نمونه‌ای $S=\begin{bmatrix}۷&۴&-۱\\۴&۶&۲\\-۱&۲&۹\end{bmatrix}$ به‌دست آمده است. مقدار آماره F برای فرض $\rho_{۱.۲۳}$ مساوی با صفر برابر کدام گزینه است؟

۱. ۰/۳۱۲ ۲. ۲۱/۳ ۳. ۳/۱۲ ۴. ۲/۱۳

۱۶- برای آزمون بردار میانگین در حالت چندمتغیره از جامعه نرمال، اگر ماتریس کواریانس معلوم باشد توزیع آماره آزمون کدام است؟

۱. نرمال ۲. تی ۳. کای اسکور ۴. اف

۱۷- کدام گزینه نادرست است؟

۱. در مدل کوواریانس بین طبقه‌ای داریم: $\hat{\sigma}^{۲} = \frac{trs}{\sqrt{p}}$

۲. طول بازه‌های اطمینان بونفرونی از $T^{۲}$ هتلینگ کوتاهتر است.

۳. $T^{۲}$ هتلینگ تحت تبدیلات خطی پایاست.

۴. برای نمونه به اندازه n تحت فرض $\rho = \rho_{\circ}$ ، توزیع $\frac{۱}{۲}\ln\frac{۱+r}{۱-r}$ ، نرمال است.

۱۸- کدام گزینه در مورد SS_{tr} ، صحیح نمی‌باشد؟

۱. بعد آن همواره p است.

۲. ماتریسی با دترمینان مثبت است.

۳. متقارن است.

۴. ماتریس معین غیرمنفی است.

۱۹- مشاهدات $\begin{pmatrix}۳\\-۴\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-۴\\۲\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}۴\\۲\end{pmatrix}$ از توزیع $N_{۲}(\begin{pmatrix}\mu_{۱}\\\mu_{۲}\end{pmatrix}, \Sigma)$ ، به‌دست آمده است. مقدار $T^{۲}$ هتلینگ برای آزمون $H_{\circ}: \mu = \circ$ کدام است؟

۱. ۰/۰۶۳

۲. ۰/۰۷۸

۳. ۰/۱۸۷۵

۴. ۳/۰۶

۲۰- فرض کنید چهار نوع برنج در ۲۰ کرت کاشته می‌شود به طوری که هر نوع به طور تصادفی به پنج کرت اختصاص داده می‌شود. در این‌صورت برای آزمون برابری میانگین‌های چهار نوع برنج، درجه آزادی خطا و تیمار به ترتیب کدام است؟

۱. ۱۶ و ۳

۲. ۳ و ۱۶

۳. ۳ و ۱۹

۴. ۱۹ و ۳

۲۱- متغیر تصادفی $U_{p,۲,f}$ با کدام متغیر هم‌توزیع است؟

۱. $U_{p,۲,f-۲-p}$

۲. $U_{۲,p,f+۲-p}$

۳. $U_{p,۲,f-۲}$

۴. $U_{۲,p,f+۲}$

۲۲- متغیر تصادفی $\frac{۵(۱-\sqrt{U_{۲,۴,۶}})}{۴\sqrt{U_{۲,۴,۶}}}$ دارای چه توزیعی است؟

۱. $F_{۴,۸}$

۲. $F_{۴,۱۲}$

۳. $F_{۵,۴}$

۴. $F_{۸,۱۵}$

۲۳- کدام گزینه ، برآورد چولگی متغیر تصادفی X را آشکار می‌کند؟

۱. $\phi^{-1}(\frac{i-0/5}{n})$

۲. $\phi^{-1}(\frac{i+\frac{3}{8}}{n+\frac{1}{4}})$

۳. $\frac{n\sum(X_i-\bar{X})^4}{(\sum(X_i-\bar{X})^2)^2}$

۴. $\frac{n(\sum(X_i-\bar{X})^3)^2}{(\sum(X_i-\bar{X})^2)^3}$

۲۴- برای داده‌های یک متغیره $X_1,\dots,X_n$ ، با میانگین هندسی $g_1=\prod_{i=1}^{n}X_i^{\frac{1}{n}}$ ، تبدیل توانی برای داده‌های مثبت کدام گزینه است؟

۱. $\begin{cases}\frac{X_i^{\lambda}+1}{\lambda g_1^{\lambda-1}} & ;\ \lambda\neq 0\\ g_1 Ln(X_i) & ;\ \lambda=0\end{cases}$

۲. $\begin{cases}\frac{X_i^{\lambda}-1}{\lambda g_1^{\lambda-1}} & ;\ \lambda\neq 0\\ g_1 Ln(X_i-1) & ;\ \lambda=0\end{cases}$

۳. $\begin{cases}\frac{X_i^{\lambda}}{\lambda g_1^{\lambda-1}} & ;\ \lambda\neq 0\\ g_1 Ln(X_i) & ;\ \lambda=0\end{cases}$

۴. $\begin{cases}\frac{X_i^{\lambda}-1}{\lambda g_1^{\lambda-1}} & ;\ \lambda\neq 0\\ g_1 Ln(X_i) & ;\ \lambda=0\end{cases}$

۲۵- در کدامیک از آزمون‌های زیر، با بزرگ شدن آماره $D=\sup_x\left|F_n(x)-F_H(x)\right|$ فرضیه نرمال رد می‌شود؟

۱. شاپیرو - ویلک ۲. جان - دراپر ۳. کولموگورف ۴. باکس - کاکس

سوالات تشریحی

۱- با فرض $E(X)=\mu$ و $Cov(X)=\Sigma$ ، برای یک ماتریس مربع A داریم: ۲/۰۰ نمره

$$E(X'AX)=tr(A\Sigma)+.....$$

الف- جای خالی را تکمیل کنید.

