

عنوان درس: رگرسیون، رگرسیون 1

استفاده از ماشین حساب ساده مجاز است

۱- فرض کنید رابطه $Y = 2X + 3$ برقرار باشد. ضریب همبستگی X و Y برابر با کدام گزینه است؟

۱. -1 ۲. 1 ۳. صفر ۴. -2

۲- کدام گزینه زیر صحیح نمی باشد؟

۱. پارامتر ρ را ضریب همبستگی توزیع می نامند.
 ۲. آماره R ضریب همبستگی برای نمونه تصادفی $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ است.
 ۳. عدد r یافته R ضریب همبستگی توزیع می نامند.
 ۴. عدد r یافته R ، ضریب همبستگی برای $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ است.

۳- با فرض $\mu_x = 1$ ، $\mu_y = 2$ ، $\sigma_x^2 = 1$ ، $\sigma_y^2 = 4$ و $\rho = \frac{1}{2}$ ، بهترین تابع بیش بینی خطی کدام گزینه است؟

۱. $l(x) = 1 + x$ ۲. $l(x) = 1 - x$ ۳. $l(x) = x$ ۴. $l(x) = x^2$

۴- در مدل رگرسیونی خطی ساده $Y | x = a + bx + E$ میانگین E کدام گزینه می باشد؟

۱. σ^2 ۲. $a + bx$ ۳. صفر ۴. σ_x^2

۵- در مدل رگرسیون خطی ساده، واریانس \hat{b} برابر کدام گزینه می باشد؟

۱. $\frac{\sigma^2}{n}$ ۲. $\frac{\sigma^2}{ns_x^2}$ ۳. $\frac{\bar{x}^2}{s_x^2}$ ۴. $1 + \frac{\sigma^2}{ns_x^2}$

۶- در مدل رگرسیونی خطی ساده ضریب همبستگی میان Y_i و \hat{Y}_i کدام گزینه می باشد؟

۱. $\frac{SSR}{SST}$ ۲. $SSR + SST$ ۳. $\sqrt{\frac{SSR}{SST}}$ ۴. $\frac{SST}{SSR}$

۷- دو بردار u و v را متعامد گویند هرگاه داشته باشیم :

۱. $u'v = 0$ ۲. $u'v = 1$ ۳. $u'v = 2$ ۴. $u' + v = 0$

۸- در مدل رگرسیونی خطی ساده در کدام گزینه دلیلی بر وجود رابطه خطی بین X و Y است؟

۱. هرچقدر SST بزرگ باشد.
۲. هرچقدر SSE بزرگ باشد
۳. هرچقدر SST کوچک باشد
۴. هرچقدر SSE کوچک باشد

۹- کدام گزینه زیر صحیح نمی باشد؟

۱. ضرب داخلی دو بردار u و v همواره نامنفی است.
۲. $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$
۳. $\langle u, v \rangle \neq \langle v, u \rangle$
۴. $\langle ku, v \rangle = k \langle v, u \rangle$

۱۰- کدام گزینه از ویژگی های ماتریس همیشه مثبت A نمی باشد؟

۱. متقارن بودن
۲. برای هر بردار $x \neq 0$ ، $x'Ax > 0$
۳. نامتقارن بودن
۴. عناصر روی قطر اصلی مثبت اند

۱۱- فرض کنید Y و Z دو بردار تصادفی n بعدی مستقل باشند. در این صورت داریم:

۱. $\sum_{Y+Z} = \sum_Y + \sum_Z$
۲. $\sum_{Y+Z} = \sum_Y \sum_Z$
۳. $\sum_{Y+Z} = \sum_{Y-Z}$
۴. $\sum_{YZ} = \sum_{ZY}$

۱۲- در مدل خطی $Y = Xa + E$ بر آورد بردار a کدام گزینه می باشد؟

۱. $(X'X)^{-1}Y$
۲. $(X'X)^{-1}X'Y$
۳. $(X'X)^{-1}X'$
۴. $(X'X)X'$

۱۳- در مدل خطی $Y = Xa + E$ ، ماتریس کواریانس بردار a برابر با کدام گزینه است؟

۱. $(X'X)^{-1}$
۲. $(X'X)^{-1}\sigma^2$
۳. $\sigma^2(X'X)^{-1}$
۴. $\sigma^2(X'X)^{-1}X'Y$

۱۴- تحت فرض نرمال بودن خطاها، در مدل خطی چندمتغیری، درجه آزادی توزیع SSE برابر با کدام گزینه می باشد؟

۱. k
۲. $n - k + h$
۳. h
۴. $n - k$

۱۵- تحت فرض نرمال بودن خطاها در مدل خطی رگرسیونی چند متغیری، SSR و

۱. SST همواره مستقل هستند.
۲. SSE همواره مستقل هستند.
۳. SSE همواره مستقل نیستند.
۴. SST تحت شرایطی مستقل هستند.

۱۶- در مدل خطی رگرسیونی چندگانه درجه آزادی SST برابر با کدام گزینه است؟

۱. $n - k$ ۲. $n - k + h$ ۳. $n + k$ ۴. $n - h$

۱۷- در رگرسیون لجستیک $E(Y | x_i)$ معادل کدام گزینه می باشد؟

۱. $P(Y = 1 | x_i)$ ۲. $P(Y = 0 | x_i)$ ۳. $P(X = 0 | y_i)$ ۴. $P(X = 1 | y_i)$

۱۸- در مدل سازی رگرسیونی از رگرسیون ستیغی چه استفاده ای می شود؟

۱. حذف داده های دور افتاده ۲. استاندارد کردن متغیرها
۳. ساده کردن مدل لجستیک ۴. کاهش اثر همخطی

۱۹- کاربرد تبدیل لجستیک کدام گزینه است؟

۱. تبدیل یک مدل خطی به مدل لجستیک ۲. برآورد پارامترهای مدل لجستیک
۳. ساده کردن مدل های لجستیک ۴. خطی کردن مدل لجستیک

۲۰- گزینه صحیح کدام است؟

۱. $Cov(E(X | Y), Y) \neq Cov(X, Y)$ ۲. $Cov(E(X | Y), Y) = Cov(X, Y)$
۳. $E(E(X | Y), Y) = Cov(X, Y)$ ۴. $E(Cov(X | Y), Y) = Cov(X, Y)$

سوالات تشریحی

۱- هرگاه (X, Y) دارای توزیع نرمال $N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ باشد، تابع رگرسیون Y روی X را بیابید.

۱.۲۰ نمره

۲- در مدل خطی ساده نشان دهید که $\hat{\sigma}$ برآوردیاب ناریب σ نمی باشد.

۱.۲۰ نمره

۳- نشان دهید ماتریس $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ همیشه مثبت است.

۱.۲۰ نمره

۴- فرض کنید X_1 و X_2 و X_3 نمونه ای تصادفی از توزیع $N(1, 4)$ باشد. توزیع بردار تصادفی

۱.۲۰ نمره

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 - X_2 \\ X_1 + X_3 \\ X_2 - X_3 \end{bmatrix} \text{ را بیابید.}$$

۵- در رگرسیون چندگانه، تحت شرط نرمال بودن بردار خطا، نشان دهید که $\|\hat{\mu}\|^2$ دارای توزیع χ^2 نامرکزی ۱.۲۰ نمره است.

شماره سوال	پاسخ صحيح
1	ب
2	ج
3	الف
4	ج
5	ب
6	ج
7	الف
8	د
9	ج
10	ج
11	الف
12	ب
13	ج
14	د
15	ب
16	ب
17	الف
18	د
19	د
20	ب

۱- اگر X متغیر تصادفی نامنفی و $E(X) = 0$ باشد در این صورت کدام عبارت صحیح است؟

۱. $P(X = 0) = 1$ ۲. $P(X = 1) = 0$ ۳. $P(X = 1) = 1$ ۴. $P(X = 0) = 0$

۲- برای کوواریانس دو متغیر تصادفی X و Y کدام ویژگی برقرار است؟

۱. کوواریانس به مبدأ اندازه گیری X و Y بستگی دارد.
 ۲. کوواریانس به واحد اندازه گیری X و Y بستگی ندارد.
 ۳. کوواریانس به مبدأ و واحد اندازه گیری X و Y بستگی دارد.
 ۴. کوواریانس به مبدأ اندازه گیری X و Y بستگی ندارد ولی واحد اندازه گیری X و Y بستگی دارد.

۳- فرض کنید بین متغیرهای تصادفی X و Y رابطه خطی $2X - 4Y = 0$ برقرار است. در این صورت ضریب همبستگی بین X و Y کدام است؟

۱. $\rho = 0$ ۲. $\rho = 1$ ۳. $\rho = -1$ ۴. $\rho = 0/5$

۴- فرض کنید برای یک نمونه ۱۰۳ تایی مقدار ضریب همبستگی برابر $r = 0/5$ باشد. در این صورت مقدار آماره آزمون برای فرض $H_0: \rho = 0/6$ در مقابل فرض $H_1: \rho \neq 0/6$ کدام است؟

۱. ۱.۴ ۲. -۱.۴ ۳. ۰.۵۵ ۴. ۰.۶۹

۵- فرض کنید متغیر تصادفی X دارای میانگین μ و واریانس σ^2 باشد. در این صورت به ازای چه مقداری از a تابع $g(a) = E|X - a|$ مینیمم است؟

۱. $a = \mu$ ۲. $a = \sigma^2$ ۳. $a = median(X)$ ۴. $a = mode(X)$

۶- فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y دارای ویژگی های زیر باشند. در این صورت بهترین تابع پیش بینی کننده خطی کدام است؟

$$\mu_x = 1, \mu_y = 2, \sigma_x^2 = 1, \sigma_y^2 = 4, \rho = 0/5$$

۱. $l(x) = 1 - x$ ۲. $l(x) = 1 + 0/5x$ ۳. $l(x) = 1 - 0/5x$ ۴. $l(x) = 1 + x$

۷- در تحلیل مدل گرسیونی $Y_i = a + bx_i + E_i, i = 1, \dots, n$ کدامیک از مفروضات در مورد E_i ها برقرار نیست؟

۱. E_i ها همبسته اند
۲. $E(E_i) = 0$

۳. $Var(E_i) = \sigma^2$
۴. E_i ها دارای توزیع احتمال نرمال هستند

۸- کدام نمودار برای بررسی فرض نرمال بودن خطاهای مدل رگرسیونی مناسب است؟

۱. بافت نگار خطا
۲. نمودار احتمال نرمال

۳. نمودار جعبه ای خطا
۴. نمودار ساقه و برگ خطا

۹- در مدل گرسیونی $Y_i = a + bx_i + E_i, i = 1, \dots, n$ که در آن $E_i \sim N(0, \sigma^2)$ می باشد، برآوردیاب نااریب σ^2 کدام است؟

۱. $S_Y^2 - \hat{b}^2 s_x^2$
۲. $\frac{S_{xy}^2}{\hat{b}^2 s_x^2}$
۳. $\frac{n}{n-2} (S_Y^2 - \hat{b}^2 s_x^2)$
۴. $\frac{S_{xy}^2}{n-2}$

۱۰- در مدل گرسیونی $Y_i = a + bx_i + E_i, i = 1, \dots, n$ که در آن $E_i \sim N(0, \sigma^2)$ می باشد، کدام رابطه برقرار نیست؟

۱. $\frac{\sum_{i=1}^n E_i^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$
۲. $\frac{\sum_{i=1}^n \hat{E}_i^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2)$

۳. $\hat{b} \sim N(b, \frac{\sigma^2}{n s_x^2})$
۴. $\hat{a} \sim N(a, \frac{\sigma^2}{n})$

۱۱- در مدل گرسیونی $Y_i = a + bx_i + E_i, i = 1, \dots, n$ برای $n = 5$ فرض کنید

$s_x^2 = 346, s_y^2 = 1/447, s_{xy} = -18/02, \bar{x} = 73, \bar{y} = 5/39$

معادله خط رگرسیون Y روی X کدام است؟

۱. $\hat{y} = 7/263 + 1/745x$
۲. $\hat{y} = 9/192 - 0/05208x$

۳. $\hat{y} = 11/292 - 0/528x$
۴. $\hat{y} = 4/851 + 0/0745x$

۱۲- در مدل گرسیونی $Y_i = a + bx_i + E_i, i = 1, \dots, n$ برای $n = 5$ فرض کنید

$$s_x^2 = 346, s_y^2 = 1/447, s_{xy} = -18/02, \bar{x} = 73, \bar{y} = 5/39$$

یک فاصله اطمینان 95 درصد برای پارامتر b در مدل رگرسیونی کدام است؟

۱. $(-0/1042, 0/00002)$ ۲. $(-0/2103, 0/00632)$

۳. $(-0/1524, 0/00112)$ ۴. $(-0/1136, 0/05214)$

۱۳- در مدل گرسیونی $Y_i = a + bx_i + E_i, i = 1, \dots, n$ مقدار $\sum_{i=1}^n x_i \hat{E}_i$ کدام است؟

۱. $S_y^2 - n\hat{b}^2 s_x^2$ ۲. nS_y^2 ۳. صفر ۴. $\hat{\sigma}^2$

۱۴- در مدل گرسیونی $Y_i = a + bx_i + E_i, i = 1, \dots, n$ کدام عبارت در مورد ضریب تعیین (R^2) نادرست است؟

۱. $0 \leq R^2 \leq 1$

۲. اگر R^2 نزدیک یک باشد یک رابطه خطی قوی بین متغیرها وجود دارد.

۳. اگر R^2 نزدیک یک باشد تغییرپذیری خطاها کوچک می شود.

۴. $R^2 = 1 - \frac{SSR}{SST}$

۱۵- در مدل گرسیونی $Y_i = a + bx_i + E_i, i = 1, \dots, n$ فرض کنید $n = 5$ و $SST = 7/5$ و $SSE = 2/5$ باشد. آماره آزمون

برای فرض $H_0: b = 0$ کدام است؟

۱. 2 ۲. 3 ۳. 6 ۴. 7/5

۱۶- در مدل گرسیونی $Y_i = a + bx_i + E_i, i = 1, \dots, n$ فرض کنید $n = 5$ و $SST = 7/5$ و $SSE = 2/5$ باشد. در این صورت

مقدار ضریب تعیین (R^2) کدام است؟

۱. 0/66 ۲. 0/33 ۳. 0/44 ۴. 0/75

۱۷- در مدل گرسیونی $Y_i = a + bx_i + E_i, i = 1, \dots, n$ فرض کنید $n = 5$ و $SST = 7/5$ و $SSE = 2/5$ باشد. در این صورت

مقدار ضریب همبستگی (r) کدام است؟

۱. 0/81 ۲. 0/57 ۳. 0/66 ۴. 0/86

۱۸- برای دو بردار متعامد u و v با فرض $u \neq 0$ و $v \neq 0$ ، مقدار تصویر u روی v کدام است؟

۴. π

۳. $\frac{\pi}{3}$

۲. $\frac{\pi}{2}$

۱. $\frac{\pi}{4}$

۱۹- فرض کنید بردار $Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}$ دارای توزیع نرمال با بردار میانگین $\mu = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ و ماتریس کوواریانس $\Sigma = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

باشد. اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ باشد، در این صورت بردار میانگین $U = AY + B$ کدام است؟

۴. $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$

۳. $\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$

۲. $\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$

۱. $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

۲۰- فرض کنید X و Y دو بردار تصادفی n بعدی مستقل با ماتریس کوواریانس Σ_X و Σ_Y باشند، در این صورت.....

