

عنوان درس: فرآیندهای احتمالی

استفاده از ماشین حساب ساده، ماشین حساب مهندسی مجاز است

۱- اگر $A_n \uparrow$ آنگاه کدام مورد زیر برابر $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$ است؟

۱. $P(\bigcup_i A_i)$ ۲. $P(\bigcap_i A_i)$ ۳. $P(\bigcup_i A_i')$ ۴. موارد اول و سوم

۲- کدامیک از توزیع های زیر دارای خاصیت بیحافظگی است؟

۱. نرمال ۲. نمایی ۳. پواسون ۴. دوجمله ای

۳- اگر X دارای توزیع یکنواخت در بازه $(0, 1)$ و $Y|X=x$ دارای توزیع یکنواخت بر بازه $(0, x)$ باشند. آنگاه امید ریاضی X چیست؟

۱. 0/75 ۲. 0/5 ۳. 0/95 ۴. صفر

۴- اگر X و Y باشند، آنگاه تابع مولد احتمال $X+Y$ برابر است.

۱. وابسته - حاصل ضرب دو تابع مولد X و Y ۲. مستقل - حاصل ضرب دو تابع مولد X و Y
۳. وابسته - حاصل جمع دو تابع مولد X و Y ۴. مستقل - حاصل جمع دو تابع مولد X و Y

۵- کدام مورد زیر از ویژگیهای فرآیند پواسن است؟

۱. مانای وسیع ۲. مانای اکید ۳. نمونه های مستقل ۴. هر سه مورد

۶- اگر $\{N(t), t \geq 0\}$ یک فرآیند پواسن با پارامتر ۵ باشد. مقدار ضریب همبستگی $N(9)$ و $N(100)$ چقدر است؟

۱. 0/09 ۲. 0/3 ۳. 0/55 ۴. 0/4

۷- اگر $\{N(t), t \geq 0\}$ یک فرآیند پواسن با پارامتر ۵ باشد. مقدار $\text{Cov}(N(4), N(25))$ چیست؟

۱. 29 ۲. 100 ۳. 20 ۴. -29

۸- اگر $\{X_t, t \geq 0\}$ یک فرآیند حرکت براونی باشد. امید ریاضی آن چند است؟

۱. صفر ۲. 0/5 ۳. 2 ۴. 2/5

۹- کدام مورد زیر بیانگر ویژگی بیحافظگی برای متغیرهای تصادفی است؟

۱. $P(X > t+s | X < t) = P(X < 2s)$

۲. $P(X > t+s | X < t) = P(X > s)$

۳. $P(X > t+s | X > t) = P(X > s)$

۴. $P(X > t+s) = t+s$

۱۰- اگر $\{X_n, n \geq 0\}$ یک زنجیر ارنفست ساده با 5 مهره باشد. مقدار P_{44}^2 چیست؟

۱. $0/36$

۲. $0/25$

۳. $0/75$

۴. 1

۱۱- اگر $\{X_n, n \geq 0\}$ یک زنجیر ارنفست ساده با ۶ مهره و X_1 دارای توزیع یکنواخت روی فضای حالت آن باشد.

$P(X_1 = 2)$ چیست؟

۱. $0/25$

۲. $\frac{4}{21}$

۳. $0/85$

۴. $\frac{5}{37}$

۱۲- اگر $\{X_n, n \geq 0\}$ یک زنجیر قدم زدن تصادفی با $p = q = r$ باشد. $P(X_7 = 2)$ چیست؟

۱. صفر

۲. $\frac{5}{9}$

۳. $\frac{2}{9}$

۴. $\frac{1}{9}$

۱۳- اگر $\{X_n, n \geq 0\}$ یک زنجیر قدم زدن تصادفی ساده با $p = \frac{1}{4}$ باشد. $P_{..}^{(4)}$ چیست؟

۱. $\frac{35}{97}$

۲. $\frac{57}{128}$

۳. $\frac{27}{128}$

۴. $0/75$

۱۴- اگر y حالتی بازگشتی باشد. $E_x(N(y))$ چیست؟

۱. 1

۲. ∞

۳. $0/5$

۴. $0/25$

۱۵- اگر $\{X_n, n \geq 0\}$ یک زنجیر قدم زدن تصادفی ساده باشد. تحت کدام مقدار p تمام حالت‌های آن بازگشتی هستند؟

۱. $0/25$

۲. $0/5$

۳. $0/75$

۴. $\frac{1}{8}$

۱۶- در زنجیر قدم زدن تصادفی که از صفر شروع می شود، اگر احتمال رفتن به چپ q و احتمال در جازدن r و احتمال رفتن به راست p باشد، احتمال اینکه متحرک بعد از دو واحد زمانی در نقطه 2- قرار گیرد کدام است؟

۱. $2qr$ ۲. p^2 ۳. q^2 ۴. $2qr$

۱۷- در زنجیر ارنفست ساده با پنج مهره با فرض اینکه X_0 دارای توزیع یکنواخت گسسته بر $\{0,1,2,3,4,5\}$ باشد، برای توزیع X_1 مطلوب است $P(X_1=0)$ ؟

۱. $\frac{1}{30}$ ۲. $\frac{5}{30}$ ۳. $\frac{3}{30}$ ۴. $\frac{7}{30}$

۱۸- اگر π توزیع مانا و Y حالتی گذرا باشد. آنگاه $\pi(y)$ چند است؟

۱. صفر ۲. $0/5$ ۳. $0/25$ ۴. $0/75$

۱۹- توزیع مانای زنجیر تحویلناپذیر و گذرا چه نام دارد؟

۱. هندسی ۲. پواسن ۳. دوجمله ای ۴. وجود ندارد

۲۰- توزیع مانای زنجیر ارنفست تعدیل یافته چه نام دارد؟

۱. هندسی ۲. دوجمله ای ۳. پواسن ۴. وجود ندارد

۲۱- در زنجیر زاد و مرگی فرض کنید $q_x = 1 - p = q$ ، $p_x = p > 0$. تحت کدام شرط زیر زنجیر بازگشتی است؟

۱. $p > q$ ۲. $p < q$ ۳. $p = q$ ۴. موارد ۱ و ۳

۲۲- گزینه نا صحیح کدام است؟

۱. $E(X | Y) = E(E(Y | X))$ ۲. $E(X) = E(E(X | Y))$

۳. $E(XY) = E(X).E(X | Y)$ ۴. گزینه های اول و سوم

۲۳- کدام زنجیر زیر نادره ای است؟

۱. ارنفست ساده ۲. قدم زدن تصادفی ساده

۳. ارنفست تعدیل یافته ۴. هر سه مورد

۲۴- حالت X را گوییم هرگاه داشته باشیم

۱. گذرا - $f_{xx} < 1$

۲. بازگشتی - $f_{xx} < 1$

۳. جاذب - $f_{xx} = 1$

۴. گذرا - $f_{xx} = 1$

۲۵- برای توزیع هندسی به صورت $P(X = k) = pq^{k-1}$ $k = 1, 2, 3, \dots$ تابع مولد احتمال کدام است؟

۱. $\frac{pS}{1-pS}$

۲. $\frac{pS}{1-qS}$

۳. $\frac{qS}{1-qS}$

۴. $\frac{qS}{1-pS}$

سوالات تشریحی

۱- اگر A و B دو متغیر تصادفی ناهمبسته و $\sigma_A^2 = \sigma_B^2 = \sigma^2$ ، $E(A) = E(B) = 0$ و ω نقطه دلخواهی در بازه $(0, \pi)$ باشند. نشان فرآیند $\{x_t, t \geq 0\}$ مانای وسیع هست. که در آن $x_t = A \cos \omega t + B \sin \omega t$ می باشد.

۲- قضیه چپمن کلموگروف را ثابت کنید. به عبارت دیگر اگر m و n دو عدد طبیعی باشند آنگاه به ازای هر x و y از حالت ها داریم:

$$P_{xy}^{(m+n)} = \sum_{z \in L} P_{xz}^{(m)} P_{zy}^{(n)}$$

۳- فرض کنید زنجیر مارکوفی دارای فضای حالت $\{0, 1, 2\}$ و ماتریس احتمال انتقال به صورت زیر باشد. با فرض $A = \{1, 2\}$ و $x_0 = 0$ توزیع T_A را بیابید.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

را در نظر بگیرید. دسته های هم ارزی را مشخص

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

زنجیر مارکف با ماتریس احتمال انتقال

کرده و تعیین کنید کدام ها گذرا، بازگشتی و جاذب هستند

۵- اگر به طور متوسط در هر سه دقیقه دو اتومبیل به یک کارواش وارد شوند. احتمال آن را که در 10 دقیقه 20 اتومبیل وارد شوند

چقدر است؟ همچنین متوسط تعداد اتومبیل های وارد شده به این کارواش در زمانی به طول 15 دقیقه چقدر است

شماره سوال	پاسخ صحیح
1	الف
2	ب
3	د
4	ب
5	ج
6	ب
7	ب
8	الف
9	ج
10	الف
11	ب
12	د
13	ج
14	ب
15	ب
16	ج
17	الف
18	الف
19	د
20	ب
21	ب
22	د
23	ج
24	الف
25	ب

۱- در فرایند پواسون با پارامتر λ تابع میانگین کدام است؟

۱. λ ۲. λt ۳. صفر ۴. $\sqrt{\lambda t}$

۲- فرض کنید $\{N(t): t \geq 0\}$ فرایند پواسونی با پارامتر λ باشد، برای فرآیند $X(t) = N(t+1) - N(t)$ تابع $Cov(X(t), X(s))$ کدام است؟

۱. $\lambda(s+1-t)$ ۲. $\lambda(t+1-s)$ ۳. $\lambda(t-1-s)$ ۴. $\lambda(1-s-t)$

۳- اگر A و B دو متغیر تصادفی ناهمبسته با میانگین ص $X_t = A \cos \omega t + B \sin \omega t$ باشد، کدام مورد در باره فرآیند $\{X_t, t \geq 0\}$ صحیح است؟

۱. مانای وسیع واکید است.
۲. نه مانای وسیع و نه مانای اکید است.
۳. مانای وسیع است اما مانای اکید نیست.
۴. مانای اکید است اما مانای وسیع نیست.

۴- اگر $A_n \uparrow$ آنگاه خواهیم داشت:

۱. $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 0$ ۲. $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = \infty$
۳. $P\left(\bigcup_n A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$ ۴. $P\left(\bigcap_n A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$

۵- در فرآیند پواسون ضریب همبستگی N_s, N_t به شرط $t = s + u$ و $u > 0$ برابر است با:

۱. $\sqrt{\frac{t}{t+u}}$ ۲. $\sqrt{\frac{s}{s+u}}$ ۳. $\sqrt{\frac{s}{t+u}}$ ۴. $\sqrt{\frac{t}{s+u}}$

۶- فرض X, Y دارای توزیع یکنواخت بر مجموعه $\{(x, y) | 0 \leq x < y < 1\}$ باشد به طوری که داریم:

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 & 0 \leq x < y \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

توزیع حاشیه X برای مقادیر $0 < x < 1$ کدام است؟

۱. $2(1-x)$

۲. $2(x-1)$

۳. $0.5(1-x)$

۴. $0.5(x-1)$

۷- فرض کنید تابع احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر تعریف شود. مطلوب است $F_X(2.5)$

x	0	1	3
$f_X(x)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$?

۱. 0.98

۲. 0.83

۳. 0.54

۴. 0.32

۸-

زنجیر مارکوف $\{X_n : n \geq 0\}$ با فضای حالت $L = \{0, 1, 2\}$ و ماتریس احتمالات انتقال را در نظر بگیرید اگر

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

توزیع آغازین برای حالت‌های صفر، یک و ۲ به ترتیب $0/2$ و $0/4$ و $0/4$ باشد. مقدار $P_{11}^{(2)}$ چقدر است؟

۱. 0/25

۲. 0/50

۳. 0/75

۴. 1

۹-

زنجیر مارکوف $\{X_n : n \geq 0\}$ با فضای حالت $L = \{0, 1, 2\}$ و ماتریس احتمالات انتقال را در نظر بگیرید اگر

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

توزیع آغازین برای حالت‌های صفر، یک و ۲ به ترتیب $0/2$ و $0/4$ و $0/4$ باشد. مقدار $P(X_0 = 1 | X_1 = 1)$ چقدر است؟

۱. 0/25

۲. 0/5

۳. 0/25

۴. 1

۱۰- اگر فضای حالت زنجیری فقط یک دسته هم ارزی داشته باشد. یعنی هر دو حالت دلخواه در دسترس یکدیگر باشند، آن زنجیر را چه می نامند.