ب- به کمک الف و مفروضات زیر، مقدار $E(X'AX)$ را بیابید.

$$\mu=\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix},\ \Sigma=\begin{bmatrix}4&1&0\\1&2&1\\0&1&3\end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix}1&-3&-8\\-3&2&-6\\-8&-6&3\end{bmatrix}$$

۲- فرض کنید، $X \sim N_4(\mu, \Sigma)$ با بردار میانگین $\mu = [1 \quad 3 \quad 2 \quad 1]'$ و با ماتریس کواریانس ۲/۰۰ نمره

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

است. مطلوبست:

الف- توزیع شرطی $X_1 = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_3 \end{bmatrix}$ به شرط $X_2 = \begin{bmatrix} X_2 \\ X_4 \end{bmatrix} = x_2$.

ب- $E(X_1 X_3 | X_2 = X_4 = 0)$

۳- ثابت کنید، اگر $X \sim N_p(\mu, I_p)$ ، آنگاه $X'A_1X$ و $X'A_2X$ مستقلند اگر و تنها اگر $A_1 A_2 = 0$. ۱/۰۰ نمره

۴- ۱/۰۰ نمره

نشان دهید ، برای ماتریس کوواریانس $\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 \\ & 1 & \rho & \rho^2 \\ & & 1 & \rho \\ & & & 1 \end{bmatrix}$ ، مقدار ضریب همبستگی جزیی $\rho_{12.34}$

برابر $\dfrac{\rho}{\sqrt{1+\rho^2}}$ است.

۵- ۱/۰۰ نمره

فرض کنید $X = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 10 \\ 3 & 9 & 6 \end{bmatrix}$ ماتریس داده‌های مربوط به یک نمونه تصادفی ۳ تایی از توزیع نرمال دو متغیره باشد. مطلوبست:

مقدار آماره هتلینگ برای آزمون $H_0 : \mu = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \end{bmatrix}$.

شماره سوال	پاسخ صحیح
1	ب
2	د
3	الف
4	ج
5	الف
6	الف
7	ب
8	د
9	الف
10	ب
11	ج
12	ج
13	الف
14	د
15	ب
16	ج
17	الف
18	ب
19	ج
20	الف
21	ب
22	د
23	د
24	د
25	ج

۱- اگر ماتریس c مربعی نباشد، برای اینکه ماتریس تبدیل $Y = cX$ به صورت مربعی درآید، از چه روشی استفاده می کنیم؟

۱. تبدیلات متعامد
۲. متغیرهای کمکی
۳. خاصیت استقلال
۴. خارج کردن متغیرهای اضافی

۲- اگر X_2, X_1 مولفه های مستقل بردارهای تصادفی X باشند و $Y_1 = X_1 + X_2$, $Y_2 = X_1 - X_2$. قدر مطلق ژاکوبی تبدیل برابر است با:

۱. $-\frac{1}{4}$
۲. $\frac{1}{4}$
۳. $-\frac{1}{2}$
۴. $\frac{1}{2}$

۳- اگر M یک ماتریس با ابعاد $p \times n$ باشد و C, A ماتریس های ثابت باشند ، کدامیک از گزینه های زیر نادرست است؟

۱. وقتی M مربعی است $E(tr(M)) = tr(E(M))$
۲. $E(AX + B) = AE(X) + B$
۳. وقتی M مربعی نیست $E(tr(M)) = tr(E(M))$
۴. $E(M') = E(M)'$

۴- کدامیک از گزینه های زیر نمی تواند مقادیر ویژه ماتریس کوواریانس Σ باشد؟

۱. ۲و۴و۶
۲. ۱و۳و۵
۳. ۲-و۴-و۶-
۴. ۱/۵و۳/۵و۵/۵

۵- فرض کنید U, V بردارهای تصادفی به ترتیب با ابعاد p, q با بردارهای میانگین η, γ باشند. ماتریس کوواریانس بین این دو بردار چند بعدی است؟

۱. $p \times q$
۲. $p \times 1$
۳. $1 \times q$
۴. $q \times p$

۶- مجذور فاصله ماهالانوبیس بین بردار X و بردار میانگین μ در تابع چگالی $N_p(\mu, \Sigma)$ کدامست؟

۱. $-\frac{1}{2}(X-\mu)'\Sigma^{-1}(X-\mu)$
۲. $(X-\mu)'\Sigma^{-1}(X-\mu)$
۳. $-\frac{1}{2}(X-\mu)'\Sigma(X-\mu)$
۴. $(X-\mu)'\Sigma(X-\mu)$

۷- اگر $Z \sim N_p(0, I_p)$ باشد، تابع مولد گشتاورهای آن برابر است با:

۱. $e^{t'\mu+\frac{1}{2}t'\Sigma t}$ ۲. $e^{-\frac{1}{2}t'\Sigma t}$ ۳. $e^{\frac{1}{2}t't}$ ۴. $e^{t'\mu-\frac{1}{2}t'\Sigma t}$

۸- اگر $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_{ii})$ $i = 1,2,...,p$ باشد، برای یافتن توزیع های X_1+X_2, X_1-X_2 از چه بردارهایی استفاده می کنیم؟

۱. $a' = (1,0,0,...,0)$ ۲. $a' = (1,-1,0,...,0)$ ۳. $a' = (1,-1,0,...,0)$ ۴. $a' = (1,0,0,...,-1)$

$a' = (1,1,0,...,0)$ $a' = (1,1,0,...,0)$ $a' = (1,0,0,...,0)$ $a' = (1,0,0,...,1)$

۹-

فرض کنید $X \sim N_3(\mu, \Sigma)$ که در آن $\Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ باشد، آنگاه کدام گزینه نادرست است؟

۱. X_3, X_1 مستقل هستند. ۲. X_3, X_2 مستقل هستند.

۳. $X_3, (X_1, X_2)'$ مستقل هستند. ۴. X_1, X_2 مستقل هستند.