۱. $\Sigma_{X+Y} = \Sigma_X + \Sigma_Y$ ۲. $\Sigma_{X+Y} = \Sigma_X \Sigma_Y$ ۳. $\Sigma_{X+Y} = \Sigma_X - \Sigma_Y$ ۴. $\Sigma_{X+Y} = \Sigma_{XY}$

۲۱- در مدل رگرسیون چندمتغیره $Y = aX + E$ برآورد پارامتر a کدام است؟

۱. $\hat{a} = (XX')^{-1} X'Y$ ۲. $\hat{a} = X'Y(X'X)^{-1}$ ۳. $\hat{a} = (X'X)^{-1} X'Y$ ۴. $\hat{a} = X'(X'X)^{-1} Y$

۲۲- در مدل رگرسیون چندمتغیره $Y = aX + E$ واریانس برآورد پارامتر a کدام است؟

۱. $\Sigma_{\hat{a}} = \sigma^2 X'Y$ ۲. $\Sigma_{\hat{a}} = \sigma^2 (X'X)^{-1}$ ۳. $\Sigma_{\hat{a}} = \sigma^2 (XX')$ ۴. $\Sigma_{\hat{a}} = \sigma^2$

۲۳- تحت کدام شرط زیر، تابع $c'a = \sum_{i=1}^k c_i a_i$ یک تابع برآوردپذیر است؟

۱. هرگاه یک تابع خطی مانند $t'Y = \sum_{i=1}^k t_i Y_i$ وجود داشته باشد به طوریکه $E(t'Y) = t'a$

۲. هرگاه یک تابع خطی مانند $t'Y = \sum_{i=1}^k t_i Y_i$ وجود داشته باشد به طوریکه a هر چه باشد داشته باشیم $E(t'Y) = t'a$

۳. هرگاه یک تابع خطی مانند $t'Y = \sum_{i=1}^k t_i Y_i$ وجود داشته باشد به طوریکه c هر چه باشد داشته باشیم $E(t'Y) = t'c$

۴. هرگاه یک تابع خطی مانند $t'Y = \sum_{i=1}^k t_i Y_i$ وجود داشته باشد به طوریکه a هر چه باشد داشته باشیم $E(t'Y) = c'a$

۲۴- برای کاهش اثر هم خطی کدام روش پیشنهاد شده است؟

۱. استاندارد کردن متغیرها

۲. حذف داده ها دور افتاده

۳. رگرسیون ستیغی

۴. به کار بردن قضیه گاوس

۲۵- در صورتی که در یک مدل رگرسیونی متغیر وابسته دارای توزیع احتمال برنولی باشد کدام تحلیل مناسب است؟

۱. رگرسیون لجستیک

۲. رگرسیون غیرخطی

۳. رگرسیون دوجمله ای

۴. رگرسیون ستیغی

سوالات تشریحی

۱- هرگاه رگرسیون Y روی X یک تابع خطی به صوت $d(x) = a + bx$ باشد ثابت کنید:

$$E(\text{Var}(y|x)) = \sigma_y^2(1 - \rho^2)$$

۲- در مدل رگرسیونی $Y_i = a + bx_i + E_i, i = 1, \dots, n$ ثابت کنید:

$$\sum_{i=1}^n \hat{Y}_i \hat{E}_i = 0$$

۳- فرض کنید Y یک بردار تصادفی نرمال با ویژگیهای زیر باشد. چگالی Y را بدست آورید.

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}, \quad E(Y) = \mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

۱.۲۰ نمره

۱.۲۰ نمره

۱.۲۰ نمره

- ۴- مدل خطی $Y = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + E$ که در آن $E \sim N(0, \sigma^2)$ در نظر بگیرید. اگر یافته های یک نمونه تصادفی $Y = (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)'$ با میانگین $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)'$ به صورت جدول زیر باشد. فرض خطی $H_o : a_3 = a_1 - a_2$ را با میزان 5 درصد آزمون کنید.

x_3	x_2	x_1	y
0	-1	1	0
1	0	0	1
0	0	1	-1
0	1	1	2

- ۵- ضریب همبستگی چندگانه و کاربرد آن را توضیح دهید.

شماره سوال	پاسخ صحيح
1	الف
2	د
3	ب
4	ب
5	ج
6	د
7	الف
8	ب
9	ج
10	د
11	ب
12	الف
13	ج
14	د
15	ج
16	الف
17	الف
18	ب
19	د
20	الف
21	ج
22	ب
23	د
24	ج
25	الف

۱- اگر Y, X دو متغیر تصادفی پیوسته و دارای میانگین باشند، آنگاه $E(XE(Y|X))$ برابر است با:

۱. $E(XY)$ ۲. $E(X^2|Y)$ ۳. $E(Y|X^2)$ ۴. $E(X^2Y)$

۲- فرض کنید $X + 2Y = 3$, $\text{var}(Y) = 2$ باشد. ضریب همبستگی Y, X کدام گزینه است؟

۱. $\frac{1}{2}$ ۲. $-\frac{1}{2}$ ۳. -1 ۴. 1

۳- در یک جامعه دو متغیره نرمال برای آزمودن فرض $H_0: \rho = 0$ در مقابل $H_1: \rho \neq 0$ نمونه تصادفی به اندازه $n = 11$

اختیار شده است که ضریب همبستگی نمونه‌ای $r = 0.6$ می باشد. مقدار آماره آزمون برابر است با:

۱. 0.44 ۲. $2/25$ ۳. $2/37$ ۴. $3/2$

۴- جفت متغیرهای تصادفی (X, Y) دارای توزیع نرمال دو بعدی است. تابع رگرسیون X روی Y ، به شرط مستقل نبودن

X و Y تابعی است از

۱. درجه ۲ از Y ۲. درجه ۲ از X ۳. خطی از Y ۴. خطی از X

۵- برآورد $E(\sqrt{X^2 + Y^2})$ با استفاده از روش گشتاورها و داده‌های $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ برابر است با:

۱. $\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i^2 + Y_i^2)}$ ۲. $\frac{1}{n} \sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i^2 + Y_i^2)}$ ۳. $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{X_i^2 + Y_i^2}$ ۴. $\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i^2 + Y_i^2)}$

۶- در رگرسیون ساده $Y|x = a + bx + E$ ، متغیر خطا E دارای

۱. میانگین صفر و واریانس ثابت ۱ است. ۲. میانگین a و واریانس ۱ است. ۳. میانگین $a + bx$ و واریانس σ^2 است. ۴. میانگین صفر و واریانس σ^2 است.

۷- برآورد ناریب پارامتر c در معادله خط رگرسیون $Y_i = c + b(x_i - \bar{x}) + E_i$ برابر است با:

۱. $\frac{s_{XY}}{s_x^2}$ ۲. \bar{Y} ۳. \bar{x} ۴. $\frac{s_{XY}}{s_y^2}$

۸- مصرف بنزین و سرعت اتومبیل‌های کوچک در جدول زیر آمده است. یک فاصله اطمینان ۹۰ درصد برای b برابر است با: (با فرض خطای نرمال)

سرعت X	۴۵	۶۰	۷۵	۹۰	۹۵
مسافت در کیلومتر Y	۶/۲۵	۶/۵	۵/۸۵	۵/۲	۳/۱۵

مقدار جدول = ۲/۳۵۳

۱. $0.00002 < b < 0/1042$
 ۲. $-0/1042 < b < -0.00002$
 ۳. $-0/1042 < b < 0.00002$
 ۴. $-0.00002 < b < 0/1042$

۹- اگر $E_i \sim N(0, \sigma^2)$ ، با فرض $b = 0$ آنگاه توزیع $\frac{SSR}{\sigma^2}$ برابر است با:

۱. $\chi^2(1)$ ۲. $\chi^2(n-1)$ ۳. $\chi^2(n-2)$ ۴. $N(0,1)$

۱۰- در صورتی که $SSE = 2/5446$ ، $SST = 7/235$ ، $SSR = 4/6925$ باشد ، ضریب تعیین برابر است با:

۱. ۰/۳۵۱۷ ۲. ۰/۸۰۵۳ ۳. ۰/۶۴۸۶ ۴. ۰/۵۴۲۲

۱۱- دو بردار v, u را متعامد گویند هرگاه

۱. ضرب داخلی دو بردار مخالف صفر باشد.
 ۲. ضرب خارجی دو بردار برابر صفر باشد.
 ۳. فاصله دو بردار مخالف صفر باشد.
 ۴. ضرب داخلی دو بردار صفر باشد.

۱۲- تصویر بردار $u = (1, 2, 3, 4)$ روی بردار $v = (1, 1, 1, 1)$ برابر است با:

۱. $(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2})$ ۲. $(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5})$ ۳. $(5, 5, 5, 5)$ ۴. $(1, 2, 3, 4)$

۱۳- وارون مور-پنروز ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ برابر است با:

۱. $\frac{1}{25}A$ ۲. $\frac{1}{36}A$ ۳. $\frac{1}{36}A'$ ۴. $\frac{1}{8}A'$

۱۴- فرض کنید Y دارای بردار میانگین μ و ماتریس کوواریانس Σ باشد. کدام گزینه برقرار است؟

۱. $E(\|Y\|^2) = \|\mu\| + \text{trac}\Sigma$ ۲. $E^2(\|Y\|) = \|\mu\| + \text{trac}\Sigma$
 ۳. $E(\|Y\|) = \|\mu\| + \text{trac}\Sigma$ ۴. $E(\|Y\|) = \|\mu\|^2 + \text{trac}\Sigma$

۱۵- متغیرهای تصادفی Y_1, Y_2, Y_3 دارای میانگین مشترک ۲ و واریانس مشترک ۱ می باشند و داریم

$$\begin{cases} U_1 = 2Y_1 + Y_2 + Y_3 + 1 \\ U_2 = Y_1 - Y_2 - Y_3 + 2 \end{cases} \text{ فرض کنید , } \sigma_{23} = 0, \sigma_{13} = 1, \sigma_{12} = -1$$

در این صورت بردار میانگین $U = (U_1, U_2)'$ برابر است با:

$$\begin{array}{llll} \text{۱.} & \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} & \text{۲.} & \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \end{bmatrix} & \text{۳.} & \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} & \text{۴.} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

۱۶- متغیرهای تصادفی Y_1, Y_2, Y_3 دارای میانگین مشترک ۲ و واریانس مشترک ۱ می باشند و داریم

$$\begin{cases} U_1 = 2Y_1 + Y_2 + Y_3 + 1 \\ U_2 = Y_1 - Y_2 - Y_3 + 2 \end{cases} \text{ فرض کنید , } \sigma_{23} = 0, \sigma_{13} = 1, \sigma_{12} = -1$$

در این صورت ماتریس کوواریانس بردار تصادفی $U = (U_1, U_2)'$ برابر است با:

$$\begin{array}{llll} \text{۱.} & \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} & \text{۲.} & \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} & \text{۳.} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \text{۴.} & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

۱۷- تابع مولد گشتاورهای بردار نرمال $Y' = (Y_1 \ Y_2 \ \dots \ Y_n)'$ برابر است با:

$$\begin{array}{ll} \text{۱.} & M_Y(t) = \exp(t'\mu + t'\Sigma t) \\ \text{۲.} & M_Y(t) = \exp\left(\frac{1}{2}(t'\Sigma t)\right) \\ \text{۳.} & M_Y(t) = \exp\left(t'\mu + \frac{1}{2}(t'\Sigma t)\right) \\ \text{۴.} & M_Y(t) = \exp\left(t'\mu + \frac{1}{2}(t'\Sigma t)\right) \end{array}$$

۱۸- چگالی شرطی بردار Y_1 به شرط بردار Y_2 یک چگالی نرمال $f(y_1 | y_2)$ با ماتریس کوواریانس برابر با کدام گزینه است؟

$$\begin{array}{ll} \text{۱.} & \Sigma_{Y_1|Y_2} = \Sigma_{11} + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21} \\ \text{۲.} & \Sigma_{Y_1|Y_2} = \Sigma_{22} - \Sigma_{12}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{21} \\ \text{۳.} & \Sigma_{Y_1|Y_2} = \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21} \\ \text{۴.} & \Sigma_{Y_1|Y_2} = \Sigma_{22} + \Sigma_{12}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{21} \end{array}$$

۱۹- برآورد ناریب واریانس در مدل‌های خطی چند متغیره برابر است با:

$$\begin{array}{llll} \text{۱.} & \hat{\sigma}^2 = \frac{\|Y - X\hat{a}\|^2}{n} & \text{۲.} & \hat{\sigma}^2 = \frac{\|Y - X\hat{a}\|^2}{n-1} \\ \text{۳.} & \hat{\sigma}^2 = \frac{\|Y - X\hat{a}\|^2}{n-2} & \text{۴.} & \hat{\sigma}^2 = \frac{\|Y - X\hat{a}\|^2}{n-k} \end{array}$$

۲۰- در چه صورت دستگاه معادلات نرمال $X'X\gamma = X'y$ دارای جواب یکتاست؟

۱. X پررتبه ستونی باشد.
۲. X پررتبه ستونی نباشد.
۳. بردارهای X متعامد باشند.
۴. Y, X مستقل باشند.

۲۱- آماره آزمون تحت فرض $H_0: M_a = 0$ دارای چه توزیعی است؟

۱. F نامرکزی
۲. $F(h, n-k)$
۳. $N(\mu, \sigma^2 I)$
۴. χ^2_{n-k}

۲۲- برای داده‌های جدول زیر، با فرض $H_0: a=10, b=0$ ، مقدار SSR برابر است با:

۹۵	۹۰	۷۵	۶۰	۴۵	سرعت X
۳/۱۵	۵/۲	۵/۸۵	۶/۵	۶/۲۵	مسافت در کیلومتر Y

۱. ۱۰۳/۷۸۳
۲. -۰/۰۵
۳. ۲۸۳۷۵
۴. ۹/۱۹

۲۳- متغیرهای $X'M_2X, X'M_1X$ مستقلند اگر و تنها اگر

۱. طبق شرایط قضیه کاکران $M_2M_1 \neq 0$
۲. طبق شرایط قضیه کاکران $M_2M_1 = 0$
۳. طبق شرایط قضیه گریک $M_2M_1 = 0$
۴. طبق شرایط قضیه گریک $M_2M_1 \neq 0$

۲۴- در نمونه‌ای از یک توزیع سه متغیره X_3, X_2, X_1 داریم $r_{12} = 0/6, r_{13} = 0/8, r_{23} = 0/8$. در این صورت $r_{23.1}$ برابر است با:

۱. ۰/۵۰
۲. ۰/۴۵
۳. ۰/۶۶
۴. ۰/۶۵

۲۵- در رگرسیون خطی چندگانه، مشکل همخطی چندگانه چه وقت بروز می‌کند؟

۱. وقتی نوعی رابطه بین دو متغیر وجود داشته باشد.
۲. وقتی رابطه‌ای خطی بین یک متغیر مستقل و متغیر وابسته وجود داشته باشد.
۳. وقتی هیچ رابطه‌ای بین متغیرهای مستقل وجود نداشته باشد.
۴. وقتی یک متغیر مستقل تقریباً ترکیبی خطی از سایر متغیرهای مستقل باشد.