۱. جاذب ۲. گذرا ۳. بازگشتی ۴. تحویل ناپذیر

۱۱- تابع مولد احتمال توزیع هندسی که به صورت زیر تعریف شده کدام است:

$$P(X = k) = pq^{k-1}, k = 1, 2, \dots$$

۱. $\frac{s}{1-ps}$ ۲. $\frac{qs}{1-ps}$ ۳. $\frac{ps}{1-ps}$ ۴. $\frac{1-ps}{ps}$

۱۲- فرض کنید زنجیر مارکوفی دارای فضای حالت $L = \{0, 1, 2\}$ و ماتریس احتمال انتقال زیر باشد. اگر داشته باشیم

$A = \{1, 2\}, X_0 = 0$ مطلوب است احتمال زمان اصابت $P(T_A = 1)$ ؟

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{bmatrix}$$

۱. 0.75 ۲. 0.5 ۳. 0.34 ۴. 0.76

۱۳- در زنجیر قدم زدن تصادفی که از صفر شروع می شود، اگر احتمال رفتن به چپ q و احتمال در جا زدن r و احتمال رفتن به راست p باشد، احتمال اینکه متحرک بعد از دو واحد زمانی در نقطه 2- قرار گیرد کدام است؟

۱. $2pq$ ۲. q^2 ۳. p^2 ۴. pr

۱۴- وضعیت را هنگامی گوییم که داشته باشیم

۱. بازگشتی - $f_{xx} < 1$ ۲. بازگشتی - $f_{xx} > 1$

۳. گذرا - $f_{xx} = 1$ ۴. گذرا - $f_{xx} < 1$

۱۵- در زنجیر ارنفست ساده با پنج مهره با فرض اینکه X_0 دارای توزیع یکنواخت گسسته بر $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ باشد، برای

توزیع X_1 مطلوب است $P(X_1 = 1)$ ؟

۱. 0.23 ۲. 0.033 ۳. 0.65 ۴. 0.12

۱۶- به ازای کدام مقدار a تابع

به یک تابع احتمال است؟
 $f(X = x) = 0.01[2(10 - x) + a]$, $x = 1, 2, \dots, 10$

۱. 2.5 ۲. 2 ۳. 1 ۴. 0.5

۱۷- فرض کنید ξ تعداد نوزادان هر فرد دارای توزیع هندسی که به صورت زیر تعریف شده کدام است:

$$P(\xi = k) = pq^k, k = 0, 1, 2, \dots$$

اگر بدانیم $p = 0.40$ باشد، احتمال انقراض چقدر است؟

۱. 0.7 ۲. 0.6 ۳. 0.5 ۴. 0.67

۱۸- فرض کنید X, Y دارای توزیع یکنواخت بر مجموعه $\{(x, y) | 0 \leq x < y < 1\}$ باشد به طوری که داریم:

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 & 0 \leq x < y \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

امید ریاضی متغیر تصادفی X برای مقادیر $0 < x < 1$ کدام است؟

۱. $\frac{1}{6}$ ۲. $\frac{1}{3}$ ۳. $\frac{1}{2}$ ۴. $\frac{1}{4}$

۱۹- فرض X, Y دو متغیر تصادفی مستقل باشند اگر تابع مولد احتمال این دو متغیر به ترتیب $\varphi_X(s)$ و $\varphi_Y(s)$ باشند آنگاه داریم:

۱. $\varphi_{X+Y}(s) = \varphi_X(\varphi_Y(s))$ ۲. $\varphi_{X+Y}(s) = \varphi_X(s) \varphi_Y(s)$
۳. $\varphi_{X+Y}(s) = \varphi_Y(\varphi_X(s))$ ۴. $\varphi_{X+Y}(s) = \varphi_X(s) + \varphi_Y(s)$

۲۰- در فرایند شاخه ای در چه وضعیتی انقراض نسل با احتمال کمتر از یک واقع می شود؟

۱. میانگین تعداد نوزدان حداکثر یک باشد ۲. میانگین تعداد نوزدان حداقل یک باشد
۳. میانگین تعداد نوزدان یک باشد ۴. میانگین تعداد نوزدان بیشتر از یک باشد

۲۱- شرط لازم و کافی برای اینکه زنجیر زاد و مرگ باشد آن است که

$$1. \sum_{y=0}^{\infty} \frac{q_1 \dots q_y}{p_1 \dots p_y} = \infty \quad \text{تحویل ناپذیر بازگشتی} \quad 2. \sum_{y=0}^{\infty} \frac{q_1 \dots q_y}{p_1 \dots p_y} = \infty \quad \text{تحویل ناپذیر گذرا}$$

$$3. \sum_{y=0}^{\infty} \frac{q_1 \dots q_y}{p_1 \dots p_y} = \infty \quad \text{تحویل پذیر بازگشتی} \quad 4. \sum_{y=0}^{\infty} \frac{q_1 \dots q_y}{p_1 \dots p_y} = \infty \quad \text{تحویل پذیر گذرا}$$

۲۲- اگر P ماتریس احتمال انتقال یک مرحله ای باشد به ازای هر $n \geq 1$ کدام رابطه درست است؟

$$1. \pi_n = \pi_{n-1} P \quad 2. \pi_n = \pi_0 P^n \quad 3. \pi_n = \pi_n P^{n-1} \quad 4. \text{گزینه های اول و دوم}$$

۲۳- منظور از توزیع مانا در زنجیر مارکف با ماتریس احتمالهای تغییر وضعیت P توزیعی است که در برابری زیر صدق کند.

$$1. \pi = (1 - \pi)P \quad 2. \pi = (\pi)(1 - P) \quad 3. \pi = (\pi)(q) \quad 4. \pi = \pi P$$

۲۴- اگر زنجیر $\{X_n : n \geq 0\}$ باشد، آنگاه توزیع موجود

$$1. \text{تحویل ناپذیر و بازگشتی - مانا - است} \quad 2. \text{تحویل ناپذیر و گذرا - مانا - است} \\ 3. \text{تحویل ناپذیر و بازگشتی - نامانا - است} \quad 4. \text{تحویل ناپذیر و گذرا - مانا - نیست}$$

۲۵- شرط لازم برای وجود توزیع مانا کدام است؟

$$1. \text{زنجیر گذرا باشد} \quad 2. \text{زنجیر بازگشتی باشد} \quad 3. \text{زنجیر گذرا نباشد} \quad 4. \text{زنجیر مارکف باشد}$$

سوالات تشریحی

۱- فرایند پواسون را تعریف کرده و تابع همبستگی و ضریب همبستگی را برای آن بدست آورید ۱.۲۰ نمره

۲- فرض کنید زنجیر مارکفی با فضای حالت $L = \{1, 2, 3, 4\}$ دارای ماتریس احتمال انتقال به صورت زیر است. ۱.۲۰ نمره

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

کدامیک از حالات گذرا، بازگشتی و یا جاذب هستند؟ با اثبات توضیح دهید.

۱.۲۰ نمره

۳- در زنجیر ارنفست برای $d = 4, L = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ مهره ماتریس احتمال انتقال یک مرحله ای را بدست آورده و با فرض اینکه X_0 دارای توزیع یکنواخت بر L باشد، توزیع X_1 را بدست آورید.

۱.۲۰ نمره

۴- در مورد مفاهیم زیر به طور خلاصه در یک خط توضیح دهید
فرایند مارکف - دسته هم ارزی - زنجیر تحویل ناپذیر - فرایند شاخه ای - احتمال انقراض -

۱.۲۰ نمره

۵- برابری زیر را اثبات کنید

$$E(X) = E(E(X|Y))$$

شماره سوال	پاسخ صحیح
1	ب
2	الف
3	ج
4	ج
5	ب
6	الف
7	ب
8	الف
9	د
10	د
11	ج
12	ب
13	ب
14	د
15	الف
16	ج
17	د
18	ب
19	ب
20	د
21	الف
22	د
23	د
24	د
25	ج

۱- اگر S یک فضای نمونه و P تابع احتمال تعریف شده روی این فضا باشد، آنگاه برد P کدام است؟

۱. S ۲. $[0,1]$

۳. مجموعه تمام زیر مجموعه های S ۴. تعریف نشده است

۲- اگر $A_n \downarrow$ آنگاه خواهیم داشت:

۱. $P\left(\bigcap_n A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$ ۲. $P\left(\bigcup_n A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$ ۳. $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 0$ ۴. $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = \infty$

۳- در شهری دو کارخانه لامپ سازی وجود دارد که به ترتیب ۶۰ و ۷۰ درصد تولیدات آنها لامپ ۱۰۰ وات است. این کارخانه ها به ترتیب ۴۰ درصد و ۶۰ درصد نیازهای جامعه را تامین می کنند. چند درصد لامپهای موجود در بازار ۱۰۰ وات است؟

۱. 0.13 ۲. 0.42 ۳. 0.66 ۴. 0.81

۴- تابعی از فضای نمونه به مجموعه اعداد حقیقی را چه می نامند

۱. متغیر ۲. مشاهده ۳. داده ۴. متغیر تصادفی

۵- فرض کنید تابع احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر تعریف شود. مطلوب است $F_X(2.5)$

x	0	1	3
$f_X(x)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$?

۱. $\frac{3}{6}$ ۲. $\frac{2}{6}$ ۳. $\frac{5}{6}$ ۴. $\frac{1}{6}$

۶- فرض کنید تابع احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر تعریف شود. مطلوب است واریانس متغیر تصادفی X ؟

x	0	1	3
$f_X(x)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$?

۱. 2 ۲. 1 ۳. 0.5 ۴. 3

فرض کنید X متغیر تصادفی دارای تابع مولد احتمال $\phi(s)$ و $E(X^2) = 15$ و $\phi''(1) = 12$ باشند. در این صورت واریانس X کدام است؟

۸ .۴

۲ .۳

۳ .۲

۶ .۱

۸- تابع مولد احتمال توزیع هندسی به صورت زیر کدام است؟

$$P(X = x) = pq^{k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$\frac{pS}{1-qS} \quad .۴$$

$$\frac{qS}{1-pS} \quad .۳$$

$$\frac{qS}{1-qS} \quad .۲$$

$$\frac{1}{1-qS} \quad .۱$$

۹- به ازای $t \geq 0$ متغیر تصادفی $\omega \in (0, \pi)$ ، $X_t = A \cos \omega t + B \sin \omega t$

را در نظر بگیرید. اگر A و B دو متغیر تصادفی ناهمبسته با امید ریاضی صفر و واریانس ثابت یکسان یک باشند. کدام شرط زیر صادق است؟

۲. این فرایند مانای وسیع است

۱. این فرایند نامانا است

۴. گزینه های دوم و سوم

۳. این فرایند مانای اکید است

۱۰- فرض کنید فرآیند $N_t, t > 0$ دارای توزیع پواسون با پارامتر λt باشد تابع همبستگی با فرض اینکه $0 \leq s < t$ برای این فرایند کدام است؟

$$\lambda \min(t, s) \quad .۴$$

$$\lambda(t-s) \quad .۳$$

$$\lambda t \quad .۲$$

$$\lambda s \quad .۱$$

۱۱- در زنجیر ارنفست ساده با ۳ مهره با فرض اینکه X_0 دارای توزیع یکنواخت گسسته بر $\{0, 1, 2, 3\}$ باشد، امید