۱۰- اگر $X_1, X_2, ..., X_n$ یک نمونه تصادفی از $N_p(\mu, \Sigma)$ باشد، مقدار ماکسیمم تابع درستنمایی برابر است با:

۱. $[2e\pi\frac{n-1}{n}]^{-\frac{np}{2}}|s|^{-\frac{n}{2}}$ ۲. $\hat{\Sigma} = \frac{n-1}{n}S, \hat{\mu} = \bar{X}$ ۳. $-\frac{1}{2}tr\Sigma^{-1}(A)$ ۴. $\sum_{i=1}^{p} c_i - p - \sum_{i=1}^{p} \ln c_i$

۱۱- اگر $X \sim N_n(\mu, I_n)$ باشد ، توزیع $\sum(X_i - \bar{X})^2$ برابر است با:

۱. کای اسکور $n-1$

۲. کای اسکور نامرکزی با $n-1$ درجه آزادی و پارامتر نامرکزیت $\mu' A \mu$ که در آن $A = I_n - \frac{1}{n}LL'$

۳. کای اسکور نامرکزی با $n-1$ درجه آزادی و پارامتر نامرکزیت $\mu'\Sigma^{-1}\mu$.

۴. $N_n(\mu, I_n - \frac{1}{n}LL')$

۱۲- اگر V دارای توزیع ویشارت مرکزی با m درجه آزادی باشد، آنگاه

۱. $cVc' \sim W_{m-1}(c\Sigma c')$

۲. برای V غیر مثبت قطعی و $m \le p$ تابع چگالی وجود ندارد.

۳. اگر $\Sigma = \sigma^2, p = 1$ تابع ویشارت به توزیع کای اسکور با m درجه آزادی تبدیل می شود.

۴. اگر $V_1 \sim W_{m_1}(\Sigma), V_2 \sim W_{m_2}(\Sigma)$ باشد آنگاه $V_1 + V_2 \sim W_{m_1+m_2}(\Sigma)$

۱۳- اگر $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ نمونه ای تصادفی از توزیع $N_2(\mu, \Sigma)$ باشند، برآورد درستنمایی ماکسیمم Σ کدامست؟

۱. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ۲. I_2 ۳. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ۴. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

۱۴- دو سری داده تصادفی به حجم ۱۰ از نرمال استاندارد داریم و مقدار ضریب همبستگی بین این دو سری $r = 0.299$ به دست آمده است. مقدار آماره آزمون برای فرض $H_0 : \rho = 0$ برابر است با:

۱. ۲/۸۳۶ ۲. ۲/۱۷ ۳. ۳/۲۶ ۴. ۰/۸۲۶

۱۵- برآورد ρ وقتی که $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma^2$ باشد در حالت $p = 2$ برابر است با:

۱. $\hat{\rho} = \dfrac{s_{12}}{s_{11} + s_{22}}$ ۲. $\hat{\rho} = \dfrac{2s_{12}}{s_{11} + s_{22}}$ ۳. $\hat{\rho} = \dfrac{s_{12}}{\sqrt{s_{11}}\sqrt{s_{22}}}$ ۴. $\hat{\rho} = \dfrac{2s_{12}}{\sqrt{s_{11}}\sqrt{s_{22}}}$

۱۶- در برآورد ρ تحت مدل کوواریانس بین طبقه ای چه زمانی از برآورد اصلاح شده استفاده می کنیم؟

۱. وقتی که برآوردگر ضریب همبستگی در فضای پارامتری قرار نگیرد.

۲. وقتی که برآوردگر ضریب همبستگی همواره مثبت باشد..

۳. وقتی که مقادیر ویژه ماتریس کوواریانس $\lambda_2 = 1 + \rho, \lambda_1 = 1 - \rho$ باشند.

۴. وقتی که $tr\Sigma = p\sigma^2$ باشد.

۱۷- یک ناحیه اطمینان $\%(1-\alpha)$ برای μ از جامعه نرمال p متغیره برابر است با:

۱. $n(\mu - \bar{X})' s^{-1} (\mu - \bar{X}) \le \dfrac{(n-1)p}{(n-p)} F_{n-p,p,\alpha}$ ۲. $n(\bar{X} - \mu)' s^{-1} (\mu - \bar{X}) \le \dfrac{(n-1)p}{(n-p)} F_{n-p,p,\alpha}$

۳. $n(\bar{X} - \mu)' s^{-1} (\bar{X} - \mu) \le \dfrac{(n-1)p}{(n-p)} F_{p,n-p,\alpha}$ ۴. $n(\mu - \bar{X})' s^{-1} (\mu - \bar{X}) \le \dfrac{(n-1)p}{(n-p)} F_{p,n-p,\alpha}$

۱۸- آماره آزمون برای عددثابت a و σ^2 نامعلوم در فاصله اطمینان $\%(1-\alpha)$ برای $\mu_z = a'\mu$ دارای چه توزیعی است؟

۱. $F_{p,n-p,\alpha}$ ۲. $t_{n-p,\alpha}$ ۳. $t_{n-1,\alpha}$ ۴. $t_{n-2,\alpha}$

۱۹- بازه های اطمینان T^2 با افزایش p

۱. کوچک و با افزایش n کوچک می شود.
۲. بزرگ و با افزایش n بزرگ می شود.
۳. کوچک و با افزایش n بزرگ می شود.
۴. بزرگ و با افزایش n کوچک می شود.

۲۰- $(n_1+n_2-2)S_p$ دارای چه توزیعی است؟

۱. $t_{n_1+n_2-2}$
۲. $W_{n_1+n_2-2}(\Sigma)$
۳. $W_{n_1+n_2-2}(\Sigma_1+\Sigma_2)$
۴. $W_{n_1+n_2}(\Sigma_1+\Sigma_2)$

۲۱- در آنالیز واریانس چند متغیره یک راهه کدام مورد زیر نادرست است؟

۱. SSE یک ماتریس معین مثبت است.
۲. دترمینان $SStr$ برابر صفر است.
۳. SSE دارای توزیع ویشارت با $n-J$ درجه آزادی است.
۴. $SStr$ همواره یک ماتریس معین مثبت است.