سوالات تشریحی

۱- فرض کنید $ab \neq 0, aX + bY + c = 0$. ثابت کنید $\rho(X, Y) = \pm 1$.

۲- برای تابع چگالی زیر

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x + 4y}{3} & 0 < x, y < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

الف) تابع رگرسیون خطی Y روی X را بیابید.

ب) بهترین تابع پیش بینی کننده Y روی X را بیابید.

ج) پاسخ های الف و ب را با هم مقایسه کنید.

۳-

نشان دهید که $\Pi = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ ، یک ماتریس تصویر است.

۴- فرض کنید Y و Z دو بردار تصادفی n بعدی مستقل باشند. ثابت کنید که $\Sigma_{Y+Z} = \Sigma_Y + \Sigma_Z$.

۵- برای داده های زیر، شیب مدل رگرسیون خطی گذرنده از مبدا را با روش کمترین قدرمطلق فاصله LAD برآورد کنید.

x	۱	۲	۳	۴	۵
y	۳/۱	۵/۸	۹/۲	۱۱/۳	۱۶/۱

شماره سوال	پاسخ صحیح
1	الف
2	ج
3	ب
4	ج
5	ج
6	د
7	ب
8	ج
9	الف
10	ج
11	د
12	الف
13	الف
14	الف
15	ب
16	الف
17	د
18	ج
19	د
20	الف
21	ب
22	الف
23	ج
24	ج
25	د

۱- گزینه درست را انتخاب کنید:

۱. اگر X و Y هم توزیع باشند آنگاه با هم مساوی اند.

۲. اگر X متغیری تصادفی و نامنفی باشد آنگاه امید ریاضی آن می تواند منفی باشد.

۳. اگر Y و X مساوی باشند آنگاه هم توزیعند.

۴. 2 و 3

۲- $\text{COV}(E(X|Y), Y)$ با کدام گزینه زیر برابر است؟

۱. $\text{COV}(X, Y)$ ۲. $E(XY)$ ۳. $E(X|Y)$ ۴. $V(X)$

۳- با فرض این که $M(t) = \frac{1}{3}\exp\{-t\} + \frac{2}{3}\exp\{t\}$ تابع مولد گشتاورهای متغیر تصادفی X باشد. واریانس X برابر است با:

۱. $\frac{1}{3}$ ۲. $\frac{8}{9}$ ۳. $\frac{2}{3}$ ۴. 1

۴- کدام گزینه نشان می دهد که دو متغیر تصادفی X و Y به طور متوسط در یک جهت تغییر می کنند؟

۱. $-1 < \rho < 0$ ۲. $\rho = -1$ ۳. $\rho = 0$ ۴. $0 < \rho < 1$

۵- در آزمون فرضیه های مربوط به ضریب همبستگی جامعه، از کدام توزیع آماری استفاده می شود؟

۱. توزیع کی دو با $n-1$ درجه آزادی و نرمال

۲. توزیع تی با $n-2$ درجه آزادی و نرمال

۳. نرمال و توزیع کی دو با $n-2$ درجه آزادی

۴. نرمال و توزیع تی با $n-1$ درجه آزادی

۶- هرگاه (X, Y) دارای توزیع نرمال توأم باشد. تابع رگرسیونی X بر روی Y کدام گزینه است؟

۱. $\mu_X + \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (Y - \mu_Y)$ ۲. $\mu_X + \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (X - \mu_X)$

۳. $\mu_X + \rho \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} (Y - \mu_Y)$ ۴. $\mu_Y + \rho \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} (X - \mu_X)$

۷- در مدل رگرسیون خطی ساده $Y = a + bx + E$ که E دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس σ^2 است. کدام گزینه برای پارامتر b ، برآوردگری نااریب است؟

۱. $S_Y^2 - S_X^2$ ۲. $\frac{S_{XY}}{S_Y^2}$ ۳. $\frac{S_{XY}}{S_X^2}$ ۴. ρ

۸- کدام گزینه دارای توزیع کی دو با $n-2$ درجه آزادی است؟

۱. $\frac{(n-2)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}$ ۲. $\frac{1}{2} \ln \frac{1+\rho}{1-\rho}$

۳. $\frac{R}{\sqrt{1-R^2}} \sqrt{n-2}$ ۴. همه موارد

۹- گزینه درست را انتخاب کنید:

۱. $V(\hat{b}) = \frac{\sigma^2}{n}$

۲. $\rho = 0$ مستلزم مستقل بودن دو متغیر تصادفی است.

۳. $Y_i - \bar{Y}$ و \bar{Y} از هم مستقلند.

۴. برآورد درست‌نمایی ماکزیمم پارامتر a در مدل خطی ساده برابر ρ است.

۱۰- فرض کنید، SS رگرسیون روی X برابر $4/7$ و SS کل برابر $7/5$ باشد. اگر درجه آزادی منبع رگرسیون روی X و منبع خطای پیش بینی به ترتیب برابر ۱ و ۴ باشد، مقدار MS رگرسیون روی X کدام است؟

۱. $7/5$ ۲. $5/1$ ۳. $2/8$ ۴. $4/7$

۱۱- فرض کنید، SS رگرسیون روی X برابر $4/7$ و SS کل برابر $7/5$ باشد. اگر درجه آزادی منبع رگرسیون روی X و منبع خطای پیش بینی به ترتیب برابر ۱ و ۴ باشد، نسبت F برابر است با:

۱. $4/7$ ۲. $5/1$ ۳. $2/8$ ۴. $0/7$

۱۲- اگر ضریب تعیین برابر $0/6486$ و $SS_T = 7/235$ باشد، آنگاه SS_R برابر است با:

۱. $2/5425$ ۲. $0/3514$ ۳. $4/6925$ ۴. $0/253$

۱۳- عبارت $\sum x_i E_t$ با کدام گزینه برابر است؟

۱. صفر
۲. $(n-2)S_Y^2$
۳. $\sum \hat{y}_t \hat{E}_t$
۴. 1 و 3

۱۴- در نمودار احتمال نرمال (NPP) کدام گزینه در محور عمودی نمودار قرار می گیرد؟

۱. E_i
۲. $\phi^{-1}\left(\frac{i-0.5}{n}\right)$
۳. $\frac{i-0.5}{n}$
۴. $\frac{i}{n}$

۱۵- کدام گزینه در مورد توزیع برآوردیابهای پارامترهای a, b, c در مدل خطی ساده درست است؟

۱. $\hat{b} \sim N(b, \frac{\sigma^2}{n})$
۲. $\hat{a} \sim N(a, \frac{\sigma^2}{n} + \bar{X}^2)$
۳. $\hat{c} \sim N(c, \frac{\sigma^2}{n})$
۴. $\hat{a} \sim N(a, \frac{\sigma^2}{n})$

۱۶- عبارت $E(X-a)^2$ به ازای کمترین مقدار خود را اختیار می کند.

۱. $a = E(X)$
۲. میانه $a = X$
۳. مد $a = X$
۴. $a = E(X|Y)$

۱۷- اگر مدل رگرسیونی به صورت $E(Y|X) = a + bX + e$ باشد، مقدار $E(e^2) - V(e)$ برابر است با:

۱. σ^2
۲. صفر
۳. $2\sigma^2$
۴. $4\sigma^2$

۱۸- تابع مولد گشتاورها برای بردار نرمال $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ در نقطه $t = (t_1, \dots, t_n)$ کدام است؟

۱. $\|\mu^2\| + \text{trac } \Sigma$
۲. $\exp\left\{t'\mu + \frac{t'\Sigma t}{2}\right\}$
۳. $\exp\left\{\mu t + \frac{t^2}{2}\sigma^2\right\}$
۴. $\exp\left\{\frac{t'\Sigma t}{2}\right\}$

۱۹- در مدل خطی $Y = Xa + E$ مفهوم، برآورد کمترین توانهای دوم بردار a را نمی توان به طور یکتا به دست آورد، یعنی:

۱. واریون $(X'X)$ وجود دارد.
۲. ستونهای ماتریس X پر رتبه ستونی نیست.
۳. ستونهای ماتریس X از هم مستقلند.
۴. در مدل همخطی رخ نداده است.

۲۰- برآورد کمترین توان دوم پارامتر a در مدل ماتریسی $Y = Xa + E$ برابر است با:

۱. $X(X'X)^{-1}X'$ ۲. $X(X'X)^{-1}X'Y$ ۳. $\sigma^2(X'X)^{-1}$ ۴. $(X'X)^{-1}X'Y$

سوالات تشریحی

۱.۲۰ نمره

۱- فرض کنید، X و Y دارای تابع چگالی احتمال توام زیر باشد:

$$f(x, y) = 2, \quad 0 < x < y < 1$$

الف: نشان دهید، $E(E(X|Y)) = E(X)$

ب: نشان دهید، فرمول تفکیک واریانس $V(Y) = E(V(Y|X)) + V(E(Y|X))$ برای تابع چگالی احتمال فوق برقرار است.

۱.۲۰ نمره

۲- برای مدل خطی $y = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + E$ که $E \sim N(0, \sigma^2)$ ، یافته های نمونه تصادفی در جدول زیر آمده است:

x_3	x_2	x_1	y
0	-1	1	0
1	0	0	1
0	0	1	-1
0	1	1	2

مطلوبست:

الف- برآورد a_3, a_2, a_1

ب- فرضیه $H_0: a_3 = a_2 - a_1$ را در سطح معنی داری 0/05 با تشکیل جدول آنالیز واریانس، بیازمایید.
(توضیح کامل). عدد جدول: 161/45

۱.۲۰ نمره

۳- الف: ضریب تعیین چندگانه و ضریب تعیین تعدیل یافته را جداگانه به طور کامل تعریف و تفاوتی مهم از آنها که مشهود است را ذکر کنید.

ب: قضیه ککران را بیان کرده و کاربردی از آن را در رگرسیون فقط ذکر کنید.

جدول آنالیز واریانس زیر، برای یک مدل خطی ساده است، با فرض خطای نرمال، مقدار امید ریاضی $\frac{SS_R}{SS_E}$ و

مقدار ضریب تعیین را بیابید. عدد جدول: 7/708

منبع تغییر	SS	df	MS	F
رگرسیون روی X	128/71	1	
خطای بیش بینی	25/155	
جمع کل	229/33	5	

۵- الف: شکل ماتریسی مدل خطی $Y=Xa+E$ را در زیر بنویسید:

$$y = a_1 - a_2 + E_1$$

$$y = 2a_1 + a_2 + E_2$$

$$y = -a_1 + E_3$$

ب: ماتریس متغیرهای کنترل شده را تشکیل دهید.

ج: به کمک $\sum X = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ، ماتریس واریانس کوواریانس Y را بنویسید. آیا ماتریس به دست

آمده متقارن است، چرا؟

شماره
سوال

پاسخ صحیح

1

ج

2

الف

3

ب

4

د

5

ب

6

ج

7

ج

8

الف

9

ج

10

د

11

ب

12

ج

13

الف

14

ب

15

ج

16

الف

17

ب

18

ب

19

ب

20

د

۱- فرض کنید $Y = -1 - 2X$ رابطه میان دو متغیر تصادفی Y و X باشد آنگاه ضریب همبستگی Y و X برابر است با:

۱. +1
۲. صفر
۳. -1
۴. نمیتوان اظهار نظر کرد.

۲- عبارت $\text{cov}(E(X|Y), Y)$ با کدام گزینه برابر است؟

۱. $\text{cov}(X, Y)$
۲. $E(Y)$
۳. $E(X)$
۴. $\text{Var}(X)$

۳- چه موقع امید ریاضی $a_1X_1 + \dots + a_nX_n$ برابر صفر است؟

۱. مجموع a_i ها برابر یک باشد.
۲. امید ریاضی X_i ها برابر صفر نباشد.
۳. مجموع a_i ها برابر صفر باشد.
۴. 2 و 3

۴- تعبیر صفر بودن ضریب همبستگی دو متغیر تصادفی X و Y کدام گزینه است؟

۱. X و Y مستقلند.
۲. X و Y ناهمبسته اند.
۳. X و Y از نظر تابعی ناهمبسته اند.
۴. X و Y از نظر خطی ناهمبسته اند.

۵- هرگاه داشته باشیم: $\mu_X = \mu_Y = 1$ و $\sigma_Y^2 = 4$ و $\sigma_X^2 = 1$ و $\rho = \frac{1}{2}$ آنگاه برای $x=3$ و به کمک بهترین فرم خطی پیش بینی، مقدار Y را چند پیش بینی می کنید؟

۱. -2
۲. 3
۳. 4
۴. 5

۶- در مدل رگرسیون خطی ساده $Y|x = a + bx + E$ که $E \sim N(0, \sigma^2)$:

۱. $\frac{S_{XY}}{S_X^2}$ برآوردگری نااریب برای b است.
۲. تنها a, b پارامترهای مدل اند.
۳. $\text{Var}(Y|x) \neq \text{Var}(E)$
۴. $S_Y^2 - \hat{b}^2 S_X^2$ برآوردگری نااریب برای σ^2 است.