ریاضی توزیع X_1

را بدست آورید؟

۲ .۴

۱.۵ .۳

۲.۵ .۲

۱.۷۵ .۱

۱۲- در زنجیر ارنفست ساده با ۳ مهره با فرض اینکه X_0 دارای توزیع یکنواخت گسسته بر $\{0,1,2,3\}$ باشد، انحراف معیار توزیع X_1 را بدست آورید؟

۱. 0.764 ۲. 0.325 ۳. 0.823 ۴. 0.126

۱۳- در زنجیر قدم زدن تصادفی که از صفر شروع می شود، اگر احتمال رفتن به چپ q و احتمال در جا زدن r و احتمال رفتن به راست p باشد،

احتمال اینکه متحرک بعد از دو واحد زمانی در نقطه یک قرار گیرد کدام است؟

۱. $2qr$ ۲. $2pr$ ۳. $2pq + r^2$ ۴. p^2

۱۴- فرض کنید زنجیر مارکوفی دارای فضای حالت $L = \{0,1,2\}$ و ماتریس احتمال انتقال زیر باشد. اگر داشته باشیم $A = \{1,2\}$, $X_0 = 0$

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{bmatrix}$$

مطلوب است احتمال زمان اصابت $P(T_A = 2)$ ؟

۱. 0.25 ۲. 0.5 ۳. 1 ۴. 0.75

۱۵- حالت X را گوییم هرگاه داشته باشیم

۱. بازگشتی - $f_{xx} < 1$ ۲. گذرا - $f_{xx} = 1$
۳. بازگشتی - $f_{xx} = 1$ ۴. گذرا - $f_{xx} > 1$

۱۶- فرض کنید $x \leftrightarrow y$ در این صورت

۱. اگر x بازگشتی باشد، آنگاه y گذرا است
۲. اگر x جاذب باشد، آنگاه y نیز جاذب است
۳. اگر x بازگشتی باشد، آنگاه y نیز بازگشتی است
۴. اگر x گذرا باشد، آنگاه y بازگشتی است

۱۷- زنجیر مارکف با ماتریس احتمال انتقال زیر را در نظر بگیرید .

$$\begin{bmatrix} 0.25 & 0.25 & 0 & 0.5 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0.75 \end{bmatrix}$$

کدام گزینه صحیح است؟

۱. دسته $c_1 = \{0,1\}$ گذرا هستند
۲. دسته $c_2 = \{2,3\}$ بازگشتی هستند
۳. دسته $c_1 = \{0,1\}$ جاذب است
۴. گزینه های یک و دو صحیح هستند

۱۸- توزیع مانای زنجیر ارنفست کدام است؟

۱. توزیع پواسون
۲. توزیع چند جمله ای
۳. توزیع نرمال
۴. توزیع دوجمله ای

۱۹- اگر میانگین تعداد نوزادان در فرآیند شاخه ای را با μ نشان دهیم آنگاه برای چه مقداری از μ ، انقراض با احتمال کمتر از یک واقع می شود

۱. $\mu < 1$
۲. $\mu > 1$
۳. $\mu = 1$
۴. $\mu = 0$

۲۰- در مسئله ورشکستگی قمار دو بازیکن A و B با سرمایه های a و b بازی می کنند، اگر $p = q$ ، باشد با زیاد شدن سرمایه بازیکن B احتمال ورشکستگی A.....

۱. کم می شود
۲. تغییری نمی کند
۳. حتمی است
۴. زیاد می شود

۲۱- اگر فضای حالت زنجیری فقط یک دسته هم ارزی داشته باشد. یعنی هر دو حالت دلخواه در دسترس یکدیگر باشند، آن زنجیر را چه می نامند.

۱. بازگشتی
۲. تحویل ناپذیر
۳. تحویل پذیر
۴. گذرا

۲۲- شرط لازم برای وجود توزیع مانا برای زنجیر زاد و مرگ کدام است؟

۱. زنجیر گذرا نباشد
۲. زنجیر گذرا باشد
۳. زنجیر بازگشتی نباشد
۴. زنجیر بازگشتی باشد

۲۳- کدام یک از روابط زیر صحیح است؟

$$f_{xy}^{(n)} \leq p_{xy}^{(n)} \quad .۴ \quad f_{xy}^{(n)} \approx p_{xy}^{(n)} \quad .۳ \quad f_{xy}^{(n)} \geq p_{xy}^{(n)} \quad .۲ \quad f_{xy}^{(n)} > p_{xy}^{(n)} \quad .۱$$

۲۴- اگر تعداد نوزادان ξ هر فرد در فرایند شاخه ای دارای توزیع هندسی

$$P(\xi = k) = pq^k \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

باشد، با فرض $q > p$ احتمال انقراض $\rho = \varphi(s)$ را حساب کنید.

$$\frac{p}{1-qs} \quad .۴ \quad \frac{p}{q} \quad .۳ \quad \frac{q}{1-ps} \quad .۲ \quad \frac{q}{p} \quad .۱$$

۲۵-

فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{c}{x^2} & 1 < x < 10 \\ 0 & \text{ایر نقاط} \end{cases}$$

مقدار c

کدام است؟

$$\frac{6}{7} \quad .۴ \quad \frac{4}{5} \quad .۳ \quad \frac{10}{9} \quad .۲ \quad \frac{9}{10} \quad .۱$$

سوالات تشریحی

۱- برای فرایند پواسون $\{N_t, t \geq 0\}$ با فرض $0 \leq s < t$ تابع همبستگی $C(s, t)$ و ضریب همبستگی را بدست آورده و تفسیر نمایید.

۲- قضیه برابری چپن کولموگوروف را بیان کرده و اثبات کنید

۱.۲۰ نمره

۱.۲۰ نمره

۳- برای زنجیر مارکف با ماتریس احتمال انتقال زیر را با فضای حالت $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ در نظر گرفته و حالت‌های گذرا و بازگشتی را معلوم کنید.

احتمال جذب حالت‌های ۲ و ۳ در مجموعه $R_1 = \{0, 1\}$ چقدر است؟

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۴- برای جدول توزیع احتمالات توام دو متغیر تصادفی X و Y در زیر مطلوب است: الف: توزیع‌های حاشیه‌ای X و Y ، ب: ضریب همبستگی X و Y ؟

Y	-1	0	1
X			
0	0	$\frac{1}{3}$	0
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

۵- فرض کنید توزیع تعداد فرزندان هر فرد به صورت زیر باشد، احتمال انقراض را بدست آورید؟

ξ	0	1	2	3
$P(\xi)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$

شماره سوال	پاسخ صحيح
1	ب
2	الف
3	ج
4	د
5	ج
6	ب
7	الف
8	د
9	ب
10	الف
11	ج
12	الف
13	ب
14	الف
15	ج
16	ج
17	د
18	د
19	ب
20	ج
21	ب
22	الف
23	د
24	ج
25	ب

۱- دنباله $\{A_n\}$ از پیشامد ها را صعودی گوییم هرگاه به ازای هر n داشته باشیم.....

$$1. A_n \subset A_{n+1} \quad 2. A_n \supset A_{n+1} \quad 3. P\left(\bigcup_i A_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \quad 4. \text{گزینه های 1 و 3}$$

۲- فرض کنید F تابع توزیع متغیر تصادفی X باشد، آنگاه

$$1. \text{تابع } F \text{ از راست پیوسته است.} \quad 2. \text{تابع } F \text{ از چپ از پیوسته است.}$$

$$3. \lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = \infty \quad 4. \lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 0$$

۳- فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل باشند اگر تابع مولد احتمال این دو متغیر به ترتیب $\varphi_X(s)$ و $\varphi_Y(s)$ باشند آنگاه داریم:

$$1. \varphi_{X+Y}(s) = \varphi_X(\varphi_Y(s)) \quad 2. \varphi_{X+Y}(s) = \varphi_X(s) + \varphi_Y(s)$$

$$3. \varphi_{X+Y}(s) = \varphi_X(s) \varphi_Y(s) \quad 4. \varphi_{X+Y}(s) = \varphi_Y(\varphi_X(s))$$

۴- فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{c}{x^2} & 1 < x < 10 \\ 0 & \text{ایر نقاط} \end{cases}$$

باشد مقدار c کدام است؟

$$1. \frac{9}{10} \quad 2. \frac{7}{10} \quad 3. \frac{4}{10} \quad 4. \frac{10}{9}$$

۵- برای توزیع هندسی به صورت $P(X = k) = pq^{k-1} \quad k = 1, 2, 3, \dots$ تابع مولد احتمال کدام است؟

$$1. \frac{qS}{1-qS} \quad 2. \frac{qS}{1-pS} \quad 3. \frac{pS}{1-pS} \quad 4. \frac{pS}{1-qS}$$

۶- فرض کنید X دارای توزیع یکنواخت بر $(0, 1)$ باشد. اگر $X = x$ آنگاه داریم که متغیر تصادفی Y بر $(0, x)$ دارای توزیع یکنواخت است. $E(y)$ کدام است؟

$$1. 0.5 \quad 2. 0.75 \quad 3. 0.25 \quad 4. 1$$

۷- فرض کنید X و Y دارای توزیع یکنواخت بر مجموعه $\{(x, y) | 0 \leq x < y \leq 1\}$ باشد به طوری که داریم:

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 & 0 \leq x < y \leq 1 \\ 0 & \text{ایر نقاط} \end{cases}$$

توزیع حاشیه ای X برای مقادیر $0 < x < 1$ کدام است؟

۱. $2(1-x)$ ۲. $(2-x)$ ۳. $(x-2)$ ۴. $2(x-1)$

۸- فرآیند $X_t, t \geq 0$ را مانای گویند هرگاه ثابت و فقط به تفاضل s و t بستگی داشته باشد.

۱. وسیع - امید ریاضی و واریانس فرآیند - $Cov(X_t, X_s)$

۲. اکید - امید ریاضی فرآیند - $Cov(X_t, X_s)$

۳. وسیع - امید ریاضی فرآیند - $E(X_t X_s)$

۴. ضعیف - واریانس فرآیند - $E(X_t X_s)$

۹- فرض کنید فرآیند $N_t, t > 0$ دارای توزیع پواسون با پارامتر λ_t باشد تابع میانگین برای این فرایند کدام است؟

۱. $e^{-\lambda}$ ۲. λ ۳. $N\lambda$ ۴. λt

۱۰- فرض کنید فرآیند $N_t, t > 0$ دارای توزیع پواسون با پارامتر λ_t باشد تابع همبستگی با فرض اینکه $0 \leq s < t$ برای این فرایند کدام است؟

۱. $\sqrt{\frac{s}{t}}$ ۲. λt ۳. λs ۴. $\sqrt{\frac{t}{s}}$

۱۱- کدامیک از عبارات زیر در مورد فرآیند پواسون درست است؟

۱. فرآیند پواسون مانای اکید نیست
۲. فرآیند پواسون مانای اکید است
۳. فرآیند پواسون مانای وسیع نیست
۴. گزینه های ۱ و ۳

۱۲- در زنجیر ارنفست ساده با ۵ مهره P_{12} چقدر است؟

۱. ۰ ۲. ۰.۹ ۳. ۰.۶ ۴. ۰.۸

۱۳- در زنجیر ارنفست ساده با 5 مهره با فرض اینکه X_0 دارای توزیع یکنواخت گسسته بر $\{0,1,2,3,4,5\}$ باشد، برای توزیع X_1 مطلوب است $P(X_1=0)$ ؟

۱. $\frac{1}{30}$ ۲. $\frac{1}{20}$ ۳. $\frac{7}{20}$ ۴. $\frac{7}{30}$

۱۴- در زنجیر قدم زدن تصادفی که از صفر شروع می شود، اگر احتمال رفتن به چپ q و احتمال درجا زدن r و احتمال رفتن به راست p باشد، احتمال اینکه متحرک بعد از دو واحد زمانی در نقطه 2 قرار گیرد کدام است؟

۱. $r^2 + 2pq$ ۲. $2p$ ۳. q^2 ۴. p^2

۱۵- فرض کنید زنجیر مارکوفی دارای فضای حالت $L = \{0,1,2\}$ و ماتریس احتمال انتقال زیر باشد. اگر داشته باشیم $X_0 = 0$ ، $A = \{1,2\}$ مطلوب است احتمال زمان اصاب $P(T_A = 1)$ ؟

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{bmatrix}$$

۱. 0.25 ۲. 0.5 ۳. 0.75 ۴. 0

۱۶- زنجیر مارکوف با ماتریس انتقال زیر را در نظر بگیرید. در این صورت داریم.....