۲۲- $\frac{|SSE|}{|SSE+SStr|}$ برابر است با:

۱. $U_{p,m,f} > c$ ۲. $U_{p,J-1,n-J} > c$ ۳. $U_{p,m-1,f-m} > c$ ۴. $U_{f,J-1,n-J} > c$

۲۳- در آزمون $H_0 : \Sigma = s$ چند پارامتر به طور همزمان مورد آزمون قرار می گیرد؟

۱. $\frac{p(p-1)}{2}$ ۲. $\frac{p(p+2)}{2}$ ۳. p^2 ۴. $(p-1)^2$

۲۴- برای اعتماد به نمودار $Q-Q$ در توزیع نرمال چند نمونه لازم است؟

۱. حداقل ۳۰ نمونه
۲. حداقل ۵۰نمونه
۳. حداقل ۲۰نمونه
۴. حداقل ۶۰نمونه

۲۵- ضرایب همبستگی r را چگونه به توزیع تقریبا نرمال تبدیل می کنیم؟

۱. با گرفتن ریشه دوم
۲. با تبدیل لجیت
۳. با تبدیلات توانی پیشنهادی باکس-کاکس
۴. با تبدیل Z فیشر

سوالات تشریحی

۱- فرض کنید $X=(X_1,X_2,\dots,X_p)'$ ، $a=(a_1,a_2,\dots,a_p)'$. اگر $Y=a'X$ باشد، $\mathrm{var}(Y)$ را به دست آورید. ۱،۴۰ نمره

۲- اگر $X=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}\sim N_p\left(\begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\Sigma_{11}&\Sigma_{12}\\\Sigma_{21}&\Sigma_{22}\end{pmatrix}\right)$ باشد، به قسمی که $|\Sigma_{22}|>0,|\Sigma_{11}|>0$ باشد توزیع شرطی X_2 به شرط $X_1=x_1$ را بیابید. ۱،۴۰ نمره

۳- قضیه حد مرکزی در حالت p متغیره را بنویسید. ۱،۴۰ نمره

۴- فرض کنید ماتریس داده های مربوط به یک نمونه تصادفی به اندازه $n=3$ از جامعه نرمال دو متغیره به صورت زیر به دست آمده باشد ۱،۴۰ نمره

$$\langle X\rangle=\begin{bmatrix}8&6&10\\3&9&6\end{bmatrix}$$

. اگر $\mu_0=(9\quad 5)'$ باشد، مطلوبست مقدار T^2 و تعیین توزیع T^2.

۵- بیضی گون پیش بینی کننده برای X با Σ,μ نامعلوم را بنویسید. ۱،۴۰ نمره

۱- اگر $E(X)=\begin{pmatrix}۱\\۲\end{pmatrix}$ و $\Sigma=\begin{pmatrix}۴ & ۲\\۲ & ۶\end{pmatrix}$ آنگاه مقدار $E(XX')$ برابر است با:

۱. $\begin{pmatrix}4 & 5\\5 & 10\end{pmatrix}$ ۲. 10 ۳. 15 ۴. $\begin{pmatrix}5 & 4\\4 & 10\end{pmatrix}$

۲- اگر $N_4(\mu,\sum)$ باشد مجموع 8 مشاهده مستقل از این توزیع : چه توزیعی دارد؟

۱. همان توزیع ۲. $N_4(8\mu,64\sum)$ ۳. $N_4(8\mu,8\sum)$ ۴. $N_4(\mu,\frac{1}{8}\sum)$

۳- کدام گزینه در مورد ماتریس همبستگی ρ برای Pسطر و P ستون <u>صحیح نیست؟</u>

۱. $Trace(\rho)=P$ ۲. یک ماتریس معین مثبت است.

۳. دترمینان آن ضریبی از دترمینان ماتریس کواریانس است. ۴. می تواند نامتقارن باشد.

۴- اگر $X\sim N_P(\mu,\sum)$ انگاه تابع مولد گشتاور آن عبارت است از:

۱. $e^{t'\mu+t'\sum t}$ ۲. $e^{t'\mu+\frac{1}{2}t'\sum t}$ ۳. $e^{t'\mu+\frac{1}{2}t\sum t'}$ ۴. $e^{\mu+\frac{1}{2}t'\sum t}$

۵- برای هر ترکیب خطی $Y=b'X$ اگر داشته باشیم $X\sim N_P(\mu,\sum)$ انگاه :

۱. $b'X\sim N_P(b\mu,\ b'\sum b)$ ۲. $b'X\sim N_P(b'\mu,\ b\sum b')$

۳. $b'X\sim N_P(b'\mu,\ b'\sum b)$ ۴. $b'X\sim N_P(b'\mu b,\ b'\sum b)$

۶- فرض کنید $X\sim N_۲(\mu,\begin{pmatrix}\sigma_{۱۱} & \sigma_{۱۲}\\\sigma_{۲۱} & \sigma_{۲۲}\end{pmatrix})$ ، تحت چه شرایطی $X_۱-X_۲$ و $X_۱+X_۲$ مستقل هستند؟

۱. $\sigma_{۱۱}=\sigma_{۲۲}$ ۲. $\sigma_{۲۱}=\sigma_{۱۲}$ ۳. $\sigma_{11}=\sigma_{21}$ ۴. $\sigma_{۲۲}=\sigma_{۲۱}$

۷- کدام کمیت با انجام تبدیل $\mathbf{Y}=\mathbf{AX}+\mathbf{b}$ تغییری <u>نمی کند؟</u>

۱. ماتریس کوواریانس ۲. بردار میانگین ۳. مقدار هتلینگ ۴. ماتریس همبستگی

۸- اگر $X=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}\sim N_2(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4&1\\1&16\end{pmatrix})$ باشد، $E(X_1|X_2=4)$ کدام است؟

۱. $\frac{9}{8}$ ۲. $\frac{8}{9}$ ۳. $\frac{7}{8}$ ۴. ۸

۹- اگر $X\sim N_p(\mu,\Sigma)$ آنگاه $(X-\mu)'\sum^{-1}(X-\mu)$ دارای چه توزیعی است؟

۱. کای دو با p-1 درجه آزادی
۲. ویشارت با p درجه آزادی
۳. کای دو با p درجه آزادی
۴. ویشارت با p-1 درجه آزادی

۱۰- اگر $X\sim N_p(o,\Sigma)$ آنگاه توزیع XX' کدام است؟

۱. خی دو با p-1 درجه آزادی
۲. ویشارت با p درجه آزادی
۳. خی دو با p درجه آزادی
۴. ویشارت با ۱ درجه آزادی

۱۱- هرگاه مولفه های بردار X همگی دارای واریانس برابر و همبستگی مشترک معادل ρ باشند، ماتریس Σ به صورت ... :

۱. یک ماتریس قطری است.
۲. بستگی به توزیع بردار تصادفی دارد.
۳. $\rho\mathbf{I}_p$ است.
۴. $\Sigma=\sigma^2((1-\rho)\mathbf{I}_p+\rho\mathbf{LL}')$ است.