۷- فرض کنید E_i ها مستقل باشند و $E_i \sim N(0, \sigma^2)$ در این صورت $Y_i = a + bx_i + E_i$ ها هم مستقلند. در مدل رگرسیونی فوق \hat{a} دارای توزیع:

۱. تی با میانگین α و واریانس $\frac{\sigma^2}{n}$ است.
۲. نرمال با میانگین α و واریانس $\frac{\sigma^2}{n} (1 + \frac{\bar{x}^2}{s_x^2})$ است.
۳. نرمال با میانگین α و واریانس $\frac{\sigma^2}{ns_x^2}$ است.
۴. تی با میانگین α و واریانس $\frac{\sigma^2}{ns_x^2}$ است.

۸- فرض کنید $Y|x = a + be^{-cx} + E$ با کدام تبدیل زیر این مدل غیر خطی به مدل خطی ساده تبدیل می شود؟

۲. $t = \log x$

۱. $t = \frac{1}{x}$

۳. $t = x^2$

۴. نمیتوان این مدل را خطی کرد.

۹- برای آزمون $H_0: b = b_0$ در مدل رگرسیون خطی ساده از کدام توزیع زیر استفاده می شود؟

۲. کی دو با $n-1$ درجه آزادی

۱. تی با $n-1$ درجه آزادی

۴. کی دو با $n-2$ درجه آزادی

۳. تی با $n-2$ درجه آزادی

۱۰- در یک مدل رگرسیون خطی ساده با فرض $n=8$ ، $\hat{a}=0.4$ ، $\hat{b}=0.6$ ، $S_X^2 = S_Y^2 = 32$ ، $S_{XY} = 0.7$ مقدار SS_R برابر است با:

۴. صفر

۳. $19/2$

۲. $11/52$

۱. $2/88$

۱۱- کدام گزینه صحیح است؟

۲. $\frac{SS_T}{\sigma^2} \sim X_{n-2}^2$

۱. SS_E و SS_R همیشه از هم مستقلند.

۴. $\frac{SS_T}{\sigma^2} \sim X_{n-1}^2$

۳. $\frac{SS_E}{\sigma^2} \sim X_{n-1}^2$

۱۲- مقدار $\sum_{i=1}^n \hat{Y}_t \hat{E}_t$ با کدام گزینه برابر است؟

۴. 2 و 3

۳. $\sum_{i=1}^n x_i E_i$

۲. $\sum_{i=1}^n \hat{E}_t$

۱. SS_E

۱۳- تفسیر ضریب تعیین برابر 0.64 کدام گزینه است؟

۱. 64 درصد از تغییر پذیری کل به علت رگرسیون روی X است.

۲. ضریب همبستگی بین دو متغیر 0.6 است.

۳. 36 درصد از تغییر پذیری کل به علت رگرسیون روی X است

۴. 64 درصد از تغییر پذیری کل به علت خطای پیش بینی است.

۱۴- در آزمون نموداری برای نرمال بودن خطاها به کمک نمودار احتمال نرمال (NPP) محور عمودی کدام گزینه است؟

۴. $\frac{i}{n}$

۳. $\phi^{-1}\left(\frac{i-0.5}{n}\right)$

۲. $\widehat{e_{(i)}}$

۱. $\frac{i-0.5}{n}$

۱۵- در تجزیه و تحلیل رگرسیونی ضریب همبستگی بین \hat{Y}_i و Y_i کدام است؟

۱. جذر ضریب تعیین $\frac{SS_R}{SS_T}$ ۲. $\frac{SS_R}{SS_E}$ ۳. $\frac{SS_E}{SS_R}$ ۴. $\frac{SS_R}{SS_E}$

۱۶- کدام گزینه از ویژگیهای بردار $Y \sim N(\mu, \Sigma)$ نیست؟

۱. در نرمال دو بعدی مستقل بودن دو مولفه از آن مستلزم صفر بودن ضریب همبستگی بین آنهاست.
 ۲. مولفه های بردار Y مستقل و هم توزیع اند اگر و تنها اگر $\Sigma = \sigma^2 I$
 ۳. هر مولفه بردار Y دارای توزیع نرمال است.
 ۴. هر ترکیب خطی از مولفه های بردار Y نمی تواند نرمال باشد.

۱۷- در مدل خطی چند متغیری $Y = Xa + E$ کدام گزینه زیر برآورد پارامتر مدل به روش کمترین مجموع توانهای دوم است؟

۱. $(X'X)^{-1}X'Y$ ۲. $X(X'X)^{-1}X'Y$ ۳. $(XX')^{-1}X'Y$ ۴. $X'(XX')^{-1}X'Y$

۱۸- در مدل خطی $Y = Xa + E$ که در آن $E \sim N(0, \sigma^2 I)$ است. کدام گزینه ماتریس کوواریانس برآورد a است؟

۱. $\sigma^2 (X'X)^{-1} X'Y$ ۲. $\sigma^2 (X'X)$ ۳. $\sigma^2 (X'X)^{-1}$ ۴. هیچکدام

۱۹- ماتریس $X(X'X)^{-1}X'$:

۱. نه خودتوان و نه متقارن است.
 ۲. خودتوان هست اما متقارن نیست.
 ۳. متقارن هست اما خودتوان نیست.
 ۴. هم خودتوان و هم متقارن است.

۲۰- کمترین مقدار عبارت $E(X-a)^2$ به ازای چه مقداری از a حاصل میشود؟

۱. میانه X ۲. میانگین X ۳. میانگین X به شرط Y ۴. مد X

سوالات تشریحی

۱- برای تابع چگالی احتمال زیر تابع رگرسیون Y روی X را پیدا کنید. برای $x=0.5$ مقدار Y را پیش بینی کنید.

$$f(x, y) = 8xy \quad ; \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < x$$

- ۲- برای داده های جدول زیر معادله خط رگرسیون را پیدا کنید و در ادامه برای شیب این خط یا همان پارامتر b با فرض خطای نرمال یک فاصله اطمینان نود درصدی بیابید.

سرعت x	45	60	75	90	95
مسافت y	6/25	6/5	5/85	5/2	3/15

عدد جدول مورد نیاز: 2/353

- ۳- فرض کنید X_1, X_2, X_3 یک نمونه تصادفی از توزیع $N(1, 4)$ باشد. توزیع بردار $\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 - X_2 \\ X_1 + X_3 \\ X_2 - X_3 \end{bmatrix}$ را پیدا کنید.

- ۴- موارد زیر را بطور کامل تعریف و بیان کنید:
تابع برآورد پذیر-قضیه گاوس مارکف

- ۵- مدل خطی $Y = a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + E$ را در نظر بگیرید که در آن $E \sim N(0, \sigma^2)$. بر اساس داده های زیر فرضیه خطی $H_0: a_3 = a_1 - a_2$ را با میزان سطح معنی داری پنج درصدی بیازمایید. عدد جدول: 161/45

y	X_1	X_2	X_3
0	1	-1	0
1	0	0	1
-1	1	0	0
2	1	1	0

پاسخ صحیح

شماره
سوال

۱	ج
۲	الف
۳	ج
۴	د
۵	ب
۶	الف
۷	ب
۸	د
۹	ج
۱۰	ب
۱۱	د
۱۲	ب
۱۳	الف
۱۴	ج
۱۵	الف
۱۶	د
۱۷	الف
۱۸	ج
۱۹	د
۲۰	ب

۱- کدام گزینه درست است؟

۱. اگر X و Y همتوزیع باشند، آنگاه برابرند.

۲. اگر $P(X \geq 0) = 1$ آنگاه $E(X) < 0$

۳. اگر $X \geq 0$ و $E(X) = 0$ آنگاه $P(X = 0) = 0$

۴. برابر بودن دو متغیر تصادفی X و Y مستلزم همتوزیع بودن آنهاست.

۲- تفسیر $\rho = 0$ (ضریب همبستگی) کدام است؟

۱. بین X و Y هیچ رابطه ای وجود ندارد.

۲. X و Y ناهمبسته اند.

۳. رابطه خطی بین X و Y برقرار است.

۴. تغییرات X و Y در یک جهت است.

۳- در آزمون فرضیه $H_0: \rho = 0$ ، آماره $T = \frac{R\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-R^2}}$ دارای چه توزیعی است؟

۱. نرمال استاندارد

۲. تی با $n-1$ درجه آزادی

۳. کی دو با $n-2$ درجه آزادی

۴. تی با $n-2$ درجه آزادی

۴- هرگاه (X, Y) دارای توزیع توأم نرمال $N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ باشد، تابع رگرسیونی Y روی X کدام است؟

۱. $\mu_Y + \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (X - \mu_X)$

۲. $\mu_X + \rho \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} (Y - \mu_Y)$

۳. $\mu_X + \rho \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} (X - \mu_X)$

۴. $\mu_Y + \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (Y - \mu_Y)$

۵- فرض کنید $\mu_X = \mu_Y = 2$ و $\rho = \frac{1}{2}$ و $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = 1$. به کمک بهترین فرم خطی، به ازای $x = 4$ ، چه مقداری را برای Y

پیش بینی می کنید؟

۱. 2

۲. 1

۳. 3

۴. $\frac{5}{2}$

۶- کدام گزینه زیر، در مدل رگرسیون خطی ساده $Y | x = a + bx + E$ که $E \sim N(0, \sigma^2)$ ، برای پارامتر b ، برآوردگری نارایب است؟

۱. $\frac{S_{XY}}{S_X^2}$
۲. $S_Y^2 - S_X^2$
۳. $\frac{S_{XY}}{S_X S_Y}$
۴. $\frac{S_{XY}}{S_Y^2}$

۷- در مدل رگرسیون خطی ساده $Y | x = a + bx + E$ که $E \sim N(0, \sigma^2)$ ، برآوردگی نارایب برای σ^2 کدام است؟

۱. $S_Y^2 - \hat{b}^2 S_X^2$
۲. $S_Y^2 - \hat{b}^2 S_X^2$
۳. $\frac{S_{XY}}{S_X S_Y}$
۴. $\frac{S_{XY}}{S_X^2}$

۸- فرض کنید E_i ها مستقل و $E_i \sim N(0, \sigma^2)$ باشند. در اینصورت اگر $Y_i = a + bx_i + E_i$ باشد، آنگاه $\frac{(n-2)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}$ دارای

کدام توزیع آماری است؟

۱. تی با $n-1$ درجه آزادی
۲. کای دو با $n-1$ درجه آزادی
۳. تی با $n-2$ درجه آزادی
۴. کای دو با $n-2$ درجه آزادی

۹- در یک مدل خطی ساده تحت فرض نرمال، کدام عبارت برقرار است؟

۱. برآورد MLE برای پارامتر a ، $\frac{S_{XY}}{S_Y^2}$ است.
۲. $Y_i - \bar{Y}$ و \bar{Y} از هم مستقلند.

۳. $V(\hat{b}) = \frac{\sigma^2}{S_X^2}$
۴. میانگین \hat{E}_i عددی مثبت است.

۱۰- اگر $SSE = 2/5446$ و $SST = 7/532$ آنگاه ضریب تعیین برابر است با:

۱. 0/3378
۲. 0/6621
۳. 0/95
۴. 0/1428

۱۱- ضریب همبستگی بین Y_i و \hat{Y}_i کدام گزینه است؟

۱. $\sqrt{\frac{SSR}{SST}}$
۲. $\frac{SSR}{SST}$
۳. $\sqrt{\frac{SSE}{SST}}$
۴. $\frac{SSE}{SST}$

۱۲- در نمودار احتمال نرمال (NPP) محور عمودی کدام گزینه است؟

۱. $\frac{i}{n}$
۲. $\phi^{-1}\left(\frac{i-0/5}{n}\right)$
۳. $\frac{i-0/5}{n}$
۴. $(Y_i - \hat{Y}_i)$

۱۳- آماره $\frac{\sqrt{n}(\hat{b}-b)}{\hat{\sigma}}$ دارای کدام توزیع آماری است؟

۱. t_1 ۲. t_{n-1} ۳. t_2 ۴. t_{n-2}

۱۴- مدل غیر خطی $Y | x = a + bx^2 + E$ تحت تبدیل $t = x^2$ به کدام مدل زیر تبدیل می شود؟

۱. $Y | x = a + b\sqrt{t} + E$ ۲. $Y | x = a + bt + E$ ۳. $Y | x = (a+b)t + E$ ۴. $Y | x = a + be^t + E$

۱۵- برآورد کمترین مجموع توانهای دوم برای پارامتر a در مدل ماتریسی $Y = Xa + E$ کدام است؟

۱. $\hat{a} = (X'X)^{-1}X'Y$ ۲. $\hat{a} = X(X'X)^{-1}X'Y$ ۳. $\hat{a} = (X'X)^{-1}XY$ ۴. $\hat{a} = X(X'X)^{-1}XY$

۱۶- در مدل خطی $Y = Xa + E$ ، برآورد کمترین توانهای دوم بردار a را نمیتوان به طور یکتا به دست آورد، هرگاه:

۱. در مدل همخطی رخ نداده باشد. ۲. واریانس $X'X$ موجود باشد. ۳. ستونهای X از هم مستقل باشند. ۴. ستونهای ماتریس X پرتبه نباشد.

۱۷- عبارت $g(a) = E(X-a)^2$ به ازای چه مقدار a می نیمی می شود؟

۱. میانه ۲. مد ۳. $E(X)$ ۴. $E(X | Y)$

۱۸- تبدیل لوجیت کدام است؟

۱. $\ln \frac{p(x)}{1-p(x)}$ ۲. $\frac{p(x)}{1-p(x)}$ ۳. $\exp \frac{p(x)}{1-p(x)}$ ۴. $\sqrt{\frac{p(x)}{1-p(x)}}$

۱۹- ماتریس $B(BB)^{-1}B$:

۱. خودتوان نیست. ۲. متقارن است. ۳. خودتوان است و متقارن نیست. ۴. 1 و 2

۲۰- در مدل رگرسیونی به صورت $E(Y | X) = a + bX + e$ ، مقدار $V(e) + E(e^2)$ کدام است؟

۱. صفر ۲. $2\sigma^2$ ۳. $4\sigma^2$ ۴. σ^2

سوالات تشریحی

۱- در مدل غیر خطی $Y | x = \alpha\beta^x + E$ به طوریکه $\alpha, \beta, E > 0$ ، پارامترهای α و β را چگونه برآورد می کنید؟ توضیح دهید.

۱.۲۰ نمره ۲- در یک مدل خطی ساده تحت فرض نرمال، برآورد درستنمایی ماکزیمم (MLE) را برای پارامترهای a و b پیدا کنید.