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

۱. زنجیر فقط دارای یک دسته هم ارزی است.
۲. زنجیر تحویل ناپذیر است.
۳. زنجیر تحویل ناپذیر نیست
۴. گزینه های اول و دوم

۱۷- حالت X را گوییم هرگاه داشته باشیم

۱. بازگشتی - $f_{xx} < 1$
۲. جاذب - $f_{xx} = 1$
۳. گذرا - $f_{xx} = 1$
۴. گذرا - $f_{xx} < 1$

۱۸- فرض کنید $X \leftrightarrow Y$ در این صورت

۱. اگر X بازگشتی باشد، آنگاه Y گذرا است
۲. اگر X جاذب باشد، آنگاه Y نیز جاذب است
۳. اگر X بازگشتی باشد، آنگاه Y نیز بازگشتی است
۴. اگر X گذرا باشد، آنگاه Y بازگشتی است

۱۹- زنجیر مارکف با ماتریس احتمال انتقال زیر را در نظر بگیرید، کدام گزینه صحیح است؟

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.3 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1 \end{bmatrix}$$

۱. وضعیت 3 گذرا است

۲. وضعیت 3 بازگشتی است

۳. وضعیت 3 جاذب است

۴. وضعیت 3 دوره ای است

۲۰- کدام یک از روابط زیر صحیح است

۱. $f_{xy}^{(n)} \geq p_{xy}^{(n)}$ ۲. $f_{xy}^{(n)} \leq p_{xy}^{(n)}$ ۳. $f_{xy}^{(n)} = 1 - p_{xy}^{(n)}$ ۴. $f_{xy}^{(n)} < p_{xy}^{(n)}$

۲۱- اگر در زنجیر مارکفی فضای حالتها باشد، آنگاه زنجیر حداقل یک حالت دارد

۱. نامتناهی - بازگشتی

۲. جاذب - گذرا

۳. متناهی - بازگشتی

۴. متناهی - گذرا

۲۲- در مسئله ورشکستگی قمار دو بازیکن Λ و B با سرمایه های a و b بازی می کنند، اگر $p = q$ باشد با زیاد شدن سرمایه بازیکن B احتمال ورشکستگی Λ

۱. زیاد می شود

۲. حتمی است

۳. منتفی نیست

۴. وجود دارد

۲۳- اگر میانگین تعداد نوزادان در فرآیند شاخه ای را با μ نشان دهیم آنگاه برای انقراض با احتمال واقع می شود

۱. $\mu > 1$ - یک

۲. $\mu \leq 1$ - یک

۳. $\mu < 1$ - کمتر از یک

۴. $\mu > 1$ - بسیار نزدیک صفر

۲۴- در زنجیر زاد و مرگ فرض کنید $0 < p < 1$. اگر داشته باشیم $r_x = 0$, $q_x = q = 1 - p$, $p_x = p$ شرط بازگشتی بودن زنجیر کدام است؟

۱. $p < q$

۲. $p \leq q$

۳. $p > q$

۴. $p \geq q$

۲۵- توزیع مانای زنجیر ارنفست کدام است؟

۱. هندسی

۲. برنولی

۳. پواسون

۴. دو جمله ای

سوالات تشریحی

۱.۲۰ نمره

۱- برای فرآیند پواسون N_t با پارامتر λt تابع میانگین و تابع همبستگی را بدست آورید.

۱.۲۰ نمره

۲- قضیه چپمن کلمگروف را بیان کرده و اثبات کنید

۱.۲۰ نمره

۳- زنجیر مارکف با ماتریس احتمال انتقال زیر (با فضای حالت 1 تا 4) را در نظر بگیرید

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.3 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1 \end{bmatrix}$$

در مورد وضعیت های یک و 4، مشخص کنید کدامیک بازگشتی، گذرا و یا جاذب هستند اثبات کنید

۱.۲۰ نمره

۴- برای فرآیند شاخه ای ثابت کنید احتمال انقراض ρ در برابری $\rho = \phi(\rho)$ صادق است

۱.۲۰ نمره

۵- ماتریس احتمالهای انتقال را در زنجیر ارنفست برای $d=3$ نوشته و با فرض اینکه توزیع آغازین X_0 یکنواخت بر $\{0,1,2,3\}$ باشد توزیع X_1 را بدست آورید

شماره سوال	پاسخ صحیح
1	د
2	الف
3	ب
4	د
5	د
6	ج
7	الف
8	ج
9	د
10	ج
11	د
12	د
13	الف
14	د
15	ب
16	د
17	د
18	ج
19	الف
20	ب
21	ج
22	ب
23	ب
24	ب
25	د

- ۱- متحرکی را در نظر بگیرید که روی محور خط حقیقی حرکت می کند. حرکت این متحرک به این ترتیب است که در هر واحد زمان یک واحد به راست یا یک واحد به چپ می رود. اگر متحرک از مبدا شروع به حرکت کرده باشد و X تعداد حرکت ها در جهت راست محور باشد. احتمال اینکه پس از $2k$ حرکت در نقطه $2i$ باشد برابر است با:

$$\begin{array}{llll} ۱. \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} & ۲. \frac{\binom{2k}{k+i}}{2^{2k}} & ۳. 2k+2i & ۴. \binom{2k}{k+i} \end{array}$$

۲- کدام گزینه درست است؟

۱. اگر A_n ها دنباله ای نزولی باشند آنگاه $\lim P(A_n) = P(\cup A_n)$.

۲. در نامساوی بول شرط ناسازگاری پیشامدها وجود دارد.

۳. اگر دو پیشامد ناسازگار باشند آنگاه مستقلند.

۴. احتمال های شرطی در اصول موضوعه احتمال صدق میکند.

۳- اگر متغیر تصادفی X دارای توزیع نمایی با تابع چگالی احتمال زیر باشد، آنگاه تابع مولد گشتاور X برابر است با:

$$\begin{array}{llll} ۱. \frac{\lambda}{\lambda - t} & ۲. \frac{\lambda - t}{\lambda} & ۳. \frac{\lambda}{t - \lambda} & ۴. \frac{t - \lambda}{\lambda} \end{array}$$

۴- فرض کنید A و B دو پیشامد دلخواه باشند. در این صورت با فرض $P(A) = P(B) = 0.1$ و $P(A \cap B) = 0.02$ ضریب همبستگی بین I_A و I_B برابر است با:

$$\begin{array}{llll} ۱. صفر & ۲. \frac{1}{2} & ۳. \frac{1}{5} & ۴. \frac{1}{10} \end{array}$$

۵- فرض کنید X و Y دارای تابع چگالی احتمال توأم زیر باشند، در این صورت امید ریاضی Y برابر است با:

$$f(x, y) = 2, \quad 0 \leq x \leq y \leq 1$$

$$\begin{array}{llll} ۱. ۰.۵ & ۲. ۰.۲۵ & ۳. ۰.۳۳ & ۴. ۰.۷۵ \end{array}$$

۶- کدام گزینه نادرست است؟

$$۱. E(X) = E(E(X|Y)) \quad ۲. E(I_A) = P(A)$$

$$۳. \rho = 0 \text{ بدان معنی است که } I_A \text{ و } I_B \text{ همبسته باشند.} \quad ۴. I_A \cdot I_B = I_{A \cap B}$$

۷- کدام گزینه نادرست است؟

۱. در فرایند مانای اکید، $E(X_t)$ مقدار ثابتی می باشد.

۲. در فرایند مانای اکید، $E(X_t X_s)$ فقط به تفاضل t و s بستگی دارد.

۳. مانای وسیع، مانای اکید را نتیجه می دهد.

۴. الف و ب

۸- در فرایند پواسون با پارامتر λ ، ضریب همبستگی بین N_t و N_{t+s} برابر است با:

۱. $\frac{t}{t+s}$ ۲. $\frac{s}{t+s}$ ۳. $\frac{t+s}{t}$ ۴. $\frac{t}{s}$

۹- در فرایند حرکت براونی با واریانس برابر ۴، ضریب همبستگی بین X_t و X_{t+s} برابر است با:

۱. $\frac{1}{2}$ ۲. صفر ۳. ۰.۶۴ ۴. $\frac{1}{16}$

۱۰- کدام گزینه در مورد فرایند حرکت براونی صحیح است؟

۱. چون مانای وسیع است، مانای اکید هم هست.

۲. این فرایند دارای تابع میانگین غیر صفر است.

۳. چون مانای وسیع نیست، مانای اکید هم نیست.

۴. هیچکدام

۱۱- کدام یک از توزیع های زیر دارای خاصیت بیحافظگی است؟

۱. فقط نمایی ۲. هندسی. نمایی ۳. پواسون - هندسی ۴. نمایی - پواسون

۱۲- فرض کنید، N_t یک فرایند پواسون با پارامتر λ باشد. تابع میانگین فرایند X_t در زیر کدام است؟

$$X_t = N_{t+s} - N_t$$

۱. $\frac{t}{t+s}$ ۲. $\frac{s}{t+s}$ ۳. صفر ۴. $\frac{t}{s}$

۱۳- در زنجیر ارنفست ساده، d مهره به شماره های ۱ تا d و دو ظرف به شماره های a و b مفروض اند. فرض کنید در ظرف a ، در ابتدا X مهره وجود داشته باشد. احتمال اینکه تعداد مهره های ظرف a برابر $X+1$ شود برابر است.

۱. $\frac{d-X}{d}$ ۲. $\frac{X}{d}$ ۳. $\frac{1}{d}$ ۴. $\frac{1}{X}$

۱۴- در زنجیر ارنفست ساده سوال ۱۳، با فرض اینکه X_t دارای توزیع یکنواخت بر $\{0, 1, 2, \dots, d\}$ باشد. احتمال X_0 برابر صفر کدام گزینه است؟

۱. $\frac{d+2}{d(d+1)}$ ۲. $\frac{1}{d}$ ۳. $\frac{1}{d+1}$ ۴. $\frac{1}{d(d+1)}$

۱۵- حالتی مانند X را در فرایند گذرا گویند هرگاه:

۱. $f_{xxx} = 0$ ۲. $f_{xxx} \leq 1$ ۳. $f_{xxx} \leq 1$ ۴. $f_{xxx} = 1$

۱۶- در زنجیر مارکوفی با فضای حالت $\{0, 1\}$ و ماتریس احتمال تغییر وضعیت $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ مقدار $P(T_0 = 2)$ کدام است؟

۱. $\frac{1}{2}$ ۲. $\frac{1}{3}$ ۳. $\frac{1}{4}$ ۴. $\frac{2}{3}$

۱۷- کدام گزینه درست است؟

۱. در زنجیر قدم زدن تصادفی اگر τ_{xx} مثبت باشد زنجیر نادوره ای است.
 ۲. در زنجیر ارنفست دوره زنجیر برابر یک است.
 ۳. زنجیر تعدیل یافته ارنفست دوره ای است.
 ۴. در زنجیر قدم زدن تصادفی اگر τ_{xx} مثبت باشد دوره زنجیر برابر ۲ است.