۱۲- اگر بخواهیم همبستگی بین هوش یک فرد و وزن او بیابیم و متغیر سن را بخواهیم لحاظ نکنیم از چه ضریب همبستگی بایستی استفاده کرد؟

۱. ضریب همبستگی پیرسن
۲. ضریب همبستگی متعارف
۳. ضریب همبستگی جزیی
۴. ضریب همبستگی ماتریسی

۱۳- مشاهدات $\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ از توزیع $X\sim N_2(\begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\end{pmatrix},\Sigma)$ به دست آمده است. مقدار T^2 برای آزمون $H_0:\mu=o$ چقدر است؟

۱. ۰،۰۶۳ ۲. ۰،۰۷۸ ۳. ۰،۱۸۷۵ ۴. ۳،۰۶

۱۴- فرض کنید برای سه متغیر X_1, X_2, X_3 داریم :
که همبستگی بین دو به دو این متغیر ها یکسان و برابر با ۰،۵ باشد. مطلوب است ضریب همبستگی جزیی بین دو متغیر اول و دوم به شرط متغیرسوم
$(\rho(X_1, X_2 | X_3))$؟

۱. ۰،۵ ۲. ۰،۳۳۳ ۳. ۰،۲۵ ۴. ۰،۱۷۵

۱۵- در روش ..... ترکیباتی خطی دو مجموعه از متغیره انتخاب می شوند به قسمی که همبستگی های بین متغیرهای جدید در مجموعه های مختلف ماکسیمم شوند.

۱. همبستگی جزیی
۲. مولفه های اصلی
۳. همبستگی چند گانه
۴. همبستگی متعارف (کانونی)

۱۶- مقدار امید ریاضی $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{X}_i\mathbf{X}_i'$ کدام است؟

۱. $\Sigma-\mu\mu'$
۲. $\Sigma+\frac{1}{n}\mu\mu'$
۳. $\Sigma+\mu\mu'$
۴. $\Sigma-\frac{1}{n}\mu\mu'$

۱۷- برای یک آزمون به اندازه $n=۱۰$ از یک جامعه دو متغیری $\overline{X}=\begin{bmatrix}۰/۵\\۱/۵\end{bmatrix}$ و $S=\begin{bmatrix}۲&۱\\۱&۲\end{bmatrix}$ یک فاصله اطمینان همزمان ۹۰ درصدی به روش فرونی برای بردار میانگین $\begin{bmatrix}\mu_1\\\mu_2\end{bmatrix}$ کدام است؟

۱. $\begin{pmatrix}-۰/۳۶&۱/۳۶\\۰/۴۹&۲/۵۱\end{pmatrix}$
۲. $\begin{pmatrix}-۰/۳۶&۱/۳۶\\۰/۶۴&۲/۳۶\end{pmatrix}$
۳. $\begin{pmatrix}-۰/۵۱&۱/۵۱\\۰/۴۹&۲/۵۱\end{pmatrix}$
۴. $\begin{pmatrix}-۰/۵۱&۱/۵۱\\-۰/۴۹&۲/۵۱\end{pmatrix}$

۱۸- در آزمون $H_0:\sum=S$ چند پارامتر به طور هم زمان مورد آزمون قرار می گیرند؟

۱. $\frac{p(p-1)}{2}$
۲. $\frac{p(p+1)}{2}$
۳. p^2
۴. $(p-1)^2$

۱۹- کدام گزینه در مورد ماتریس SSTr <u>درست نمی باشد؟</u>

۱. SSTr یک ماتریس معین غیر منفی است.
۲. SSTr متقارن است.
۳. SSTr یک ماتریس با دترمینان مثبت است.
۴. SSTr دارای بعدی برابر p است .

۲۰- کدامیک از آزمون های زیر برا رای ارزیابی نرمال بودن داده ها استفاده می کنند ؟

۱. کولموگروف
۲. شاپیرو- ویلک
۳. آزمون داربین واتسون
۴. گزینه های اول و دوم

۲۱- اگر داده های شمارشی نرمال نباشد به چه طریقی آنها را نرمال می کنند؟

۱. گرفتن ریشه سوم
۲. گرفتن ریشه دوم
۳. گرفتن لگاریتم از آنها
۴. به توان دو رسانیدن آنها

۲۲- در همبستگی چندگانه بین X_1 و X_2 چه چیز محاسبه می شود؟

۱. همبستگی بین X_1 و هر ترکیب خطی از X_2.

۲. مجموع همبستگی ها بین X_1 و تک تک مولفه های X_2.

۳. ضریب همبستگی بین X_1 و یک ترکیب خطی خاص از X_2.

۴. ماکسیمم قدر مطلق ضریب همبستگی بین ترکیب خطی X_1 و ترکیب خطی X_2.

۲۳- اگر $X_1, X_2, ..., X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع چند متغیره نرمال $N_p(\mu, \sum)$ باشد برآورد پارامتر $\sum$ کدام است؟

۱. S

۲. $\frac{1}{n-1}S$

۳. $\frac{n}{n-1}S$

۴. $\frac{n-1}{n}S$

۲۴- تحت چه شرایطی عبارت درجه دوم $X'AX$ دارای توزیع کای اسکور است؟

۱. متقارن باشد.

۲. خود توان باشد.

۳. x دارای توزیع نرمال باشد.

۴. هر سه مورد

۲۵- فرض کنید $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, ..., \mathbf{X}_{10}$ یک نمونه ی تصادفی از توزیعی با بردار میانگین μ و ماتریس کوواریانس Σ باشد آنگاه برای ماتریس کوواریانس نمونه ای $\mathbf{S}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{X}_i - \overline{\mathbf{X}})(\mathbf{X}_i - \overline{\mathbf{X}})'$ داریم.