۱.۲۰ نمره ۳- به کمک داده های زیر، معادله خط رگرسیون را بیابید و برای پارامتر b یک فاصله اطمینان 90 درصدی پیدا کنید. (عدد جدول 6/31)

X	9	11	13
Y	4	1	10

۱.۲۰ نمره ۴- الف: تابع $C'a = \sum_{i=1}^k C_i a_i$ را چه موقع برآورد پذیر می گویند؟
ب: اگر در بردار $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ ، مولفه ها مستقل و دارای واریانس مشترک یک باشند، در اینصورت ماتریس کوواریانس Y ، (Σ_Y) چگونه است؟

۱.۲۰ نمره ۵- فرض کنید $Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} \sim N \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$ ، با فرض $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، چگالی BY را پیدا کنید.

نمبر سوال	جواب صحيح
1	د
2	ب
3	د
4	الف
5	ج
6	الف
7	ب
8	د
9	ب
10	ب
11	الف
12	ب
13	د
14	ب
15	الف
16	د
17	ج
18	ب
19	ب
20	ب

۱- کدام صحیح است؟

۱. $E(X^2) = E^2(X)$ ۲. $E(X^2) \geq E^2(X)$ ۳. $E(X^2) \leq E^2(X)$ ۴. $E(X^2) \neq E^2(X)$

۲- اگر واریانس یک متغیر تصادفی صفر شود آنگاه:

۱. $P(X=0)=1$ ۲. $P(X=\mu_x)=0$ ۳. $P(X=\mu_x)=1$ ۴. $P(X=1)=1$

۳- فرض نمایید $2x + y - 4 = 0$ ضریب همبستگی دو متغیر برابر است با؟

۱. 1 ۲. -1 ۳. -2 ۴. 2

۴- در آزمون $\begin{cases} H_0: \rho=0 \\ H_1: \rho \neq 0 \end{cases}$ آماره آزمون تحت فرض صفر برابر است با:

۱. Z ۲. t ۳. F ۴. χ^2

۵- اگر $f(x, y) = x + y$ $0 < x, y < 1$ آنگاه تابع پیش بینی کننده برای y برابر است با:

۱. $\frac{x+3}{2x+1}$ ۲. $\frac{3x+2}{6x+3}$ ۳. $\frac{6x+2}{3x+2}$ ۴. $\frac{6x+3}{3x+2}$

۶- مقدار پیش بینی کننده y برابر است با؟ $\begin{cases} \rho=2 & \mu_x=3 \\ \sigma_x^2=16 & \mu_y=1 \\ \sigma_y^2=9 & x=2 \end{cases}$ اگر

۱. 1/66 ۲. 0/5 ۳. -1/66 ۴. -0/5

۷- در معادله رگرسیونی $E(\text{var}(y|x))$ برابر است با:

۱. $\sigma_x^2(1-\rho^2)$ ۲. $\sigma_y^2(1-\rho^2)$ ۳. $\frac{\sigma_y^2}{(1-\rho^2)}$ ۴. $\frac{\sigma_x^2}{(1-\rho^2)}$

۸- در یک مدل رگرسیونی با 10 داده $\begin{cases} \bar{x}=1 \\ s_x^2=3 \\ s_y^2=2 \end{cases}$ و $\sigma^2=9$ واریانس \hat{a} برابر است با؟

۱. 0/135 ۲. 1/2 ۳. 0/8 ۴. 0/45

۹- در یک مدل رگرسیونی اگر $SSE = 120$ و $SST = 240$ ضریب تعیین برابر است با:

۱. 0/5 ۲. -1 ۳. 0/25 ۴. 0/75

۱۰- در مدل خطی ساده گذرانده از مبدأ داریم:

۱. $E(Y|X=0)=1$ ۲. $E(Y|X=0)=0$ ۳. $E(Y|X=1)=0$ ۴. $E(Y|X=1)=1$

۱۱- برای یک ماتریس همیشه مثبت کدام مورد همواره برقرار است؟

۱. درایه های قطری آن صفر است.
۲. جذر آن نامتقارن است.
۳. جذر آن یک ماتریس همیشه مثبت یکتا است.
۴. جذر آن با خود ماتریس برابر است.

۱۲- اگر P ماتریس قائم باشد آنگاه $Det(P)$ برابر است با:

۱. 0 ۲. 1 ۳. -1 ۴. ± 1

۱۳- بادر نظر گرفتن $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\mu = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ بردار میانگین $AY + B$ را بیابید.

۱. $\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ ۲. $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ ۳. $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ ۴. $\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

۱۴- فرض کنید $\Sigma_y = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ آنگاه Σ_{By} برابر است با:

۱. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ ۲. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ ۳. $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ۴. $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

در صورتی که واریانس ماتریس $X'X$ برابر $\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}$ و نیز $XY = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ آنگاه \hat{a} برابر است با:

۱. $\begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ 0 \\ -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$
۲. $\begin{bmatrix} \frac{2}{6} \\ \frac{1}{6} \\ -\frac{11}{18} \end{bmatrix}$
۳. $\begin{bmatrix} \frac{2}{6} \\ \frac{1}{6} \\ -\frac{5}{18} \end{bmatrix}$
۴. $\begin{bmatrix} \frac{2}{6} \\ \frac{3}{6} \\ -\frac{11}{18} \end{bmatrix}$

۱۶- در یک مدل c_N ، MSE دارای چه توزیعی است؟

۱. t با $n-k$ درجه آزادی
۲. t با $n-k+h$ درجه آزادی
۳. F با $n-k+h$ درجه آزادی
۴. F با $n-k$ درجه آزادی

در یک مدل c_N که $(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$ می باشد در صورتی که $\sigma^2 = 16$ و $n = 9$ فاصله اطمینان ۹۰ درصد برای a_1 برابر

است باک

$$t_{0/975}(6) = 2/43$$

$$t_{0/95}(6) = 1/94$$

۱. $(-0/88, 5/88)$
۲. $(-1/88, 5/88)$
۳. $(-1/78, 4/73)$
۴. $(-0/78, 4/83)$

در یک مدل رگرسیونی $Y = ax^2 + bx + c + E$ با داده های مستقل $\begin{pmatrix} 1,1 \\ 2,3 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} 3,4 \\ 0,0 \end{pmatrix}$ برآورد پارامترها برابر است با؟

۱. $4, 1, 0$
۲. $-1, 0, 0/2$
۳. $9, 4, 0$
۴. $5, 1, 0/2$

برای بردار نرمال (X_1, X_2, X_3) اگر $\rho_{12} = 0/2$ ، $\rho_{13} = 0/4$ ، $\rho_{23} = 0/3$ و $\rho_{32} = 0/5$ باشد، $\rho_{13|2}$ را بدست آورید؟

۱. $0/4921$
۲. $0/3637$
۳. $0/4$
۴. $0/5$

۲۰- در یک مدل رگرسیونی اگر فاکتور مورد نظر دارای r سطح باشد به چند متغیر صفر و یک نیازمندیم؟

۲. $r+1$

۱. r

۴. بستگی به تعداد نمونه دارد.

۳. $r-1$

سوالات تشریحی

۱.۲۰ نمره

۱- با استفاده از اطلاعات زیر آزمون $\begin{cases} H_0: \rho = -0/9 \\ H_1: \rho = -1 \end{cases}$ را در سطح 0/05 انجام دهید.

X	0	1	2	-1	4	2	6	7	8	3
Y	1	0	-1	3	0	5	2	-3	-1	1

۱.۲۰ نمره

۲- در صورتی که $\begin{cases} \mu_Y = 2 & \mu_X = 1 \\ \sigma_Y^2 = 4 & \sigma_X^2 = 1 \\ \rho = \frac{1}{2} & x = 3 \end{cases}$ بهترین فرم خطی را پیش بینی و مقدار Y را محاسبه نمایید.

۱.۲۰ نمره

۳- با توجه به جدول زیر فاصله اطمینان 90 درصدی برای b را محاسبه نمایید.

$$t_{0/95}(3) = 2/353$$

$$t_{0/975}(3) = 1/76$$

X	40	70	54	80	72
Y	35	63	33	47	56

۱.۲۰ نمره

۴- نشان دهید $\hat{\sigma}$ برآورد ناریب σ نیست؟

۱.۲۰ نمره

۵- در صورتی که $Y \approx N \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$ قرار دهید $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ آنگاه چگالی BY را بیابید.

پاسخ صحیح	شماره سوال
ب	1
ج	2
ب	3
ب	4
ب	5
د	6
ب	7
ب	8
الف	9
ب	10
ج	11
د	12
ج	13
ج	14
ب	15
د	16
ب	17
الف	18
ب	19
ج	20

۱- اگر X متغیر تصادفی نامنفی و $E(X) = 0$ باشد در این صورت کدام عبارت صحیح است؟

۱. $P(X = 0) = 1$ ۲. $P(X = 1) = 0$ ۳. $P(X = 1) = 1$ ۴. $P(X = 0) = 0$

۲- برای کوواریانس دو متغیر تصادفی X و Y کدام ویژگی برقرار است؟

۱. کوواریانس به مبدأ اندازه گیری X و Y بستگی دارد.
۲. کوواریانس به واحد اندازه گیری X و Y بستگی ندارد.
۳. کوواریانس به مبدأ و واحد اندازه گیری X و Y بستگی دارد.
۴. کوواریانس به مبدأ اندازه گیری X و Y بستگی ندارد ولی به واحد اندازه گیری X و Y بستگی دارد.

۳- فرض کنید بین متغیرهای تصادفی X و Y رابطه خطی $2X - 4Y = 0$ برقرار است. در این صورت ضریب همبستگی بین X و Y کدام است؟

۱. $\rho = -1$ ۲. $\rho = 0$ ۳. $\rho = 1$ ۴. $\rho = 0.5$

۴- فرض کنید برای یک نمونه 103 تایی مقدار ضریب همبستگی برابر $r = 0.5$ باشد. در این صورت مقدار آماره آزمون برای فرض $H_0: \rho = 0.6$ در مقابل فرض $H_1: \rho \neq 0.6$ کدام است؟

۱. 0/45 ۲. 0/55 ۳. 0/65 ۴. 0/75

۵- فرض کنید متغیر تصادفی X دارای میانگین μ و واریانس σ^2 باشد. در این صورت به ازای چه مقداری از a تابع $g(a) = E|X - a|$ مینیمم است؟

۱. $a = \mu$ ۲. $a = \sigma^2$ ۳. $a = \text{median}(a)$ ۴. $a = \text{Mode}(a)$

۶- فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y دارای ویژگی های زیر باشند. در این صورت بهترین تابع پیش بینی کننده خطی کدام است؟

$$\mu_x = 1, \mu_y = 2, \sigma_x^2 = 1, \sigma_y^2 = 4, \rho = 0.5$$

۱. $l(x) = 1 + x$ ۲. $l(x) = 1 - x$ ۳. $l(x) = 1 + 0.5x$ ۴. $l(x) = 1 - 0.5x$

۷- در تحلیل مدل گرسیونی $Y_i = a + bx_i + E_i, i = 1, \dots, n$ کدامیک از مفروضات در مورد E_i ها برقرار نیست؟

۱. $E(E_i) = 0$ ۲. $\text{Var}(E_i) = \sigma^2$
۳. E_i ها همبسته اند ۴. E_i ها دارای توزیع احتمال نرمال هستند.

۸- کدام نمودار برای بررسی فرض نرمال بودن خطاهای مدل رگرسیونی مناسب است؟

۱. بافت نگار خطا
۲. نمودار جعبه ای خطا
۳. نمودار ساقه و برگ خطا
۴. نمودار احتمال نرمال

۹- در مدل گرسیونی $Y_i = a + bx_i + E_i, i = 1, \dots, n$ که در آن $E_i \sim N(0, \sigma^2)$ می باشد، برآوردیاب نااریب σ^2 کدام است؟

۱. $S_Y^2 - \hat{b}^2 s_x^2$
۲. $\frac{n}{n-2} (S_Y^2 - \hat{b}^2 s_x^2)$
۳. $\frac{S_{xy}^2}{\hat{b}^2 s_x^2}$
۴. $\frac{S_{xy}^2}{n-2}$

۱۰- در مدل گرسیونی $Y_i = a + bx_i + E_i, i = 1, \dots, n$ برای $n = 5$ فرض کنید

$$s_x^2 = 346, s_y^2 = 1/447, s_{xy} = -18/0.2, \bar{x} = 73, \bar{y} = 5/39$$

معادله خط رگرسیون Y روی X کدام است؟

۱. $\hat{y} = 11/292 - 0/528x$
۲. $\hat{y} = 9/192 - 0/5208x$
۳. $\hat{y} = 7/263 + 1/745x$
۴. $\hat{y} = 4/851 + 0/745x$

۱۱- در مدل گرسیونی $Y_i = a + bx_i + E_i, i = 1, \dots, n$ مقدار $\sum_{i=1}^n x_i \hat{E}_i$ کدام است؟

۱. صفر
۲. $\hat{\sigma}^2$
۳. nS_y^2
۴. $S_y^2 - n\hat{b}^2 s_x^2$

۱۲- در مدل گرسیونی $Y_i = a + bx_i + E_i, i = 1, \dots, n$ فرض کنید $n = 5$ و $SST = 7/5$ و $SSE = 2/5$ باشد. آماره آزمون برای فرض $H_0: b = 0$ کدام است؟

۱. 2
۲. 3
۳. 6
۴. 7/5

۱۳- در مدل گرسیونی $Y_i = a + bx_i + E_i, i = 1, \dots, n$ فرض کنید $n = 5$ و $SST = 7/5$ و $SSE = 2/5$ باشد. در این صورت مقدار ضریب همبستگی (r) کدام است؟

۱. 0/57
۲. 0/66
۳. 0/81
۴. 0/86

۱۴- برای دو بردار متعامد u و v با فرض $u \neq 0$ و $v \neq 0$ ، مقدار زاویه بین دو بردار u و v کدام است؟

۱. $\frac{\pi}{4}$
۲. $\frac{\pi}{3}$
۳. π
۴. $\frac{\pi}{2}$

۱۵- فرض کنید X و Y دو بردار تصادفی n بعدی مستقل با ماتریس کوواریانس Σ_X و Σ_Y باشند، در این صورت مقدار Σ_{X+Y} کدام است؟

۱. $\Sigma_{X+Y} = \Sigma_X - \Sigma_Y$ ۲. $\Sigma_{X+Y} = \Sigma_X \Sigma_Y$ ۳. $\Sigma_{X+Y} = \Sigma_X + \Sigma_Y$ ۴. $\Sigma_{X+Y} = \Sigma_{XY}$

۱۶- در مدل رگرسیون چندمتغیره $Y = aX + E$ بر آورد پارامتر a کدام است؟

۱. $\hat{a} = X'(XX')^{-1}Y$ ۲. $\hat{a} = X'Y(XX')^{-1}$ ۳. $\hat{a} = (XX')^{-1}X'Y$ ۴. $\hat{a} = (X'X)^{-1}X'Y$

۱۷- در مدل رگرسیون چندمتغیره $Y = aX + E$ واریانس بر آورد پارامتر a کدام است؟

۱. $\Sigma_{\hat{a}} = \sigma^2 X'Y$ ۲. $\Sigma_{\hat{a}} = \sigma^2 (X'X)^{-1}$ ۳. $\Sigma_{\hat{a}} = \sigma^2 (XX')$ ۴. $\Sigma_{\hat{a}} = \sigma^2$

۱۸- تحت کدام شرط زیر، تابع $c'a = \sum_{i=1}^k c_i a_i$ یک تابع بر آورد پذیر است؟

۱. هرگاه یک تابع خطی مانند $t'Y = \sum_{i=1}^k t_i Y_i$ وجود داشته باشد به طوریکه a هر چه باشد و $E(t'Y) = c'a$ باشد.