۱۸- در زنجیر قدم زدن تصادفی ساده اگر $p=q=0.5$ باشد مقدار $E_x(N(0))$ کدام است؟

۱. ۱ ۲. ۳ ۳. ۲ ۴. بی نهایت

۱۹- اگر y حالت بازگشتی زنجیر باشد کدام مورد درست است؟

۱. $P_y(N(y) < \infty) = 1$ ۲. $1 - f_{xxx} > 0$ ۳. $P_y(N(y) = \infty) = 1$ ۴. $E_y(N(y)) < \infty$

۲۰- در مساله ورشکستگی قمارباز اگر احتمال برد بازیکن a و b در هر بازی به ترتیب برابر $\frac{1}{4}$ و $\frac{2}{3}$ باشد. با توجه به سرمایه

های دو بازیکن a و b که به ترتیب ۲ و ۳ تومان می باشد. احتمال ورشکستگی بازیکن a برابر است با:

۱. $\frac{3}{31}$ ۲. $\frac{2}{31}$ ۳. $\frac{3}{5}$ ۴. $\frac{2}{5}$

در فرایند $\{X_n\}$ با فضای حالت $\{0, 1\}$ و ماتریس احتمال انتقال یک مرحله ای $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^{(n)}$ وقتی

کدام است؟

۱. $\frac{2}{3}$ ۲. $\frac{1}{3}$ ۳. ۰.۷۵ ۴. $\frac{1}{12}$

۲۲- اگر تابع کوواریانس X_s و X_t برای $t > s$ تابعی از e^{-t} باشد آنگاه

۱. فرایند مانای وسیع است. ۲. فرایند مانای اکید است.
۳. فرایند دارای نمو مانا است. ۴. هیچکدام

۲۳- در زنجیر زاد و مرگ اگر $P_{xx} = p$ و $q > p$ باشند آنگاه $\pi(0)$ برابر است با:

۱. $\frac{p}{q}$ ۲. ۱ ۳. $1 - \frac{p}{q}$ ۴. صفر

۲۴- شرط لازم و کافی برای اینکه زنجیر با زمان پیوسته دارای ویژگی مارکوفی باشد آن است که به ازای هر X, T_{xx} دارای توزیعباشد.

۱. هندسی ۲. نرمال ۳. نمایی ۴. جهشی

۲۵- در فرایند شاخه ای اگر توزیع نوزادان هر فرد (E) به صورت $P(E = k) = \frac{1}{4} \cdot (\frac{3}{4})^k$ باشد. احتمال انقراض نسل کدام گزینه است؟

۱. $\frac{1}{4}$ ۲. $\frac{1}{3}$ ۳. ۱ ۴. $\frac{1}{2}$

سوالات تشریحی

۲۰۰ نمره

- ۱- نشان دهید در فرایند پواسون، هرچه فاصله بین S و t که $S < t$ است، زیادتر باشد میزان ضریب همبستگی بین X_S و X_t کاهش می یابد. با دلیل نشان دهید که این فرایند نه مانای اکید هست نه مانای وسیع.

۱۰۰ نمره

۲- نشان دهید در زنجیر قدم زدن تصادفی ساده، امید ریاضی تعداد دفعاتی را که فرایند در حالت صفر قرار می گیرد (شروع حرکت فرایند هم حالت صفر است) برابر است با:

$$E(N(0)) = \frac{1}{2pq} - 1; p = q$$

۱۰۰ نمره

۳- ماتریس احتمال انتقال زیر مفروض است:

الف: حالت‌های فرایند ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ را در دسته های حالت‌های بازگشتی و گذرا مشخص کنید.
ب: احتمال‌های جذب را به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۱۰۰ نمره

۴- نشان دهید، شرط لازم و کافی برای اینکه زنجیر زاد و مرگ تحویلناپذیر باشد آن است که به ازای هر X نامنفی داشته باشیم $p_X > 0$ و برای هر X بزرگتر یا مساوی یک داشته باشیم، $q_X > 0$.

۱۰۰ نمره

۵- الف: نشان دهید زنجیر ارنفست ساده، توزیع مانای (توزیع دوجمله ای با پارامترهای $p = 0.2$ و $n = d$) یکتا دارد.

ب: در قسمت الف، اگر $\pi(X)$ توزیع مانای زنجیر ارنفست ساده باشد. با فرض $p = 0.5$ ، مقدار $\pi(3)$ را بیابید.

رقم المسئلة	النتيجة الصحيحة
1	2
2	4
3	1
4	3
5	1
6	3
7	3
8	4
9	1
10	3
11	2
12	3
13	1
14	4
15	2
16	3
17	1
18	4
19	3
20	2
21	1
22	4
23	3
24	3
25	2

۱- متحرکی را روی محور اعداد حقیقی در نظر بگیرید که در هر واحد زمانی یک قدم به راست و یا یک قدم به عقب می رود. احتمال آنکه این متحرک از مبدا شروع به حرکت کرده و پس از 8 حرکت در موقعیت نقطه 4 قرار بگیرد چیست؟

۰/۸۷ .۴

۰/۲۵ .۳

$\frac{1}{32}$.۲

$\frac{1}{64}$.۱

۲- اگر $A_n \uparrow$ و $P(A_k) = \frac{1}{e} \sum_{i=1}^k \frac{1}{n+i}$ باشد. مقدار $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$ چیست؟

$\frac{\ln 2}{e}$.۴

$\frac{\ln 2}{8}$.۳

۱ .۲

۰ .۱

۳- اگر A_1, A_2, \dots یک دنباله از پیشامدها باشند. تحت چه شرطی روی A_i ها $P(\bigcap_i A_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$ برقرار است؟

۲. صعودی بودن پیشامدها

۱. نزولی بودن پیشامدها

۴. هر سه مورد

۳. ناسازگار بودن پیشامدها

۴- تابع مولد توزیع هندسی چیست؟

۴. وجود ندارد

$\frac{ps}{1-qs}$.۳

$\frac{qs}{1+ps}$.۲

$\frac{qs}{1-ps}$.۱

۵- اگر X دارای توزیع یکنواخت بر $(0, 1)$ و $Y|X=x$ نیز دارای توزیع یکنواخت بر $(0, x)$ باشند امید ریاضی Y چیست؟

۴ .۴

۸ .۳

۰/۲۵ .۲

۰/۹۵ .۱

۶- اگر A و B دو پیشامد باشند. تحت چه شرطی ضریب همبستگی بین I_A و I_B صفر می شود؟

۲. A و B ناسازگار باشند.

۱. A و B مستقل باشند.

۴. هیچگاه صفر نمی شود.

۳. همواره صفر است.

۷- عددی به تصادف در بازه صفر و یک انتخاب می کنیم اگر این عدد X باشد. سکه ای که احتمال شیر با آن X است را n بار پرتاب می کنیم تعداد شیرها چه توزیعی دارد؟

۱. دوجمله ای ۲. پواسن ۳. یکنواخت گسسته ۴. نامشخص

۸- اگر $\{N_t, t \geq 0\}$ یک فرآیند پواسن با پارامتر 5 باشد. $C(4, 6)$ چیست؟

۱. 10 ۲. 30 ۳. 18 ۴. 20

۹- کدام مورد درباره سوال 8 نادرست است؟

۱. دارای نمونه های مانا است. ۲. دارای نمونه های مستقل است.
۳. $N(0)=0$ ۴. مانای وسیع است.

۱۰- اگر $\{X_t, t \geq 0\}$ یک فرآیند حرکت براونی باشد. امید ریاضی X_t چیست؟

۱. 1 ۲. صفر ۳. 2 ۴. 3

۱۱- در زنجیر ارنفست ساده با 6 مهره P_{12} چیست؟

۱. $\frac{1}{3}$ ۲. 0/98 ۳. $\frac{2}{3}$ ۴. 0/83

۱۲- $\{X_n, n \geq 0\}$ یک فرآیند قدم زدن تصادفی با $p = q = r = \frac{1}{3}$ باشد. $P(X_2 = 0)$ چیست؟

۱. 0/67 ۲. 0/98 ۳. $\frac{1}{3}$ ۴. $\frac{1}{7}$

۱۳- در زنجیر قدم زدن تصادفی ساده با فرض $p = \frac{1}{3}$ مقدار $E_0(N(0))$ چیست؟

۱. 3 ۲. 1 ۳. 2 ۴. 4

۱۴- در سوال شماره 13 اگر $p = \frac{1}{2}$ باشد. آنگاه $E_0(N(0))$ چیست؟

۱. ∞ ۲. 1 ۳. 2 ۴. 3

۱۵- در فرآیند قدم زدن تصادفی ساده در کدام مورد زیر تمام حالت های آن گذرآیند؟

۴. هر سه

۳. $p = \frac{5}{9}$

۲. $p = \frac{1}{7}$

۱. $p = \frac{1}{3}$

۱۶- تحت چه شرطی فرآیند قدم زدن ساده تحویلناپذیر و بازگشتی است؟

۴. $p = \frac{1}{7}$

۳. $p = \frac{1}{3}$

۲. $p = \frac{1}{2}$

۱. $p = \frac{5}{9}$

۱۷- اگر در مسئله ورشکستگی قمارباز $a=3$ و $b=2$ و $p = \frac{1}{3}$ باشند. احتمال ورشکستگی شخص Λ چیست؟

۴. $0/87$

۳. $\frac{5}{31}$

۲. $\frac{24}{31}$

۱. $\frac{1}{31}$

۱۸- اگر تعداد نوزادان هر فرد در فرآیند شاخه ای دارای توزیع $P\{\xi = k\} = pq^k, k = 0, 1, 2, \dots$ باشد. با فرض $p \geq q$ را احتمال انقراض نسل چیست؟

۴. $\frac{p}{q}$

۳. $0/75$

۲. $0/5$

۱. 1

۱۹- در سوال 18 با فرض $p < q$ احتمال انقراض نسل چیست؟

۴. $\frac{p}{q}$

۳. $0/75$

۲. $0/5$

۱. 1

۲۰- اگر π توزیع مانا و y حالتی گذرا باشد، آنگاه $\pi(y)$ چیست؟

۴. $0/87$

۳. 1

۲. 0

۱. $0/5$

۲۱- توزیع مانا در زنجیر ارنفست ساده چیست؟

۴. وجود ندارد

۳. دوجمله ای

۲. پیواسن

۱. هندسی

۲۲- توزیع مانا در فرآیند شاخه ای چیست؟

۴. وجود ندارد.

۳. پیواسن

۲. هندسی

۱. دوجمله ای

۲۳- کدام زنجیر دوره ای است؟

۱. قدم زدن تصادفی ۲. ارنفست ساده ۳. ارنفست تعدیل یافته ۴. هر سه مورد

۲۴- شرط آنکه یک زنجیر مارکف زمان پیوسته دارای ویژگی مارکف باشد، چیست؟

۱. زمان های توقف توزیع نمایی باشد.
۲. زمان های توقف توزیع پواسن باشد.
۳. زمان های توقف توزیع هندسی باشد.
۴. زمان های توقف توزیع نرمال باشد.

۲۵- در فرآیند پواسن با پارامتر λ به ازای $y > x + 1$ مقدار q_{xy} چیست؟

۱. 0 ۲. 1 ۳. 0/5 ۴. 0/75

سوالات تشریحی

۱،۲۰ نمره

۱- اگر فرآیند $\{X_t, t \geq 0\}$ یک فرآیند تصادفی باشد که در آن $X_t = A \cos \omega t + B \sin \omega t$ و A و B متغیرهای تصادفی ناهمبسته و با امید ریاضی یکسان صفر و واریانس یکسان 1 هستند. نشان دهید که $\{X_t, t \geq 0\}$ مانای وسیع است.

۱،۲۰ نمره

۲- فرض کنید زنجیر مارکفی دارای فضای حالت $E = \{0, 1, 2\}$ و با ماتریس احتمال انتقال زیر باشد. با فرض $A = \{1, 2\}$ و $X_0 = 0$ ، توزیع T_A را به دست آورید.

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

۱،۲۰ نمره

۳- زنجیر مارکفی با فضای حالت $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ و دارای احتمال انتقال های زیر است. دسته های هم ارزی را تعیین نموده و احتمال های جذب را به دست آورید.

$$2P_{00} = \frac{2}{3}, P_{11} = 3P_{10} = \frac{3}{4}, P_{23} = 2P_{21} = 2P_{22} = \frac{2}{4}, P_{31} = P_{32} = P_{34} = \frac{1}{3}, P_{44} = 1$$

۱.۲۰ نمره

۴- در زنجیر مارکوفی با فضای حالت $E = \{0, 1\}$ و با $P_{00} = \frac{1}{3}, P_{11} = \frac{1}{4}$ مقدار $E_0(T_0)$ را بیابید.