۱. $E(\mathbf{S}_n) = \frac{9}{10}\Sigma$

۲. $E(\mathbf{S}_n) = \frac{10}{9}\Sigma$

۳. $E(\mathbf{S}_n) = \Sigma$

۴. باید توزیع نمونه ی تصادفی معلوم باشد.

سوالات تشریحی

۱- فرض کنید که X دارای توزیع $N_{۳}(\mu,\Sigma)$، با میانگین $\mu=\begin{pmatrix}۲\\-۳\\۱\end{pmatrix}$ و $\Sigma=\begin{pmatrix}۱&۱&۱\\۱&۳&۲\\۱&۲&۲\end{pmatrix}$ باشد. توزیع $۳X_{۱}-۲X_{۲}+X_{۳}$ را پیدا کنید؟ ۱،۴۰ نمره

۲- فرض کنید ماتریس داده های مربوط به یک نمونه تصادفی به اندازه $n=3$ از جامعه نرمال دو متغیره به صورت زیر بدست آمده باشد: ۱،۴۰ نمره

$\langle X\rangle=\begin{bmatrix}8&6&10\\3&9&6\end{bmatrix}$. اگر $\mu_0=(9\quad 5)'$ باشد، مطلوبست مقدار T^2 و تعیین توزیع T^2.

۳- فرض کنید $X=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}\sim N_p(\begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\Sigma_{11}&\Sigma_{12}\\\Sigma_{21}&\Sigma_{22}\end{pmatrix})$ باشد. توزیع شرطی X_2 به شرط $X_1=x_1$ را بیابید ؟ ۱،۴۰ نمره

۴- فرض کنید که $N_{۴}(۰,\Sigma)$ که در آن $\Sigma=\begin{bmatrix}۴&۱&۱&۱\\۱&۴&۱&۱\\۱&۱&۴&۱\\۱&۱&۱&۴\end{bmatrix}$ باشد. ضریب همبستگی جزیی $\rho_{۱۲/۳۴}$ را بدست آورید. ۱،۴۰ نمره

۵- ناحیه بحرانی در آزمون فرض $H_0:\mu=\mu_0$ با Σ معلوم را تعیین کنید. ۱،۴۰ نمره

شماره سوال	پاسخ صحیح
1	د
2	ج
3	د
4	ب
5	ج
6	الف
7	ج
8	الف
9	ج
10	د
11	د
12	ج
13	ج
14	ب
15	د
16	ج
17	ب
18	ب
19	ج
20	د
21	ب
22	د
23	د
24	د
25	ب

۱- فرض کنید X_1 و X_2 متغیرهای تصادفی مستقل بردار تصادفی X باشند. اگر $Y_1 = X_1 + X_2$ و $Y_2 = X_1 - X_2$ باشند. قدر مطلق ژاکوبین تبدیل چیست؟

۱. ۱ ۲. ۰ ۳. ۰/۵- ۴. ۰/۵

۲- اگر $E(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$ و $\sum = \begin{bmatrix} ۴ & ۲ \\ ۲ & ۶ \end{bmatrix}$ باشد. مقدار $E(XX')$ چیست؟

۱. ۳ ۲. ۱۰ ۳. ۱۵ ۴. $\begin{bmatrix} ۵ & ۴ \\ ۴ & ۱۰ \end{bmatrix}$

۳- اگر $E(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$ و $\sum = \begin{bmatrix} ۴ & ۲ \\ ۲ & ۶ \end{bmatrix}$ باشد. $E(\mathbf{X'X})$ چیست؟

۱. ۳ ۲. ۱۰ ۳. ۱۵ ۴. $\begin{bmatrix} ۵ & ۴ \\ ۴ & ۱۰ \end{bmatrix}$

۴- کدام مورد زیر درباره ماتریس همبستگی <u>صحیح نیست</u>؟

۱. ماتریس همبستگی یک ماتریس معین مثبت است.

۲. اثر آن برابربعد ستونها و یا سطرهای آن است.

۳. مقادیر ویژه آن ممکن است منفی باشد.

۴. دترمینان ماتریس همبستگی ضریبی از دترمینان ماتریس کوواریانس است.

۵- اگر $\varphi_1(x, y)$ و $\varphi_2(x, y)$ چگالی های نرمال دومتغیره با میانگین مشترک صفر و واریانس مشترک ۱ و ضریب همبستگی متفاوت ρ_1 و ρ_2 و $f(x, y) = \frac{1}{2}[\varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y)]$ یک چگالی توام باشند . تحت چه شرطی ناهمبستگی بین X و Y برقرار است؟

۱. همواره برقرار است. ۲. $\rho_1 = -\rho_2$

۳. هیچگاه برقرار نمی شود. ۴. $\rho_1 = \rho_2$

۶- اگر بردار تصادفی $\mathbf{X}$ به دو زیر بردار $\mathbf{X}_1$ و $\mathbf{X}_2$ و ماتریس کوواریانس آن به صورت $\begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}$ افرازشده باشند. تحت چه شرطی دو بردار $\mathbf{X}_1$ و $\mathbf{X}_2 + \mathbf{A}\mathbf{X}_1$ از یکدیگر مستقل خواهند بود؟($\mathbf{A}$ ماتریس است).