۲. هرگاه یک تابع خطی مانند $t'Y = \sum_{i=1}^k t_i Y_i$ وجود داشته باشد به طوریکه c هر چه باشد و $E(t'Y) = t'c$ باشد.

۳. هرگاه یک تابع خطی مانند $t'Y = \sum_{i=1}^k t_i Y_i$ وجود داشته باشد به طوریکه a هر چه باشد و $E(t'Y) = t'a$ باشد.

۴. هرگاه یک تابع خطی مانند $t'Y = \sum_{i=1}^k t_i Y_i$ وجود داشته باشد به طوریکه $E(t'Y) = t'Y$ باشد.

۱۹- برای کاهش اثر هم خطی کدام روش پیشنهاد شده است؟

۱. استاندارد کردن متغیرها
۲. حذف داده ها دور افتاده
۳. رگرسیون ستیغی
۴. به کار بردن قضیه گاوس

۲۰- در صورتی که در یک مدل رگرسیونی متغیر وابسته دارای توزیع احتمال برنولی باشد کدام تحلیل مناسب است؟

۱. رگرسیون غیرخطی
۲. رگرسیون دوجمله ای
۳. رگرسیون ستیغی
۴. رگرسیون لوجستیک

سوالات تشریحی

۱- هرگاه رگرسیون Y روی X یک تابع خطی به صوت $d(x) = a + bx$ باشد ثابت کنید:

$$E(\text{Var}(y|x)) = \sigma_y^2 (1 - \rho^2)$$

۱.۲۰ نمره

۲- در مدل گرسیونی $Y_i = a + bx_i + E_i, i = 1, \dots, n$ ثابت کنید:

$$\sum_{i=1}^n \hat{Y}_i \hat{E}_i = 0$$

۱.۲۰ نمره

۳- فرض کنید Y یک بردار تصادفی نرمال با ویژگیهای زیر باشد. چگالی Y را بدست آورید.

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}, \quad E(Y) = \mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

۱.۲۰ نمره

۴- مدل خطی $Y = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + E$ که در آن $E \sim N(0, \sigma^2)$ در نظر بگیرید. اگر یافته های یک نمونه

تصادفی $Y = (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)'$ با میانگین $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)'$ به صورت جدول زیر باشد. فرض خطی

$H_0: a_2 = a_1 - a_3$ را با میزان 5 درصد آزمون کنید.

y	x_1	x_2	x_3
0	1	-1	0
1	0	0	1
-1	1	0	0
2	1	1	0

۱.۲۰ نمره

۵- ضریب همبستگی چندگانه و کاربرد آن را توضیح دهید.

نمبر رد سوال	ياسخ صحيح
۱	الف
۲	د
۳	ج
۴	ب
۵	ج
۶	الف
۷	ج
۸	د
۹	ب
۱۰	ب
۱۱	الف
۱۲	ج
۱۳	ج
۱۴	د
۱۵	ج
۱۶	د
۱۷	ب
۱۸	الف
۱۹	ج
۲۰	د

۱- فرض کنید $Y = 2X + 3$ ، ضریب همبستگی X و Y برابر است با:

۱. -1 ۲. 1 ۳. 2 ۴. -2

۲- آماره $T = \frac{R\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-R^2}}$ برای آزمون $H_0: \rho = 0$ تحت فرض نرمال دو متغیره (X, Y) و $n > 2$ از کدام توزیع پیروی می کند؟

۱. توزیع نرمال ۲. توزیع کی دو
۳. توزیع تی با $n-1$ درجه آزادی ۴. توزیع تی با $n-2$ درجه آزادی

۳- هرگاه داشته باشیم $\mu_X = 1, \mu_Y = 2, \sigma_X^2 = 1, \sigma_Y^2 = 4, \rho = \frac{1}{2}$ برای $x = 3$ مقدار پیش بینی Y به کمک بهترین فرم خطی کدام است؟

۱. 3 ۲. 2 ۳. 4 ۴. 5

۴- در یک مدل خطی ساده تحت فرض نرمال کدام گزینه درست است؟

۱. \hat{a}, \hat{c} مستقل اند. ۲. y_i, \bar{y} مستقل اند.
۳. \hat{c}, \hat{b} مستقل اند. ۴. $y_i - \hat{y}_j, \hat{c}$ مستقل اند.

۵- در مدل خطی $Y_i = a + E_i$ بهترین برآورد کننده a کدام است؟

۱. \bar{Y} ۲. 0 ۳. \bar{X} ۴. \overline{XY}

۶- در مدل خطی ساده $Y = bx + E$ برآورد نااریب b کدام است؟

۱. $\hat{b} = \frac{\overline{xY}}{\overline{x^2}}$ ۲. $\hat{b} = \frac{\overline{xY}}{\bar{x}}$ ۳. $\hat{b} = \frac{\overline{xY}}{\bar{x}^2}$ ۴. $\hat{b} = \frac{\overline{xY}}{\bar{Y}}$

۷- فرض کنید $Y = bx + E, E \sim N(0, x\sigma^2)$ باشد، برآورد b کدام است؟

۱. $\hat{b} = \frac{\bar{x}}{\bar{Y}}$ ۲. $\hat{b} = \frac{\bar{Y}}{\bar{x}}$ ۳. $\hat{b} = \frac{Y}{x}$ ۴. $\hat{b} = \frac{Y}{\bar{x}}$

۸- تصویر بردار $u = (1, 2, 3, 4)$ روی بردار $v = (1, 1, 1, 1)$ کدام است؟

۱. $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ ۲. $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ۳. $(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2})$ ۴. $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{2})$

۹- وارون مور-پنروز ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ برابر است با:

۱. $\frac{1}{25} A'$ ۲. $\frac{1}{25} A$ ۳. $\frac{1}{20} A$ ۴. $\frac{1}{20} A'$

۱۰- فرض کنید $Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، \sum_{BY} برابر است با؟

۱. $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ۲. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ ۳. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ ۴. $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

۱۱- فرض کنید $Y \sim N(\mu, \Sigma)$ باشد، ماتریس کواریانس بردار Y_1 به شرط معلوم بودن بردار Y_2 کدام است؟

۱. $\Sigma_{22} - \Sigma_{12}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{21}$ ۲. $\Sigma_{12} - \Sigma_{11}\Sigma_{21}^{-1}\Sigma_{22}$ ۳. $\Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}$ ۴. $\Sigma_{21} - \Sigma_{22}\Sigma_{12}^{-1}\Sigma_{11}$

۱۲- در مدل رگرسیونی چندگانه $Y = Xa + E$ ، $\Sigma_{\hat{a}}$ برابر است با:

۱. $\sigma^2(X'X)^{-1}X'Y$ ۲. $\sigma^2(X'X)^{-1}Y$ ۳. $\sigma^2(X'X)^{-1}$ ۴. $Y(X'X)^{-1}\sigma^2$

۱۳- در مدل رگرسیونی چندگانه $Y = Xa + E$ بردار \hat{a} برابر است با:

۱. $(X'X)^{-1}X'Y$ ۲. $(X'X)^{-1}Y$ ۳. $(X'X)^{-1}XY$ ۴. $(X'X)^{-1}XY'$

۱۴- در مدل خطی $Y = Xa + E, E \sim N(0, \sigma^2 I)$ برآورد نا اریب σ^2 برابر است با:

۱. $\hat{\sigma}^2 = \|Y - \hat{\mu}\|^2$ ۲. $\hat{\sigma}^2 = \|Y\|^2 - \|\mu\|^2$ ۳. $\hat{\sigma}^2 = \|Y\|^2 - \|\hat{\mu}\|^2$ ۴. $\hat{\sigma}^2 = \frac{\|Y - \hat{\mu}\|^2}{n-k}$

۱۵- در مدل‌های خطی چندمتغیری، آماره آزمون تحت فرض $H_0: Ma = 0$ دارای چه توزیعی است؟

۱. F نامرکزی ۲. $F_{(h, n-k)}$ ۳. χ_{n-k}^2 ۴. $N(\mu, \sigma^2 I)$

۱۶- در مدل خطی چند گانه آماری برای آزمون فرض $H_0: Ma = 0$ طبق روش نسبت راستنمایی گسترده L کدام است؟

۱. $\|Y - \hat{\mu}\|^n$ ۲. $\frac{\|Y - \hat{\mu}\|^n}{\|Y - \hat{\mu}\|^n}$ ۳. $\frac{\|Y - \hat{\mu}\|}{\|Y - \hat{\mu}\|}$ ۴. $\frac{\|Y - \hat{\mu}\|^n}{\|Y - \hat{\mu}\|}$

۱۷- با فرض اینکه $\rho_{12} = \rho_{23} = 0$ و $\rho_{13} = 0.1$ باشد، مقدار $\rho_{13|2}$ برابر است با:

۱. 0 ۲. 1 ۳. 0.1 ۴. 0.2

۱۸- روش رگرسیون برآمده یا ستیغی به چه منظور به کار می رود؟

۱. افزایش همبستگی ۲. افزایش اثر هم خطی ۳. کاهش اثر هم خطی ۴. کاهش همبستگی

۱۹- در چه مواردی از رگرسیون لجستیک استفاده می شود؟

۱. متغیر وابسته، گسسته و به صورت صفر و یک باشد.
۲. متغیر مستقل، گسسته و به صورت صفر و یک باشد.
۳. متغیر وابسته، پیوسته و مقادیری بین صفر و یک اختیار کند.
۴. متغیر مستقل، پیوسته و مقادیری بین صفر و یک اختیار کند.

۲۰- همخطی در رگرسیون چه موقع ممکن است پدید آید؟

۱. هرگاه سطرهای X مستقل نباشند.
۲. هرگاه سطرهای X مستقل باشند.
۳. هرگاه ستونهای X مستقل باشند.
۴. هرگاه ستونهای X مستقل نباشند.

سوالات تشریحی

۱.۴۰ نمره

۱- فرض کنید $2X + Y + 1 = 0$. ضریب همبستگی Y, X را بدست آورید؟

۱.۴۰ نمره

۲- نشان دهید در یک مدل خطی ساده تحت فرض نرمال $\bar{Y}, Y_i - \bar{Y}$ مستقل می باشند.

۱.۴۰ نمره

۳- فرض کنید $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)$ دارای بردار میانگین $\mu = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ و ماتریس کواریانس $\Sigma = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ باشد.

با فرض $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ بردار میانگین و ماتریس کواریانس $U = AY + B$ را بدست آورید؟

۱.۴۰ نمره

۴- فرض کنید یک مدل خطی به صورت زیر باشد:

$$Y_1 = a_1 - a_2 + E_1$$

$$Y_2 = 2a_1 + a_2 + E_2$$

$$Y_3 = -a_1 + E_3$$

نشان دهید که $Y_1 - 4Y_3$ یک برآورد یاب نااریب برای $5a_1 - a_2$ است؟

۱.۴۰ نمره

۵- قضیه کاکران را به زبان آماری بیان کنید.

نمبر سوال	جواب صحيح
1	ب
2	د
3	ج
4	ج
5	الف
6	الف
7	ب
8	ج
9	ب
10	الف
11	ج
12	ج
13	الف
14	د
15	ب
16	ب
17	ج
18	ج
19	الف
20	د

۱- اگر $\text{cov}(x, y) = 3$ باشد، آنگاه $\text{cov}(-2x, 4y)$ برابر است با:

۱. -24 ۲. 24 ۳. 3 ۴. -3

۲- با فرض اینکه هریک از میانگین متغیرهای x_1, \dots, x_n مخالف صفر باشد، درچه صورت میانگین $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$ صفر خواهد شد؟

۱. $\sum a_i = 1$ ۲. $\sum a_i = 0$ ۳. $\sum a_i = -1$ ۴. $\sum x_i = 0$

۳- در صورتی که $\sigma_x^2 = 1$
 $\sigma_y^2 = 4$
 $\rho = \frac{1}{2}$ آنگاه مقدار \bar{b} برابر است با؟

۱. 1 ۲. 2 ۳. 4 ۴. $\frac{1}{4}$

۴- با در نظر گرفتن اطلاعات $\sigma_x^2 = 1$
 $\sigma_y^2 = 4$
 $\rho = \frac{1}{2}$ در یک مدل رگرسیونی خطی مقدار $E(\text{var}(y|x))$ برابر است با؟

۱. 1 ۲. 3 ۳. $\frac{3}{4}$ ۴. $\frac{3}{16}$

۵- با استفاده از اطلاعات زیر مقدار برآورد ضریب همبستگی برابر است با؟

$$\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 = 160$$
$$\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 120$$
$$\sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})^2 = 90$$

۱. 1 ۲. 12 ۳. 4 ۴. $\frac{1}{12}$

۶- در مدل رگرسیونی خطی ساده $V(\hat{b})$ برابر است با؟

۱. $\frac{\sigma^2}{n}$ ۲. $\frac{\sigma^2}{nS_y^2}$ ۳. $\frac{\sigma^2}{nS_x^2}$ ۴. σ^2

۷- گزینه نادرست کدام است؟

۱. $\frac{SS_R}{\sigma^2} \approx \chi^2_{(1)}$

۲. $\sum (y_i - \hat{y}_i)(\hat{y}_i - \bar{y}_i) \neq 0$

۳. $\frac{SS_T}{\sigma^2} \approx \chi^2_{(n-1)}$

۴. $SS_T = nS_Y^2$

۸- در یک مدل رگرسیونی $SS_T = 240$ می باشد، ضریب تعیین برابر است با؟
 $SS_E = 120$

۱. $\frac{1}{2}$

۲. $\frac{1}{4}$

۳. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۴. 1

۹- در مدل رگرسیونی خطی ساده گذرانده از مبدأ کدام رابطه برقرار است؟

۱. $E(y|x=0)=1$

۲. $E(y|x=0)=0$

۳. $E(y|x=1)=0$

۴. $E(y|x=1)=1$

۱۰- در یک مدل رگرسیونی $\text{cov}(\hat{a}, \hat{b})$ برابر است با؟

۱. σ^2

۲. $\frac{\sigma^2}{n}$

۳. $-\frac{\sigma^2 \bar{x}}{nS_x^2}$

۴. $1 + \frac{\sigma^2}{S_x^2}$

۱۱- تصویر بردار $(1,2,3,4)$ روی بردار $(1,1,1,1)$ برابر است با؟

۱. $\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right)$

۲. $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$

۳. $\left(\frac{3}{5}, \frac{3}{5}, \frac{3}{5}, \frac{3}{5}\right)$

۴. $\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$

۱۲- جذر ماتریس $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ برابر است با؟

۱. $\begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} & \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{2} & \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

۲. $\begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} & \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} & \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

۳. $\begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} & \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} & \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

۴. $\begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{3}}{2} & \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{2} & \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

۱۳- با فرض اینکه A یک ماتریس همیشه مثبت $n \times n$ باشد، آنگاه کدام رابطه نادرست است؟

۱. ممکن است A^{-1} وجود نداشته باشد.