۱.۲۰ نمره

۵- اگر در فرآیند مارکوف زمان پیوسته ای و با فضای حالت $E = \{0, 1, 2, \dots\}$ و به ازای $x \neq y$ داشته باشیم $q_{xx+1} = \lambda$ و به ازای $x \neq 0$ نیز $q_{x0} = \mu$ برقرار باشد. توزیع مانا را بیابید.

نمبر رد سوال	ياسخ صحیح
1	الف
2	د
3	الف
4	ج
5	ب
6	الف
7	ج
8	د
9	د
10	ب
11	د
12	ج
13	الف
14	الف
15	د
16	ب
17	ب
18	الف
19	د
20	ب
21	ج
22	د
23	ب
24	الف
25	الف

۱- اگر S یک فضای نمونه و P تابع احتمال تعریف شده روی این فضا باشد، آنگاه برد P کدام است؟

۱. S
۲. مجموعه تمام زیرمجموعه های S
۳. تهی
۴. $[0,1]$

۲- فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع مولد احتمال $\Phi(s)$ و $E(X^2)=15$ و $\Phi''(1)=12$ باشند. در این صورت واریانس X کدام است؟

۱. 3
۲. 6
۳. 9
۴. 12

۳- اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، آنگاه مقدار ضریب همبستگی توابع نشانگر A و B کدام است؟

۱. صفر
۲. 1
۳. 0/5
۴. -1

۴- در فرایند $\{X_n, n \geq 1\}$ فرض کنید $X_6=15$ و $X_{17}=22/5$ باشند در این صورت، نمو فرایند در فاصله 6 تا 17 کدام است؟

۱. 3/75
۲. 7/5
۳. 11/25
۴. 37/5

۵- در فرایند $\{X_t, t \geq 0\}$ به صورت $X_t = A \cos \pi t + B \sin \pi t$ فرض کنید A و B دو پیشامد مستقل با امید ریاضی یکسان صفر و واریانس یکسان σ^2 باشند. در این صورت کدام شرایط برقرار است؟

۱. مانای وسیع است
۲. مانای اکید نیست

۳. $C(s,t) = \sigma^2 \cos \pi(t-s)$
۴. همه موارد

۶- فرض کنید $\{X_t, t \geq 0\}$ یک فرایند حرکت براونی باشد و در این صورت کدام شرایط برقرار است؟

۱. X_t مانای اکید میباشد
۲. X_t مانای وسیع نمیباشد

۳. X_t دارای توزیع نرمال میباشد
۴. X_t همواره مشتق پذیر است

۷- اگر متغیر تصادفی X دارای ویژگی بیحافظگی و $P(X \leq 2) = 0/65$ باشد. آنگاه مقدار $P(X > 5 | X > 3)$ کدام است؟

۱. 0/35
۲. 0/45
۳. 0/55
۴. 0/65

۸- اگر متغیر تصادفی X دارای توزیع احتمال کای دو با یک درجه آزادی باشد، آنگاه مقدار $\int_0^{\infty} P(X > x) dx$ کدام است؟

۱. صفر ۲. ۱ ۳. ۲ ۴. ۴

۹- در زنجیر ارنفست با $d = 5$ مهره اگر توزیع آغازین یکنواخت باشد، آنگاه مقدار $P(X_1 = 2)$ کدام است؟

۱. صفر ۲. $\frac{2}{25}$ ۳. $\frac{2}{30}$ ۴. $\frac{7}{30}$

۱۰- اگر $\{X_n, n \geq 1\}$ یک زنجیر مارکف با فضای حالت $\{0, 1\}$ به طوریکه $\pi_1 = \pi_0 = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$ باشد. آنگاه مقدار $\pi_n(1)$ به ازای $n \geq 1$ کدام است؟

۱. $\frac{3}{5}$ ۲. $\frac{2}{5}$ ۳. $\frac{1}{2}$ ۴. $\frac{1}{5}$

۱۱- در فرایند قدم زدن تصادفی اینکه متحرک پس از ۲ واحد زمانی در نقطه ۲- قرار گیرد کدام است؟

۱. q^2 ۲. $3rq^2$ ۳. $r^2 + 2pq$ ۴. p^3

۱۲- فرض کنید زنجیر $\{X_n, n \geq 0\}$ با فضای حالت $\{1, 2, 3, 4\}$ دارای ماتریس احتمال انتقال زیر باشد. در این صورت مقدار $P(X_1 = 1)$ کدام است؟

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

۱. $\frac{1}{3}$ ۲. $\frac{3}{4}$ ۳. $\frac{1}{4}$ ۴. $\frac{2}{3}$

۱۳- فرض کنید زنجیر $\{X_n, n \geq 0\}$ با فضای حالت $\{0, 1\}$ دارای ماتریس احتمال انتقال زیر باشد. در این صورت مقدار $P_{01}^{(10)}$ کدام است؟

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

۱. $\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ ۲. $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ ۳. $\frac{1}{2}$ ۴. $\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$

۱۴- اگر حالت وضعیت x گذرا باشد. در این صورت کدام شرایط برقرار است؟

۱. $f_{xx} = 1$ ۲. $f_{xx} > 1$ ۳. $f_{xx} < 1$ ۴. با احتمال $1 - f_{xx}$ باز می گردد

۱۵- زنجیر مارکف $\{X_n, n \geq 0\}$ با ماتریس احتمال انتقال زیر را در نظر بگیرید. در این صورت مقدار $P_{01}^{(2)}$ کدام است؟

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

۱. $\frac{5}{9}$ ۲. $\frac{2}{9}$ ۳. $\frac{3}{9}$ ۴. $\frac{4}{9}$

۱۶- زنجیر مارکف $\{X_n, n \geq 0\}$ با ماتریس احتمال انتقال زیر را در نظر بگیرید. در این صورت مقدار $f_{01}^{(2)}$ کدام است؟

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

۴. $\frac{5}{9}$

۳. $\frac{2}{9}$

۲. $\frac{3}{9}$

۱. $\frac{4}{9}$

۱۷- اگر $\{X_n, n \geq 0\}$ یک زنجیر مارکف همگن و یک حالت گذرا از فضای حالت‌های آن (E) باشد، در این صورت کدام رابطه برقرار است؟ (Y حالت گذراست)

۲. $\exists x \in E, E_x(N(y)) = \infty$

۱. $\forall x \in E, E_x(N(y)) = \infty$

۴. $\exists x \in E, E_x(N(y)) < \infty$

۳. $\forall x \in E, E_x(N(y)) < \infty$

۱۸- در مساله ورشکستگی قمارباز اگر $q > p$ باشد. در این صورت مقدار $\lim_{b \rightarrow \infty} \alpha_p$ (احتمال ورشکستگی شخص با سرمایه a) کدام است؟

۴. $\frac{p^a}{q}$

۳. $\left(\frac{p}{q}\right)^a$

۲. $\left(\frac{q}{p}\right)^a$

۱. 1

۱۹- فرض کنید ξ ، تعداد نوزادان هر فرد در زنجیر شاخه ایی دارای توزیع هندسی به صورت $P(\xi = k) = pq^k, k = 0, 1, 2, \dots$ باشد. در این صورت، احتمال انقراض کدام است؟

۴. $1 - \frac{q}{p}$

۳. $1 - \frac{p}{q}$

۲. $\frac{q}{p}$

۱. $\frac{p}{q}$

۲۰- در فرایند زاد و مرگ برای $x \geq 0$ ، فرض کنید $q_x = \frac{x+2}{2(x+1)}$ و $p_x = \frac{x}{2(x+1)}$ باشد. در این صورت زنجیر فرایند در چه وضعیتی قرار دارد؟

۲. یک حالت بازگشتی و در بقیه حالتها گذرا است.

۱. تحویل ناپذیر و بازگشتی است.

۴. تحویل ناپذیر و گذرا است.

۳. تحویل ناپذیر نیست

۲۱- توزیع مانای زنجیر ارنفست کدام است؟

۱. برنولی ۲. دوجمله ای ۳. هندسی ۴. پاسکال

۲۲- شرط لازم و کافی برای اینکه یک زنجیر زمان-پیوسته یک زنجیر مارکف باشد کدام است؟

۱. توزیع T_x نمایی باشد.

۲. فضای حالت شمارا باشد.

۴. 1 و 2

۳. توزیع T_x غیر نمایی باشد

۲۳-

در یک زنجیر مارکف زمان-پیوسته با فضای حالت $\vartheta = \{0,1,2,\dots\}$ فرض کنید $q_{xy} = \begin{cases} \lambda, & y = x+1 \\ \mu, & y = 0 \end{cases}$ باشد، مقدار q_{xx} کدام است؟

۴. $\frac{1}{\lambda + \mu}$

۳. $\frac{-1}{\lambda + \mu}$

۲. $\lambda + \mu$

۱. $-(\lambda + \mu)$

۲۴-

در یک زنجیر مارکف زمان-پیوسته با فضای حالت $\vartheta = \{0,1,2,\dots\}$ فرض کنید $q_{xy} = \begin{cases} \lambda, & y = x+1 \\ \mu, & y = 0 \end{cases}$ باشد، به ازای $y = x+1$ ، مقدار Q_{xy} کدام است؟

۴. $\frac{1}{2}$

۳. $\frac{\mu}{\lambda + \mu}$

۲. $\frac{\lambda}{\lambda + \mu}$

۱. $\frac{1}{\lambda + \mu}$

۲۵- فرض کنید X دارای توزیع نمایی با پارامتر یک باشد. اگر $X = x$ ، آنگاه Y دارای توزیع پواسن با پارامتر x است. در این صورت مقدار $E(Y)$ کدام است؟

۴. x

۳. 2

۲. 1

۱. 0/5

سوالات تشریحی

۱.۲۰ نمره

۱- اگر $A_n \uparrow$ باشد، ثابت کنید: $P\left(\bigcup_i A_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$

۱.۲۰ نمره

۲- فرض کنید P ماتریس احتمال انتقال یک مرحله ای و π توزیع X_n باشد. در این صورت ثابت کنید به ازای هر $n \geq 1$ ، ثابت کنید:

$$\pi_n = \pi_{n-1}P$$

۱.۲۰ نمره

۳- فرض کنید تعداد نوزادان هر فرد در زنجیر شاخه ایی به صورت تابع مولد $\varphi(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}s + \frac{1}{8}s^2 + \frac{2}{8}s^3$ باشد. در این صورت، احتمال انقراض را بدست آورید.

۱.۲۰ نمره

۴- ماتریس احتمالات انتقال $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ و توزیع آغازین زیر باشد:

الف. توزیع X_1 را بدست آورید.

ب. مقدار $P(X_2 = 1 | X_0 = 1)$ را محاسبه کنید.

۱.۲۰ نمره

۵- در زنجیر مارکف زمان پیوسته با فضای حالت $E = \{0, 1, 2\}$ که توزیع مانای آن در رابطه

صادق است، توزیع کلی مانای زنجیر را بدست آورید. $\frac{\Pi(y-1)}{\Pi(y)} = \frac{\lambda + \mu}{\lambda}, y \neq 0$

نمبر رد سوال	ياسخ صحیح
1	د
2	ب
3	الف
4	ب
5	د
6	ج
7	الف
8	ب
9	د
10	ب
11	الف
12	ج
13	ج
14	ج
15	الف
16	ج
17	ج
18	الف
19	الف
20	د
21	ب
22	الف
23	الف
24	ب
25	ب

۱- اگر $A_n \downarrow$ باشد. در این صورت مقدار عبارت $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$ کدام است؟

۱. $P\left(\bigcup_i A_n\right)$ ۲. $P\left(\bigcup_i A'_n\right)$ ۳. $P\left(\bigcap_i A_n\right)$ ۴. $P\left(\bigcap_i A'_n\right)$

۲- اگر پیشامد A با خودش مستقل باشد، در این صورت احتمال پیشامد A چه مقادیری اختیار می کند؟

۱. صفر ۲. یک ۳. صفر و یک ۴. نامعلوم است.