۱. $\Sigma_{12} - \mathbf{A}\Sigma_{11} = \mathbf{0}$ ۲. $\Sigma_{12} + \mathbf{A}\Sigma_{11} = \mathbf{0}$ ۳. $\Sigma_{12} - \mathbf{A}\Sigma_{22} = \mathbf{0}$ ۴. $\Sigma_{12} + \mathbf{A}\Sigma_{22} = \mathbf{0}$

۷- اگر $\mathbf{X}$ یک بردار تصادفی با مولفه های $x_1,\dots,x_4$ ودارای توزیع نرمال چهارمتغیره با بردار امیدریاضی $\begin{bmatrix} \frac{x_4}{2}-\frac{x_2}{3}+1.5 \\ 4-\frac{2x_2}{3} \end{bmatrix}$ و

۱. $\frac{45}{6}$ ۲. $\frac{19}{3}$ ۳. 1 ۴. 2

۸- اگر $\mathbf{X}$ یک بردار تصادفی با مولفه های $x_1,\dots,x_4$ ودارای توزیع نرمال چهارمتغیره با بردار امیدریاضی $\begin{bmatrix} \frac{x_4}{2}-\frac{x_2}{3}+1.5 \\ 4-\frac{2x_2}{3} \end{bmatrix}$ و

۱. $\frac{19}{3}$ ۲. $\frac{45}{6}$ ۳. 2 ۴. 1

۹- اگر $\mathbf{X}=(X_1,X_2,X_3)'$ یک بردار تصادفی دارای توزیع نرمال سه متغیره با $\mu=(1,2,3)'$ و $\mathbf{\Sigma}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

باشند. با فرض $\mathbf{X}_1=(X_1,X_2)'$ ، $\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{X}_1|X_3}$ کدام است؟

۱. $\begin{bmatrix} \frac{7}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ ۲. $\begin{bmatrix} \frac{7}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}$ ۳. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{7}{4} \\ \frac{7}{4} & 1 \end{bmatrix}$ ۴. $\mathbf{I}_2$

۱۰- اگر $\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\dots,\mathbf{X}_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $N_p(\mu\mathbf{L},\mathbf{\Sigma})$ باشند. واریانس $\frac{\mathbf{L}'\bar{\mathbf{X}}}{\mathbf{L}'\mathbf{L}}$ چیست؟

۱. $\frac{\mathbf{L}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{L}}{np^2}$ ۲. $\frac{\mathbf{L}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{L}}{p}$ ۳. $\frac{\mathbf{L}\mathbf{\Sigma}\mathbf{\Sigma}'}{np}$ ۴. نامشخص

۱۱- تحت چه شرایطی عبارت درجه دوم $X'AX$ دارای توزیع کای اسکور باشد؟

۱. $\mathbf{A}$ متقارن باشد. ۲. $\mathbf{A}$ خود توان

۳. $\mathbf{X}$ دارای توزیع نرمال باشد. ۴. هرسه مورد.

۱۲- اگر ماتریس کوواریانس نمونه ای $\mathbf{S}=\begin{bmatrix}7.82 & 7.93 & 7.98\\ 7.93 & 9.38 & 8.87\\ 7.98 & 8.87 & 9.79\end{bmatrix}$ باشد، برآورد ماکسیمم درستنمایی ρ کدام است؟($\mathbf{\Sigma}=[(1-\rho)\mathbf{I}_p+\rho\mathbf{LL}']$)

۱. ۰/۹۸۱ ۲. ۹ ۳. ۰/۸۸ ۴. ۰/۹۱۸

۱۳- اگر ماتریس کوواریانس نمونه ای $\mathbf{S}=\begin{bmatrix}7.82 & 7.93 & 7.98\\ 7.93 & 9.38 & 8.87\\ 7.98 & 8.87 & 9.79\end{bmatrix}$ باشد. برآورد ماکسیمم درستنمایی σ^2 کدام است؟($\mathbf{\Sigma}=[(1-\rho)\mathbf{I}_p+\rho\mathbf{LL}']$)

۱. ۹ ۲. ۱۰ ۳. ۱۱ ۴. ۱۲

۱۴- براساس نمونه ای تصادفی به حجم ۱۰ از بردار تصادفی $\mathbf{X}$ مقداربردار میانگین $(2,3)'$ به دست آمده است. با فرض $\boldsymbol{\mu}=(5,1)'$ و $\mathbf{V}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}$ مقدار $\sum_{i-1}^{n}(\mathbf{X}_i-\boldsymbol{\mu})(\mathbf{X}_i-\boldsymbol{\mu})'$ چیست؟

۱. $\mathbf{I}_2$ ۲. $\begin{bmatrix}91 & 44\\ 44 & 11\end{bmatrix}$ ۳. $\begin{bmatrix}91 & 58\\ 58 & 44\end{bmatrix}$ ۴. قابل محاسبه نیست.

۱۵- اگربردار تصادفی $\mathbf{X}$ دارای توزیع نرمال چهاربعدی با بردار امید ریاضی صفر و ماتریس کوواریانس با درایه های $(i=1,2,3,4)\sigma_{ii}=4$ و بقیه ی $(i\neq j)\sigma_{ij}=1$ ها باشند. آنگاه $\rho_{12.34}$ چیست؟

۱. 0/45 ۲. $\frac{1}{6}$ ۳. -0/45 ۴. 0/5

۱۶- اگربردار تصادفی $\mathbf{X}$ دارای توزیع نرمال چهاربعدی با بردار امید ریاضی صفر و ماتریس کوواریانس با درایه های $(i=1,2,3,4)\sigma_{ii}=4$ و بقیه ی $(i\neq j)\sigma_{ij}=1$ ها باشند. $\mathbf{\Sigma}_{۳۳}^{-۱}=\frac{۱}{۱۸}\begin{bmatrix}۵ & -۱ & -۱\\ -۱ & ۵ & -۱\\ -۱ & -۱ & ۵\end{bmatrix}$ باشد. آنگاه $\rho_{1.234}$ کدام است؟

۱. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ۲. $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ۳. $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$ ۴. $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

۱۷- براساس یک نمونه تصادفی ۱۰۳ تایی از زوج (X,Y) برآورد ρ، $r=0.4$ می باشد. توزیع حدی $W=\ln\sqrt{\left(\frac{1+r}{1-r}\right)}$ چیست؟

۱. $N(42,1)$ ۲. $N(0.42,0.01)$ ۳. $N(0.42,0.1)$ ۴. $N(0.24,0.01)$

۱۸- بر اساس نمونه ای تصادفی به حجم ۲۵ از $\mathbf{X}=(X_1,X_2,X_3)'$ ماتریس کوواریانس نمونه ای $S=\begin{bmatrix}7 & 4 & -1\\ 4 & 6 & 2\\ -1 & 2 & 9\end{bmatrix}$ به دست آمده است. مقدار آماره F فرض $\rho_{1.23}=0$ کدام است؟