۲. A^k همیشه مثبت است.

۳. A^{-1} همیشه مثبت است.

۴. به ازاء هر بردار x، $X'AX > 0$

۱۴- اگر y_1, y_2 دو متغیر دارای توزیع نرمال توأم باشند، شرط لازم و کافی برای استقلال دو متغیر کدام است؟

۱. رابطه غیر خطی داشته باشند.

۲. رابطه خطی داشته باشند.

۳. $\rho = 0$

۴. $\rho \neq 0$

۱۵-

سه متغیر تصادفی با میانگین ۲ و واریانس ۱ میباشند. اگر $\sigma_{13} = 1$ باشد. قرار دهید $\sigma_{12} = -1$
 $\sigma_{32} = 0$
 $\begin{cases} U_1 = 2y_1 + y_2 + y_3 + 1 \\ U_2 = y_1 - y_2 - y_3 + 2 \end{cases}$

واریانس $(U_1, U_2)'$ کدام گزینه است؟

۱. $\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

۲. $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

۳. $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

۴. $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$

۱۶-

فرض کنید $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \approx N \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$ قرار دهید $w = y_1 + y_2 + y_3$ در این صورت واریانس W برابر است با؟

۱. ۱

۲. ۰

۳. ۳

۴. ۹

۱۷- یک ماتریس پر رتبه ستونی است اگر :

۱. همیشه مثبت باشد.

۲. وارون پذیر باشد.

۳. ستونهای آن به صورت خطی مستقل باشند.

۴. ستون و ردیفهای آن به صورت خطی مستقل باشند.

۱۸-

در صورتی که $(XX)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{4}{6} \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه \hat{a} برابر است با:
 $XY = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

۱. $\begin{bmatrix} -2/1 \\ 0 \\ 125/9 \end{bmatrix}$

۲. $\begin{bmatrix} 7/2 \\ 0 \\ 15/9 \end{bmatrix}$

۳. $\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}$

۴. $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \\ -\frac{5}{6} \end{bmatrix}$

۱۹- در مدل خطی (C) چه شرایطی برقرار است؟

۱. y_i ها همگی یک هستند.
۲. y_i ها مستقل.
۳. y_i ها ناهمبسته.
۴. y_i ها همگی صفر هستند.

۲۰- در یک مدل خطی 5 متغیره فرض $H_0: a_1 = 2a_2 = 4a_3$ را به چه صورت میتوان نوشت؟

۱.
$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
۲.
$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$
۳.
$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$
۴.
$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۲۱- در مدل رگرسیونی CN_0 درجه آزادی MST برابر است با؟

۱. $n - k$
۲. $n - h$
۳. $n - h + k$
۴. $n - 2$

۲۲- $\rho_{13} = 4$
در صورتی که $\rho_{12} = 2$ باشد، $\rho_{13|2}$ برابر است با؟
 $\rho_{23} = 2$

۱. 1
۲. 4
۳. 0
۴. $\frac{1}{2}$

۲۳- در مدل رگرسیونی در صورتی که فاکتور دارای r سطح باشد، چند متغیر تعریف میگردد؟

۱. r
۲. $r - 1$
۳. $\frac{r}{2}$
۴. $r + 1$

۲۴- $E(x - a)^2$ به ازاء چه مقدار a مینیمم میگردد؟

۱. 0
۲. 1
۳. μ_x
۴. σ_x^2

۲۵- اگر واریانس یک متغیر تصادفی صفر باشد آنگاه کدام صحیح است؟

۱. میانگین متغیر صفر است.
۲. میانگین متغیر یک است.
۳. $p(x = \mu_x) = 0$
۴. $p(x = \mu_x) = 1$

سوالات تشریحی

۱.۴۰ نمره

- ۱- بر اساس داده های زیر آزمون $\begin{cases} H_0: \rho = 0/6 \\ H_1: \rho \neq 0/6 \end{cases}$ را در سطح $\alpha = 0/1$ انجام دهید $z_{0/1} = -1/28$
 $z_{0/0} = 1/64$

5	26	17	17	12	30	40	20	15	10
15	4	10	14	12	4	5	8	11	13

۱.۴۰ نمره

- ۲- بر اساس اطلاعات زیر فاصله اطمینان نود درصد برای پارامتر b محاسبه نمایید $t_{0/95}(3) = 2/353$
 $t_{0/05}(2) = 1/74$

$$\begin{aligned} \bar{x} &= 73 & \overline{xy} &= 375/45 \\ \bar{y} &= 5/39 & s_x^2 &= 346 \\ \overline{x^2} &= 5675 & s_{xy} &= -18/02 \\ \overline{y^2} &= 30/499 & s_y^2 &= 1/447 \end{aligned}$$

۱.۴۰ نمره

- ۳- نشان دهید ماتریس زیر همیشه مثبت است.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۱.۴۰ نمره

- ۴- با فرض اینکه $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \approx N\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$ با قرار دادن $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ چگالی BY را بیابید.

۱.۴۰ نمره

- ۵- در مدل خطی $y = a_1x_1 + a_2x_2 + E$ با اطلاعات زیر برآورد \hat{a}_1 و \hat{a}_2 را با روش LSS بیابید.

x_{i1}	1	2	3	4
x_{i2}	3/01	5/98	8/99	12/02
y_i	5	8	9	11

نمبر رد
سوال

ياشيخ صحيح

1 الف

2 ب

3 الف

4 ب

5 الف

6 ج

7 ب

8 الف

9 ب

10 ج

11 ب

12 ج

13 الف

14 ج

15 الف

16 ج

17 ج

18 د

19 ج

20 الف

21 ج

22 ج

23 ب

24 ج

25 د

۱- اگر $\text{cov}(x, y) = -2$ باشد آنگاه $\text{cov}(x + 2, y - 4)$ برابر است با؟

۱. ۲ ۲. -۲ ۳. ۱۶ ۴. -۱۶

۲- قرار دهید $z = \frac{\bar{x} - \mu_x}{\sigma_x} - \frac{\bar{y} - \mu_y}{\sigma_y}$ آنگاه $V(z)$ برابر است با:

۱. ۰ ۲. $(1 - \rho)$ ۳. ρ ۴. $2(1 - \rho)$

۳- اگر $y = 2x + 3$ آنگاه $\text{cov}(x, y)$ برابر است با:

۱. ۲ ۲. $2\sigma_x^2$ ۳. σ_x^2 ۴. $\frac{\sigma_x^2}{2}$

۴- تابع $E_x(|x - a|^2)$ به ازاء چه مقدار a مینیمم میگردد:

۱. ۰ ۲. σ ۳. μ ۴. \bar{x}

۵- با توجه به اطلاعات زیر بهترین تابع پیش بینی خطی به ازاء $x = 3$ برابر است با:

$$\mu_y = 2$$

$$\mu_x = 1$$

$$\sigma_x^2 = 1$$

$$\sigma_y^2 = 4$$

$$\rho = \frac{1}{2}$$

۱. $x - 1$ ۲. $x + 3$ ۳. $x - 3$ ۴. $x + 1$

۶- در یک مدل رگرسیونی خطی $E(V(Y|X))$ برابر است با:

۱. $\sigma_x^2(1 - \rho)$ ۲. $\sigma_y^2(1 - \rho)$ ۳. $\sigma_y^2(1 - \rho^2)$ ۴. $\sigma_x^2(1 - \rho^2)$

۷- با توجه به اطلاعات زیر برآورد شیب رگرسیونی $\hat{\beta}$ برابر است با؟

$$\bar{x} = \bar{y} = 10$$

$$\sigma_x^2 = 9$$

$$\sigma_y^2 = 4$$

$$\rho = -3$$

۴. $-\frac{9}{2}$

۳. ۱

۲. $\frac{9}{2}$

۱. -۱

۸- در مدل رگرسیونی واریانس شیب خط برابر است با؟

۴. $\frac{-2}{s_x^2}$

۳. $\frac{\sigma^2}{s_x^2}$

۲. $\frac{\sigma^2}{n}$

۱. $\frac{\sigma^2}{ns_x^2}$

۹- در یک مدل رگرسیونی با اطلاعات زیر مقدار SSE برابر است با؟

$$n = 5$$

$$\hat{b} = \frac{1}{2}$$

$$s_x^2 = 8$$

$$s_y^2 = 10$$

۴. ۳۰

۳. ۱۵

۲. ۶۰

۱. ۷۰

۱۰- ضریب تعیین برابر است با؟

۴. $1 - \frac{sse}{ssr}$

۳. $\frac{ssr}{sst}$

۲. $\frac{sse}{sst}$

۱. $\frac{sse}{ssr}$

۱۱- زاویه بین دو $(-4' 3' -2' 1')$ و $(1' 2' 3' 4')$ بردار برابر است با:

۴. $\frac{\pi}{6}$

۳. $\frac{\pi}{2}$

۲. $\frac{\pi}{4}$

۱. ۰

۱۲- اگر p ماتریس قائم باشد آنگاه کدام صحیح است؟

۴. p^{-1} مثبت معین

۳. $p^{-1} = p'$

۲. $p^{-1} = I$

۱. p^{-1} قائم

۱۳- جذر ماتریس را بدست آورید؟ $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

۱. $\begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} & \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{2} & \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$ ۲. $\begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{3}}{2} & \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{2} & \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$ ۳. $\begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} & \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} & \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$ ۴. $\begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{3}}{2} & \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} & \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

۱۴- فرض نمایید $y = (y_1, y_2, y_3)$ با $\mu = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ و $\Sigma = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ فرض نمایید، $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ در این صورت میانگین $AY + B$ برابر است با:

۱. $\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$ ۲. $\begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$ ۳. $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ ۴. $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$

۱۵- اگر Y یک بردار نرمال با ماتریس کوواریانس $\Sigma = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 36 \end{bmatrix}$ باشد آنگاه $|\Sigma|$ برابر است با؟

۱. ۱۰۸ ۲. ۲۴ ۳. ۹۲ ۴. ۱۴۴

۱۶- مؤلفه های یک بردار از توزیع نرمال مستقل و هم توزیع اند اگر و تنها اگر:

۱. Σ مثبت معین باشد ۲. $\Sigma = I$ ۳. $\Sigma = \sigma^2 I$ ۴. $\Sigma = \frac{1}{\sigma^2} I$

۱۷- در مدل CN، $\hat{\sigma}$ برابر است با:

۱. $\frac{sse}{n-k}$ ۲. $\frac{sse}{n-k+h}$ ۳. $\frac{sst}{n-k}$ ۴. $\frac{sst}{n-k+h}$

۱۸- در یک مدل خطی \hat{a} برابر است با:

۱. $(XX)^{-1}x$ ۲. $(XX)^{-1}x'y$ ۳. $(X'X)^{-1}y$ ۴. $(X'y)^{-1}x'x$

۱۹- فرض نمایید $\text{cov}(x, y) = 16$ و $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = 8$ در این صورت $\rho(3x + 2'y)$ برابر است با:

۱. ۲ ۲. -۲ ۳. $\frac{1}{2}$ ۴. $-\frac{1}{2}$

-۲۰

برای یک نمونه ۱۰۳ تایی در توزیع نرمال توام $r = ۰/۵$ محاسبه گردیده است. مقدار آماره آزمون $\begin{cases} H_0: \rho = ۰ \\ H_1: \rho \neq ۰ \end{cases}$ برابر است

با:

۵/۸۴ .۴

-۱/۶۴ .۳

۰/۶۹ .۲

۰/۵۵ .۱

سوالات تشریحی

نمره ۱/۴۰

۱- $f(x, y) = \begin{cases} x+y & ۰ < x < ۱ \\ & ۰ < y < ۱ \end{cases}$ اگر $\text{COV}(x, y)$ برابر است با:

نمره ۱/۴۰

۲- با توجه به اطلاعات زیر یک بازه اطمینان ۹۵٪ برای شیب خط رگرسیونی محاسبه نمایید.
 $t_{۰.۰۵} = ۲/۵۴$
 $t_{۰.۰۵}(۳) = ۲/۳۵$

$$\hat{\sigma} = ۱۰$$

$$s_{xy} = ۱۲۰۰$$

$$s_x^2 = ۱۶۰۰$$

$$s_y^2 = ۴۰۰$$

$$n = ۱۰$$

نمره ۱/۴۰

۳- نشان دهید ماتریس زیر یک ماتریس همیشه مثبت است.

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ -۱ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

نمره ۱/۴۰

۴- فرض نمایید، $y = (y_1, y_2, y_3) \sim N \left(\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ -۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \right)$ قرار دهید $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ چگالی BY را بدست آورید.

نمره ۱/۴۰

۵- اگر $X \hat{X} = \begin{bmatrix} ۱۵ & ۹ & ۹ \\ ۹ & ۱۵ & ۹ \\ ۹ & ۹ & ۹ \end{bmatrix}$ و $X \hat{Y} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ ۲ \end{bmatrix}$ باشد مقدار \hat{a} برابر است با:

نمبر سوال	پاسخ صحیح
1	ب
2	د
3	ب
4	ج
5	د
6	ج
7	الف
8	الف
9	د
10	ج
11	ج
12	ج
13	ج
14	د
15	الف
16	ج
17	الف
18	ب
19	الف
20	د

۱- در چه حالتی امید ریاضی $a_1x_1 + \dots + a_1x_1$ برابر صفر است؟

۱. $\sum x_i = 0$ ۲. $\sum a_i = 0$ و $\sum x_i = \mu$

۳. $E(x_i) = 0$ یا $\sum a_i = 0$ ۴. $E(x) = 0$ و $\sum a_i = 0$

۲- کدام گزینه صحیح است

۱. $\text{cov}(x, c) = 1$ ، c مقدار ثابت

۲. کوواریانس به مبدأ اندازه گیری بستگی دارد.