۳- فرض کنید X, Y دو متغیر تصادفی مستقل و φ تابع مولد احتمال باشد. در این صورت کدام عبارت برقرار است؟

۱. $\varphi_{X+Y}(S) = \varphi_X(\varphi_Y(S))$ ۲. $\varphi_{X+Y}(S) = \varphi_X(S)\varphi_Y(S)$

۳. $\varphi_{X+Y}(S) = \varphi_X(S) + \varphi_Y(S)$ ۴. $\varphi_{X+Y}(S) = \varphi_Y(\varphi_X(S))$

۴- فرض کنید X دارای توزیع نمایی با پارامتر یک باشد. اگر $X = x$ ، آنگاه Y دارای توزیع پواسن با پارامتر x است. در این صورت مقدار $E(Y)$ کدام است؟

۱. $0/5$ ۲. 1 ۳. 2 ۴. x

۵- اگر متغیر تصادفی X دارای تابع مولد $\varphi(S) = \frac{pS}{1-qS}$ باشد. امید ریاضی X کدام است؟

۱. $\frac{1}{1-q}$ ۲. $\frac{1}{1-p}$ ۳. $\frac{1}{q}$ ۴. $\frac{1}{p}$

۶- اگر متغیر تصادفی X دارای تابع مولد $\varphi(S) = \frac{pS}{1-qS}$ باشد. واریانس X کدام است؟

۱. $\frac{1}{p^2}$ ۲. $\frac{1}{q^2}$ ۳. $\frac{q}{p^2}$ ۴. $\frac{p}{q^2}$

۷- اگر A و B دو پیشامد مستقل با امید ریاضی یکسان صفر و واریانس یکسان σ^2 باشند. در این صورت فرایند $\{X_t, t \geq 0\}$ به صورت $X_t = A \cos \pi t + B \sin \pi t$ کدام وضعیت را دارد؟

۱. مانای وسیع است ۲. مانای اکید نیست

۳. $C(s, t) = \sigma^2 \cos \pi(t-s)$ ۴. همه موارد

۸- فرض کنید $\{N(t), t \geq 0\}$ یک فرایند پواسن با پارامتر $\lambda = 2$ باشد، در این صورت مقدار $E(N(3)N(2))$ کدام است؟

۱. 28 ۲. 3 ۳. 2 ۴. 20

۹- فرض کنید $\{N(t), t \geq 0\}$ یک فرایند پواسن با پارامتر $\lambda = 2$ باشد، در این صورت مقدار کواریانس $N(4)$ و $N(5)$ کدام است؟

۱. صفر ۲. 8 ۳. 10 ۴. 20

۱۰- فرض کنید $\{X_t, t \geq 0\}$ یک فرایند حرکت براونی باشد. در این صورت کدام شرایط برقرار است؟

۱. X_t دارای توزیع نرمال می باشد ۲. X_t مانای اکید می باشد
۳. X_t مانای وسیع نمی باشد ۴. X_t همواره مشتق پذیر است

۱۱- کدام یک از ماتریس های زیر تصادفی و مضاعف است؟

۱. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ۲. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ ۳. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$ ۴. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \\ 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

۱۲- در زنجیر ارنفست با $d = 5$ مهره اگر توزیع آغازین یکنواخت باشد، $p(X_1 = 2)$ کدام است؟

۱. صفر ۲. $\frac{7}{30}$ ۳. $\frac{2}{30}$ ۴. $\frac{2}{25}$

-۱۳

زنجیر مارکف با ماتریس احتمال انتقال

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

و فضای حالت $v = \{1, 2, 3, 4\}$ را در نظر بگیرید. در این

صورت مقدار $P(X_1 = 1)$ کدام است؟

۴. $\frac{1}{4}$

۳. $\frac{3}{4}$

۲. $\frac{1}{3}$

۱. $\frac{1}{2}$

-۱۴

در زنجیر $\{X_n, n \geq 0\}$ با فضای حالت $v = \{0, 1\}$ و ماتریس احتمال انتقال

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

مقدار $p_{01}^{(10)}$ کدام است؟

۴. $\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$

۳. $\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

۲. $\left(\frac{1}{2}\right)^2$

۱. $\frac{1}{2}$

۱۵- در فرایند قدم زدن تصادفی احتمال اینکه متحرک پس از ۲ واحد زمانی در نقطه صفر قرارگیرد کدام است؟

۴. $2qr$

۳. $2pr$

۲. $2pq^2 + r$

۱. $2pq + r^2$

-۱۶

فرض کنید زنجیر مارکفی دارای فضای حالت $v = \{0, 1, 2\}$ ماتریس احتمال انتقال

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

باشد. اگر $A = \{0, 1\}$ و

$X_0 = 0$ باشد، در این صورت مقدار $P\{T_0 = 2\}$ کدام است؟

۴. $\frac{3}{4}$

۳. $\frac{1}{4}$

۲. $\frac{1}{3}$

۱. $\frac{1}{2}$

زنجیر مارکف با ماتریس احتمال انتقال

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

را در نظر بگیرید. در این صورت مقدار $(p_{01}^{(2)}, f_{01}^{(2)})$ کدام

است؟

۱. $\left(\frac{5}{9}, \frac{2}{9}\right)$ ۲. $\left(\frac{3}{9}, \frac{5}{9}\right)$ ۳. $\left(\frac{4}{9}, \frac{3}{9}\right)$ ۴. $\left(\frac{3}{9}, \frac{7}{9}\right)$

۱۸- اگر حالت وضعیت X گذرا باشد. در این صورت کدام شرایط برقرار است؟

۱. $f_{XX} = 1$ ۲. $f_{XX} < 1$ ۳. $f_{XX} > 1$ ۴. با احتمال $1 - f_{XX}$ به X باز می گردد

۱۹- در زنجیر قدم زدن تصادفی ساده با فرض $p = \frac{1}{3}$ ، مقدار $E_0(N(0))$ کدام است؟

۱. ۲ ۲. ۳ ۳. ۴ ۴. بی نهایت

۲۰- در کدام یک از حالت زیر زنجیر قدم زدن تصادفی ساده تحویلناپذیر و بازگشتی است؟

۱. $p = \frac{1}{3}$ ۲. $p = \frac{2}{3}$ ۳. $p = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ ۴. $p = \frac{1}{2}$

۲۱- در مساله ورشکستگی قمارباز اگر $q > p$ باشد. در این صورت مقدار $\lim_{b \rightarrow \infty} \alpha_a$ (احتمال ورشکستگی شخص با سرمایه a) کدام است؟

۱. ۱ ۲. $\left(\frac{p}{q}\right)^a$ ۳. $\frac{p^a}{q}$ ۴. $\left(\frac{q}{p}\right)^a$

۲۲- فرض کنید تعداد نوزادان هر فرد در زنجیر شاخه ایی به صورت $\varphi(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}s + \frac{1}{8}s^2 + \frac{2}{8}s^3$ باشد احتمال انقراض کدام است؟

۱. $\frac{-1 + \sqrt{41}}{4}$ ۲. $\frac{3 - \sqrt{41}}{4}$ ۳. $\frac{-3 + \sqrt{41}}{4}$ ۴. $\frac{1 - \sqrt{41}}{4}$

۲۳- در فرایند زاد و مرگ برای $x \geq 0$ ، فرض کنید $q_x = \frac{x+2}{2(x+1)}$ و $p_x = \frac{x}{2(x+1)}$ باشد. در این صورت زنجیر فرایند در چه وضعیتی قرار دارد؟

۱. تحویل ناپذیر و بازگشتی است ۲. یک حالت بازگشتی و در بقیه حالتها گذرا است
۳. تحویل ناپذیر و گذرا است ۴. تحویل ناپذیر نیست

۲۴- در زنجیر قدم زدن تصادفی اگر به ازای هر x ، $r_x = 0$ باشد آنگاه دوره زنجیر کدام است؟

۱. $d = 1$ ۲. $d = n$ ۳. $d = 2$ ۴. $d = 2n$

۲۵- در یک زنجیر مارکف زمان-پیوسته با فضای حالت $\vartheta = \{0, 1, 2, \dots\}$ فرض کنید $q_{xy} = \begin{cases} \lambda, & y = x+1 \\ \mu, & y = 0 \end{cases}$ باشد، به ازای $y = x+1$ ، مقدار Q_{xy} کدام است؟

۱. $\frac{1}{\lambda + \mu}$ ۲. $\frac{\lambda}{\lambda + \mu}$ ۳. $\frac{\mu}{\lambda + \mu}$ ۴. $\frac{1}{2}$

سوالات تشریحی

۱.۲۰ نمره

۱- فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y دارای توزیع توام پیوسته باشند ثابت کنید.

$$E(X) = E(E(X|Y))$$

۱.۲۰ نمره

۲- فرض کنید P ماتریس احتمال انتقال یک مرحله ای و π توزیع X_n باشد. در این صورت ثابت کنید به ازای هر $n \geq 1$

$$\pi_n = \pi_{n-1}P$$

ماتریس احتمالات انتقال $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ و توزیع آغازین زیر باشد:

2	1	0	x
$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\Pi_0(x)$

الف. توزیع را بدست آورید.

ب. مقدار $P(X_2 = 1 | X_0 = 1)$ را محاسبه کنید.

۱.۲۰ نمره

۴- زنجیر مارکف $\{X_t, t \geq 0\}$ را با ماتریس احتمال انتقال زیر و با فضای حالت $\{0, 1, 2\}$ را در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

الف) ثابت کنید این زنجیر توزیع مانای یکتا دارد.

ب) توزیع مانا را بیابید.

۱.۲۰ نمره

۵- ثابت کنید اگر زنجیر تحویلناپذیر $\{X_t, t \geq 0\}$ بازگشتی مثبت باشد، این زنجیر دارای توزیع ماناست اگر

$$\pi(x) = \frac{1}{m_x}$$

شماره سوال	پاسخ صحیح
1	ج
2	ج
3	ب
4	ب
5	د
6	ج
7	د
8	الف
9	ب
10	الف
11	ج
12	ب
13	د
14	الف
15	الف
16	ج
17	الف
18	ب
19	ب
20	د
21	د
22	ج
23	ج
24	ج
25	ب

۱- اگر A و B دو پیشامد دلخواه باشند به طوریکه $B \subset A$ ، کواریانس بین I_A و I_B کدام گزینه است؟

۱. $P(A).P(B)$ ۲. $P(A').P(B)$ ۳. $P(A).P(B')$ ۴. $P(A').P(B')$

۲- عددی به تصادف در فاصله $(0, 1)$ انتخاب می کنیم. اگر این عدد برابر X باشد، سکه ای را که احتمال آمدن شیر با آن X است، ۵ بار می اندازیم. احتمال اینکه ۲ بار شیر ظاهر شود، کدام است؟

۱. $\frac{1}{6}$ ۲. $\frac{1}{5}$ ۳. $\frac{1}{2}$ ۴. $\frac{1}{3}$

۳- در فرایند پواسون با پارامتر λ ، ضریب همبستگی بین N_s و N_t با فرض $s < t$ کدام است؟

۱. $\sqrt{\frac{t}{s}}$ ۲. $\lambda(t-s)$ ۳. $\lambda \min\{s, t\}$ ۴. $\sqrt{\frac{s}{t}}$

۴- کدام گزینه نادرست است؟

۱. اگر دنباله A_n نزولی باشد آنگاه $\lim p(A_n) = p(\cap A_n)$
۲. اگر تابع توزیع F_X در a پیوسته باشد آنگاه $P(X = a) = 0$
۳. فرایند پواسون مانای اکید نیست اما فرایند حرکت براونی مانای اکید است.
۴. مانای اکید، مانای وسیع را نتیجه می دهد.