۱. ۳/۱۲ ۲. ۰/۳۱۲ ۳. ۲۱/۳ ۴. ۲/۱۳

۱۹- برای داده های یک متغیره $X_1,\dots,X_n$ با میانگین هندسی $g_1=\prod_{i-1}^{n}X_i^{\frac{1}{n}}$ تبدیل توانی برای داده های مثبت کدام است؟

۱. $\begin{cases}\frac{X_i^{\lambda}+1}{\lambda g_1^{\lambda-1}} & \lambda\neq 0\\ g_1 Ln(X_i) & \lambda=0\end{cases}$

۲. $\begin{cases}\frac{X_i^{\lambda}-1}{\lambda g_1^{\lambda-1}} & \lambda\neq 0\\ g_1 Ln(X_i-1) & \lambda=0\end{cases}$

۳. $\begin{cases}\frac{X_i^{\lambda}-1}{\lambda g_1^{\lambda-1}} & \lambda\neq 0\\ g_1 Ln(X_i) & \lambda=0\end{cases}$

۴. $\begin{cases}\frac{X_i^{\lambda}}{\lambda g_1^{\lambda-1}} & \lambda\neq 0\\ g_1 Ln(X_i) & \lambda=0\end{cases}$

۲۰- فرض کنید ماتریس داده های مربوط به یک نمونه تصادفی ۳ تایی از جامعه نرمال دو متغیره به صورت $\begin{bmatrix}8 & 6 & 10\\ 6 & 9 & 6\end{bmatrix}$ است. با فرض $\boldsymbol{\mu}_0=(9,5)'$ مقدار آماره ی T^2 چیست؟

۱. 7 ۲. 9 ۳. $\frac{9}{7}$ ۴. $\frac{7}{9}$

۲۱- فرض کنید داده های مربوط به یک نمونه تصادفی به اندازه $n=۳$ از جامعه نرمال دو متغیره به صورت زیر بدست آمده باشد.

$\langle x\rangle=\begin{bmatrix}۸ & ۶ & ۱۰\\ ۳ & ۹ & ۶\end{bmatrix}$ اگر $\mu_0=(۹,۵)'$ باشد مقدار $T^۲$ برابر است با:

۱. $\frac{۷}{۹}$ ۲. $\frac{۴}{۹}$ ۳. $\frac{۲۵}{۳}$ ۴. $\frac{۷}{۳}$

۲۲- برای آزمون بردارمیانگین در حالت چند متغیره ازجامعه نرمال ، اگر ماتریس کوواریانس معلوم باشد توزیع آماره آزمون چه نام دارد؟

۱. نرمال ۲. فیشر ۳. کای اسکور ۴. تی استودنت

۲۳- متغیر تصادفی $U_{p,m,f}$ با کدام متغیر هم توزیع است؟

۱. $U_{m,p,f+m-p}$ ۲. $U_{p,m,f-m-p}$ ۳. $U_{p,m,f-m}$ ۴. $U_{m,p,f+m}$

۲۴- در آزمون $H_0 : \Sigma = \mathbf{S}$ چند پارامتر به طور همزمان مورد آزمون قرارمی گیرد؟

۱. $\frac{p(p-1)}{2}$ ۲. $\frac{p(p+1)}{2}$ ۳. p^2 ۴. $(p-1)^2$

۲۵- در آزمون $H_0 : \Sigma = \mathbf{I}$ مقدارآماره آزمون به چه کمیت هایی بستگی دارد؟

۱. دترمینان و اثر $\mathbf{S}$ ۲. دترمینان $\mathbf{S}$ ۳. اثر $\mathbf{S}$ ۴. وارون $\mathbf{S}$

سوالات تشریحی

۱- بر اساس یک نمونه تصادفی $Y_1,...,Y_n$ از توزیع $N(\theta,1)$ متغیرهای زیر را تعریف می کنیم. توزیع $U' = (U_1,...,U_{n-1})$ را بیابید. ۱،۴۰ نمره

$U_i = Y_{i+1} - Y_i, i = 1,2,..., n-1$

۲- اگر $\mathbf{X}$ دارای توزیع نرمال $N(\mu\mathbf{L}, \mathbf{I}_n)$ که در آن $\mathbf{L}$ برداری با مولفه های یک است. به روش ماتریسی ثابت کنید که $\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ توزیع کای اسکور به $n-1$ درجه آزادی دارد. ۱،۴۰ نمره

۳- ماتریس کوواریانس افراز شده با ماتریسهای زیر را در نظر بگیرید. مقادیرهمبستگیهای کانونی را به دست آورید. ۱،۴۰ نمره

$$\Sigma_{11} = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \Sigma_{22} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}, \Sigma_{12} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

۴- اگر $\mathbf{X}_1,...,\mathbf{X}_n$ نمونه تصادفی از توزیع $N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ و $\boldsymbol{\mu}' = (\mu_1,...,\mu_p)$ میانگین یک جامعه ی p متغیره ی نرمال باشد. آماره ی آزمون $H_0 : \mu_1 = ... = \mu_p$ در مقابل $H_1 : \mu_i \neq \mu_j, \exists i \neq j$ را به دست آورید. ۱،۴۰ نمره

۵- دو سری داده به اندازه ۱۰ به وسیله ی نرم افزاری از نرمال استاندارد تولید نموده ایم و ماتریس کوواریانس نمونه ۱،۴۰ نمره

ای $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0.29141 & -0.47425 \\ -0.47425 & 1.37003 \end{bmatrix}$ به دست آمده است. درسطح خطای پنج درصدفرضیه $\Sigma = \mathbf{I}_2$ را بیازمایید.($\chi^2 = 7.8147$).

شماره سوال	پاسخ صحیح
1	د
2	د
3	ج
4	ج
5	ب
6	ب
7	ب
8	ب
9	ب
10	الف
11	د
12	د
13	الف
14	ج
15	ب
16	د
17	ب
18	ج
19	ج
20	د
21	ب
22	ج
23	الف
24	ب
25	الف