۳. کوواریانس به واحد اندازه گیری بستگی دارد.

۴. هیچکدام

۳- اگر $X \approx N(1,1)$ و همچنین $y = |x|$ باشد در این صورت $p(x, y)$ چقدر است؟

۱. ± 1 ۲. 0 ۳. $\frac{1}{2}$ ۴. 1

۴- در صورتی که و $p(x, y) = 0$ باشد میتوان نتیجه گرفت x و y مستقل اند.

۱. همه حالت ۲. x و y نرمال باشند.

۳. (x, y) توزیع نرمال توام باشند. ۴. x نرمال و y دو جمله ای باشد.

۵- اگر $W = \frac{1}{2} \ln \frac{1+R}{1-R}$ باشد $\text{var}(w)$ چقدر است؟

۱. $\tanh^{-1} p$ ۲. $\frac{1}{n-3}$ ۳. $\frac{1}{2} \ln \frac{1+p}{1-p}$ ۴. صفر

۶- آماره ی $T = \frac{R\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-R^2}}$ دارای چه توزیعی است؟

۱. نرمال ۲. t با یک درجه آزادی

۳. t با $n-1$ درجه با آزادی ۴. t با $n-2$ درجه با آزادی

۷- آماره ی $\sqrt{n}(R_n - p)$ برای توزیع نرمال توام و نمونه ی بزرگ دارای چه توزیعی است؟

۱. $N\left(1, (1-P^2)^2\right)$ ۲. $N(1, 1-P^2)$ ۳. $N(0, 1-P^2)$ ۴. $N\left(0, (1-P^2)^2\right)$

۸- مقدار $E(|x - a|)$ به ازای چه مقدار a مقدار مینیمم دارد؟

۱. میانگین ۲. کوچکترین مقدار x ۳. میانه ۴. واریانس

۹- مقدار $\text{cov}(x, E(y|x))$ برابر است با؟

۱. $E(x, y)$ ۲. $\text{Cov}(y, x)$ ۳. $E(y \text{ cov}(x))$ ۴. $E(x \text{ cov}(y))$

۱۰- اگر $y = a + bx$ باشد $E(\text{var}(y|x))$ چقدر است؟

۱. $\delta_x^2(p^2 - 1)$ ۲. $\delta_y^2(1 - p^2)$ ۳. $\delta_x^2(1 - p^2)$ ۴. $p^2 \delta_x \delta_y$

۱۱- در مدل خطی ساده برآورد نا اریب δ^2 چقدر است؟

۱. $\frac{n}{n-1}(s_x^2 - \hat{b}^2 s_y^2)$ ۲. $\frac{n}{n-1}(s_y^2 - \hat{b}^2 s_x^2)$ ۳. $\frac{n}{n-2}(s_x^2 - \hat{b}^2 s_y^2)$ ۴. $\frac{n}{n-2}(s_y^2 - \hat{b}^2 s_x^2)$

۱۲- آماره $\frac{\sum_{i=1}^n E_i^2}{\delta^2}$ دارای چه توزیعی است؟ (E_i میزان خطای باشند)

۱. نرمال ۲. کای-دو با n درجه آزادی
۳. t با $n-2$ درجه آزادی ۴. کای-دو با $n-2$ درجه آزادی

۱۳- کدامیک از عبارات های زیر ضریب تعیین است؟

۱. $\frac{SSE}{SSR}$ ۲. $\frac{SSR}{SST}$ ۳. $\frac{SSR}{SSE}$ ۴. $\frac{SSE}{SST}$

۱۴- در مدل خطی ساده مقدار $\text{Cov}(\hat{a}, \hat{b})$ چقدر است؟

۱. صفر ۲. $-\frac{\bar{x} \delta^2}{n s_x^2}$ ۳. $-\frac{\bar{x} s_x^2}{n}$ ۴. $-\frac{\bar{x} s_x^2}{n \delta^2}$

۱۵- در مدل $y_i = a + E_i$ بهترین برآورد نا اریب با کمترین واریانس برای a چقدر است؟

۱. \bar{y} ۲. $2\bar{y}$ ۳. $E\bar{y}$ ۴. $2E\bar{y}$

۱۶- در مدل خطی ساده $E\left(\frac{1}{SSE}\right)$ چقدر است؟

۱. $\frac{1}{\delta^2(n-4)}$ ۲. $\frac{1}{\delta^2(n-3)}$ ۳. $\frac{\delta^2}{n-4}$ ۴. $\frac{\delta^2}{n-3}$

۱۷- اگر P ماتریس قائم باشد $\det P$ چقدر خواهد بود؟

۱. ۱ ۲. -1 ۳. ± 1 ۴. صفر

۱۸- ماتریس تصویر دارای چه ویژگی های عمده ای است؟

۱. خود توانی و متقارن ۲. متقارن و معین مثبت
۳. منقارن و وارون پذیر ۴. وارون پذیر و ضرب پذیر

۱۹- مقدار (کوواریانس Ay) $\sum AY$ چقدر است؟

۱. $A \sum y$ ۲. $A \sum_y A'$ ۳. $A^2 \sum y$ ۴. $y \sum A$

۲۰- اگر $Z \approx N(0,1)$ باشد در این صورت توزیع $Y = AZ + B$ چقدر است؟

۱. $N(AA, BB')$ ۲. $N(A, B)$ ۳. $N(A, BB')$ ۴. $N(B, AA')$

سوالات تشریحی

۱- X و Y دارای توزیع نرمال توأم می باشند. در یک نمونه ۱۰۰ تایی $r = 0/1$ است. نا وابسته بودن دو متغیر را با میزان $\alpha = 0/05$ بررسی نمایید.

$$\left(\begin{array}{l} H_0: \rho = 0 \\ H_1: \rho \neq 0 \end{array} \right)$$

$$t_{0/05}(8) = 3/25 \quad t_{0/05}(10) = 2/25$$

$$t_{0/025}(8) = 2/306 \quad t_{0/025}(10) = 2/98$$

۲- اگر مدل رگرسیون $E(y|x) = \alpha \beta^x e$ را داشته باشیم α و β را برآورد نمایید. (خطاست)

۳- تصویر بردار $(1, 2, 3, 4)$ روی بردار $(1, 1, 1, 1)$ را بدست آورید.

۴- وارون راست ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ را بدست آورید.

۵- نشان دهید هر پاسخ معادله ماتریس $(y - Xa)'X = 0$ مجموع توان های دوم خطاها را مینیمم میکند؟

۱- اگر تابع مولد گشتاوری به صورت $M_x(t) = \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{3}{4}$ باشد مقدار واریانس X چقدر است؟

۱. $\frac{2}{9}$ ۲. $\frac{1}{2}$ ۳. $\frac{1}{4}$ ۴. $\frac{3}{4}$

۲- اگر $aX + bY + c = 0, ab \neq 0$ باشد $\rho(x, y)$ چقدر است؟

۱. ± 1 ۲. صفر ۳. $\pm \frac{1}{2}$ ۴. $+1$

۳- در چه حالتی $\rho = 0$ مستقل بودن X, Y را ایجاد می کند؟

۱. در هر حالت ۲. ناهمبسته بودن
۳. مستقل بودن X, Y ۴. X, Y نرمال توأم باشند

۴- اگر (u_1, u_2) دارای توزیع نرمال استاندارد با ضریب همبستگی ρ باشند در اینصورت $\rho(u_1^2, u_2^2)$ چقدر است؟

۱. ± 1 ۲. ρ ۳. ρ^2 ۴. صفر

۵- آماره $\frac{R\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-R^2}}$ دارای چه توزیعی است؟

۱. تی با $n-2$ درجه آزادی ۲. کای-دو با $n-1$ درجه آزادی
۳. نرمال استاندارد ۴. کای-دو با $n-2$ درجه آزادی

۶- حاصل عبارت $\text{cov}(E(x|y), y)$ چقدر است؟

۱. $\text{Cov}(x, y)$ ۲. ± 1 ۳. $E(xy)$ ۴. $E(X|Y)$

۷- تابع $E(|y - d(x)|^2 | X = x)$ چه زمانی مینیمم می شود؟

۱. $d(x) = E(X)$ ۲. $d(x) = \text{mediom} X$
۳. $d(x) = \bar{X}$ ۴. $d(x) = E(y | X = x)$

۸- اگر $E_i, i \neq j$ خطای تصادفی باشد مقدار $\text{Cov}(E_i, E_j)$ چقدر است؟

۱. صفر ۲. یک ۳. ± 1 ۴. ۱

۹- برآورد نااریب برای δ^2 در مدل خطی ساده چقدر است؟

۱. $(S_y^2 - \hat{b}^2 S_x^2)$ ۲. $\frac{1}{n-1}(S_y^2 - \hat{b}^2 S_x^2)$

۳. $\frac{n}{n-1}(S_y^2 - \hat{b}^2 S_x^2)$ ۴. $\frac{n}{n-2}(S_y^2 - \hat{b}^2 S_x^2)$

۱۰- در مدل خطی ساده کدامیک از دو متغیر زیر مستقل نیستند؟

۱. \hat{a}, \hat{b} ۲. \hat{b}, \hat{c} ۳. δ^2 و \hat{c} ۴. δ^2 و \hat{b}

۱۱- در مدل خطی ساده، $\frac{SSE}{\delta^2}$ دارای چه توزیعی است؟

۱. تی با $n-1$ درجه آزادی ۲. تی با $n-2$ درجه آزادی
۳. کای-دو با $n-2$ درجه آزادی ۴. کای-دو با $n-1$ درجه آزادی

۱۲- آماره $\frac{\sqrt{n}(\hat{c} - c)}{\hat{\delta}}$ دارای چه توزیعی است؟

۱. کای-دو با $n-2$ درجه آزادی ۲. تی با $n-2$ درجه آزادی
۳. تی با $n-1$ درجه آزادی ۴. کای-دو با $n-1$ درجه آزادی

۱۳- ضریب تعیین (r^2) در چه بازه ای قرار می گیرد؟

۱. -1 تا $+1$ ۲. 0 تا 1 ۳. 0 تا -1 ۴. 0 تا $+2$

۱۴- ضریب همبستگی بین y_i, \hat{y}_i برابر چه مقداری است؟

۱. $\sqrt{\frac{SSE}{SST}}$ ۲. $\sqrt{\frac{SSR}{SST}}$ ۳. $\sqrt{\frac{SSE}{SSR}}$ ۴. $\sqrt{\frac{SST}{SSR}}$

۱۵- کدامیک از ویژگی های زیر جز ویژگی های ماتریس قائم نیست؟

۱. $p^{-1} = p'$ ۲. $pp' = I$ ۳. $\det p = \pm 1$ ۴. $\det p = 0$

۱۶- در مدل خطی چند متغیره مقدار a به روش کمترین توان دوم چقدر است؟

۱. $\hat{a} = (X'X)^{-1}XY$ ۲. $\hat{a} = (X'X)^{-1}X'Y$ ۳. $\hat{a} = (X'X)XY$ ۴. $\hat{a} = (X'X)X'Y^{-1}$

۱۷- مقدار برآورد $\hat{\sigma}^2$ در مدل خطی چند متغیری چقدر است؟

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\|y - X\hat{a}\|^2}{n-k} \quad .1 \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{\|y - X\hat{a}\|}{n-k} \quad .2 \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{\|y - X\hat{a}\|^2}{n-2} \quad .3 \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{\|y - X\hat{b}\|^2}{n-k} \quad .4$$

۱۸- اگر مدل $Y = Xa + E$ را داشته باشیم و W یک ماتریس ثابت و همیشه مثبت باشد در چه صورت E_i همبسته هستند؟

۱. در همه صورت همبسته اند.

۲. اگر W غیر قطری باشد.

۳. اگر W قطری باشد.

۴. اگر W وارون پذیر باشد.

۱۹- اگر x_1, x_2, \dots, x_n مستقل باشد و داشته باشیم و $x_i \approx N(\mu_i, 1), i = 1, 2, \dots, n$ و بردار نرمال $X = [x_1, \dots, x_n]$ در چه زمانی $X^T M_1 X, X^T M_2 X$ مستقل اند؟

۱. $M_1 M_2 = -1$

۲. $M_1 M_2 = 1$

۳. $M_1 M_2 = 0$

۴. $M_1 M_2 = 2$

۲۰- امید ریاضی و واریانس خطای تصادفی E به ترتیب چقدر است؟

۱. صفر و σ^2

۲. یک و σ^2

۳. یک و صفر

۴. صفر و یک

سوالات تشریحی

۱- برای یک نمونه ۱۰۳ تایی ضریب همبستگی نمونه ای ۰/۵ بدست آمده است. آزمون زیر رادر سطح ۹۵ درصد انجام دهید.

$$\begin{cases} H_0 : \rho = 0.6 \\ H_1 : \rho \neq 0.6 \end{cases}$$

۲- برای چگالی توام گسسته زیر تابع رگرسیون y روی X را پیدا کنید.

$$f(x, y) = \frac{2}{n(n+1)} \quad x = 1, 2, \dots, n \quad y = 1, 2, \dots, x$$

۳- در مدل $Y | x = ab^x$ مقادیر a, b را محاسبه کنید.

۴- متغیرهای تصادفی Y_1, Y_2, Y_3 دارای میانگین مشترک ۲ و واریانس مشترک ۱ می باشد و داریم $\delta_{12} = -1, \delta_{13} = 1, \delta_{23} = 0$ فرض کنید.

$$\begin{cases} U_1 = 2Y_1 + Y_2 + Y_3 + 1 \\ U_2 = Y_1 - Y_2 - Y_3 + 2 \end{cases}$$

ماتریس کوواریانس بردار تصادفی $U = [U_1, U_2]'$ را بدست آورید.

۵- ثابت کنید :

الف- در یک مدل رگرسیونی ساده \hat{a} ، \hat{b} نا اریب هستند؟

ب- واریانس \hat{b} را بدست آورید؟

شماره سوال	پاسخ صحیح
۱	د
۲	الف
۳	د
۴	ج
۵	الف
۶	الف
۷	د
۸	الف
۹	د
۱۰	الف
۱۱	ج
۱۲	ب
۱۳	ب
۱۴	ب
۱۵	د
۱۶	ب
۱۷	الف
۱۸	ب
۱۹	ج
۲۰	الف