۵- در فرایند حرکت براونی، میزان همبستگی بین X_4 و X_{12} کدام گزینه است؟

۱. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۲. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۳. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴. $0/5$

۶- کدام گزینه درست است؟

۱. در ماتریس تصادفی، درایه ها نامنفی و مجموع درایه های واقع بر هر ستون برابر یک است.
۲. در ماتریس احتمال انتقال، درایه ها نامنفی و مجموع درایه های واقع بر هر ستون برابر یک است.
۳. توزیع فوق هندسی دارای خاصیت بی حافظگی است.
۴. در ماتریس تصادفی و ماتریس احتمال انتقال، درایه ها نامنفی و مجموع درایه های واقع بر هر سطر برابر یک است.

۷- در زنجیر ارنفست ساده با فرض تعداد مهره ها (d) برابر چهار و اینکه X_0 دارای توزیع آغازین یکنواخت بر $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ باشد، مقدار $P(X_1 = k)$ به ازای $k = 0$ کدام گزینه است؟

۱. $\frac{5}{20}$ ۲. $\frac{4}{20}$ ۳. $\frac{1}{20}$ ۴. $\frac{6}{20}$

۸- در سوال ۷، اگر $\pi(x)$ توزیع مانای زنجیر باشد با فرض $p = \frac{1}{2}$ ، مقدار $\pi(3)$ کدام است؟

۱. $\frac{1}{16}$ ۲. $\frac{1}{4}$ ۳. $\frac{1}{3}$ ۴. $\frac{3}{5}$

۹- در مساله ورشکستگی قمارباز، اگر احتمال برد بازیکنان A و B در هر بازی به ترتیب $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{3}$ باشد، با توجه به سرمایه های دو بازیکن A و B که به ترتیب 2 و 3 تومان می باشد. احتمال ورشکستگی بازیکن A برابر است با:

۱. $\frac{3}{31}$ ۲. 1 ۳. $\frac{3}{5}$ ۴. $\frac{2}{5}$

۱۰- زنجیر مارکف $\{X_n : n \geq 0\}$ با فضای حالت $E = \{0, 1, 2\}$ و ماتریس احتمال انتقال $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. اگر

توزیع آغازین به صورت زیر باشد مقدار $P(X_0 = 1 | X_1 = 1)$ کدام است؟

x	0	1	2
$\pi_0(x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$

۱. 1 ۲. $\frac{1}{4}$ ۳. صفر ۴. $\frac{2}{5}$

در زنجیر مارکف $\{X_n: n \geq 0\}$ با ماتریس احتمال تغییر وضعیت

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

و فضای حالت $E = \{0, 1, 2, 3\}$ کدام

حالتها گذرا هستند؟

۱. $\{0, 2\}$ ۲. $\{1, 2\}$ ۳. $\{0, 3\}$ ۴. $\{1, 3\}$

۱۲- در فرایند شاخه ای اگر E تعداد نوزادان هر فرد، دارای توزیع زیر باشد آنگاه :

e	0	1	2	3
احتمال	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$

۱. احتمال انقراض حتمی است.
۲. احتمال انقراض $\frac{-3 + \sqrt{41}}{4}$ است.
۳. احتمال انقراض $\frac{13}{27}$ است.
۴. احتمال انقراض $\frac{6}{27}$ است.

۱۳- کدام گزینه نادرست است؟

۱. اگر زنجیر تحویلناپذیر باشد و توزیع مانا موجود باشد آنگاه به ازای هر x از فضای وضعیت $\pi(x) > 0$
۲. در زنجیر زاد و مرگ، شرط وجود توزیع مانا آن است که زنجیر گذرا نباشد.
۳. در فرایند شاخه ای، تنها حالت گذرا، حالت صفر است.
۴. در زنجیر زاد و مرگ، توزیع مانای زنجیر، هندسی است.

-۱۴

برای زنجیر مارکوفی با فضای حالت $E = \{0, 1\}$ و ماتریس احتمال تغییر وضعیت $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ ، مقدار $P_0(T_0 = 3)$ کدام است؟

۱. $\frac{1}{2}$

۲. $\frac{1}{8}$

۳. $\frac{1}{4}$

۴. $\frac{17}{9}$

-۱۵

در زنجیر دو حالتی $\{X_n : n \geq 0\}$ که ماتریس احتمال های تغییر وضعیت آن به صورت $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ است، داریم:

۱. $d_0 = 0$

۲. $P_{11}^{(3)} = \frac{2}{3}$

۳. $P_{11}^{(2)} = \frac{2}{9}$

۴. $d_1 = 1$

-۱۶ کدام گزینه درست است؟

۱. در زنجیر قدم زدن تصادفی، اگر $r_x > 0$ آنگاه زنجیر نادره ای است.

۲. در زنجیر ارنفست، دوره زنجیر برابر یک است.

۳. در زنجیر قدم زدن تصادفی، اگر $r_x > 0$ ، دوره زنجیر 2 است.

۴. زنجیر تبدیل یافته ارنفست، دوره ای است.

-۱۷

در زنجیر قدم زدن تصادفی ساده اگر $p = q = \frac{1}{2}$ ، مقدار $E_0(N(0))$ برابر است با:

۱. ∞

۲. 1

۳. $\frac{5}{2}$

۴. 2

با فضای حالت $E = \{0, 1, 2\}$ و ماتریس احتمال انتقال یک مرحله ای $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، مقدار $P_{01}^{(2)}$ برابر است با:

۱. $\frac{1}{2}$ ۲. $\frac{1}{4}$ ۳. $\frac{5}{12}$ ۴. $\frac{1}{6}$

۱۹- در فرایند شاخه ای، اگر توزیع تعداد فرزندان هر فرد (T) دارای توزیع هندسی $k = 0, 1, \dots$ $P(T = k) = \frac{1}{8} \left(\frac{7}{8}\right)^k$ باشد. احتمال انقراض نسل کدام است؟

۱. $\frac{1}{8}$ ۲. $\frac{1}{7}$ ۳. $\frac{7}{8}$ ۴. 1

۲۰- اگر x و y در دسترس هم باشند آنگاه کدام گزینه نادرست است؟

۱. اگر x بازگشتی باشد آنگاه y نیز بازگشتی است.
۲. در زنجیر مارکف با فضای حالت متناهی، زنجیر حداقل یک حالت بازگشتی دارد.
۳. در دسترس بودن حالتها، یک رابطه هم ارزی است.
۴. اگر فضای حالت زنجیری فقط یک دسته هم ارزی داشته باشد آنگاه زنجیر تحویل پذیر است.

۲۱- فرض کنید $E = \{0, 1, 2, \dots\}$ فضای حالت باشد و به ازای $x \neq y$ داشته باشیم $q_{xy} = \begin{cases} \mu : y = 0 \\ \lambda : y = x + 1 \\ 0 : \text{otherwise} \end{cases}$ بنابراین q_{xy} و Q_{xy}

در حالت $x \neq 0$ و $y = 0$ به ترتیب کدام گزینه است؟

۱. $-(\lambda + \mu)$ و $\frac{\mu}{\lambda + \mu}$ ۲. $(\lambda + \mu)$ و $\frac{\lambda}{\lambda + \mu}$ ۳. $-(\lambda + \mu)$ و $\frac{\lambda}{\lambda + \mu}$ ۴. $(\lambda + \mu)$ و $\frac{\mu}{\lambda + \mu}$

۲۲- فرایندی دارای فضای حالت $E = \{-1, 0, 1\}$ است. این فرایند در هر یک از این حالتها مدتی که دارای توزیع یکنواخت بر $(0, 1)$ است توقف می کند و سپس با احتمال برابر به یکی از حالتهای دیگر می رود. اگر فرایند در حالت صفر باشد، احتمال اینکه فرایند در زمانی بین صفر و $\frac{1}{2}$ به حالت یک برود کدام است؟

- ۱. 1
- ۲. $\frac{1}{2}$
- ۳. $\frac{1}{8}$
- ۴. $\frac{1}{4}$

۲۳- در زنجیر مارکف تحویل ناپذیر و بازگشتی $\{X_n : n \geq 1\}$ مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} E_x \left(\frac{N_n(x)}{n} \right)$ برابر است با:

- ۱. ∞
- ۲. $\frac{1}{m_x}$
- ۳. $\frac{1}{m_y}$
- ۴. $f_{xx}^{(k)}$

۲۴- در زنجیر مارکف با فضای حالت $E = \{0, 1\}$ و ماتریس احتمال انتقال $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ مقدار $f_{00}^{(2)}$ برابر است با:

- ۱. $\frac{2}{9}$
- ۲. $\frac{1}{3}$
- ۳. $\frac{1}{2}$
- ۴. $\frac{1}{4}$

۲۵- فرایند مارکف جهشی محض $\{X_t : t \geq 0\}$ را فرایند زاد و مرگ می گوئیم هرگاه پارامترهای بی نهایت کوچک آن به صورت زیر باشد:

$$q_{xy} = \begin{cases} \lambda_x & : y = x + 1 \\ \mu_x & : y = x - 1 \\ 0 & : \text{otherwise} \end{cases}$$

۲

$$q_{xy} = \begin{cases} \mu_x & : y = x + 1 \\ \lambda_x & : y = x - 1 \\ 0 & : \text{otherwise} \end{cases}$$

۱

۴. هیچکدام

$$q_{xy} = \begin{cases} \frac{\lambda_x}{\mu_x} & : y = x + 1 \\ \mu_x & : y = x - 1 \\ 0 & : \text{otherwise} \end{cases}$$

۳

سوالات تشریحی

۱.۲۰ نمره

۱- در فرایند حرکت براونی، ضریب همبستگی بین X_s و X_t را با فرض $s < t$ محاسبه نموده و نشان دهید هر چه فاصله بین s و t زیادتر باشد، میزان همبستگی کمتر میشود و توضیح کامل دهید که آیا فرایند حرکت براونی مانای اکید و مانای وسیع هست؟

۱.۲۰ نمره

۲- زنجیر مارکوفی دارای ماتریس احتمال انتقال زیر است:
الف: حالت‌های فرایند $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ را در دسته های حالت‌های بازگشتی و حالت‌های گذرا مشخص کنید.
ب: احتمال های جذب را بدست آورید.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۱.۲۰ نمره

۳- در فرایند شاخه ای $\phi_n(s) = E(s^{X_n})$ تابع مولد احتمال‌های تعداد افراد در نسل n ام باشد، رابطه بازگشتی بین $\phi_n(s)$ و $\phi_{n+1}(s)$ (تابع مولد احتمال‌های تعداد افراد در نسل n ام و نسل $n+1$ ام) را بیابید.

۱.۲۰ نمره

۴- مفاهیم زیر را به طور واضح تعریف کنید:
توزیع مانا _ زنجیر مارکوف نادره ای _ زمان اصابت

۵- اگر ماتریس احتمال انتقال یک زنجیر مارکوف با فضای حالت $E = \{0, 1, 2\}$ به صورت زیر باشد:

الف: مطلوبست $f_0^{(3)}$

ب: اگر توزیع آغازین فرایند یکنواخت باشد، توزیع X_1 را به دست آورید.

$$P = \begin{bmatrix} \frac{4}{9} & 0 & \frac{5}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{5}{12} \\ \frac{5}{12} & 0 & \frac{7}{12} \end{bmatrix}$$

شماره سوال	پاسخ صحیح
۱	ب
۲	الف
۳	د
۴	ج
۵	الف
۶	د
۷	ج
۸	ب
۹	ب
۱۰	الف
۱۱	د
۱۲	ب
۱۳	ج
۱۴	ب
۱۵	د
۱۶	الف
۱۷	الف
۱۸	ج
۱۹	ب
۲۰	د
۲۱	الف
۲۲	د
۲۳	ب
۲۴	ج
۲۵	ب

۱- اگر S یک فضای نمونه و P تابع احتمال تعریف شده روی این فضا باشد، آنگاه دامنه P کدام است؟

۱. S
۲. مجموعه تمام زیرمجموعه های S
۳. تهی
۴. $[0,1]$

۲- فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع مولد احتمال $\Phi(s)$ و $E(X^2) = 15$ و $\Phi''(1) = 12$ باشند. در این صورت واریانس X کدام است؟

۱. 3
۲. 6
۳. 9
۴. 12

۳- اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، آنگاه مقدار ضریب همبستگی توابع نشانگر A و B کدام است؟

۱. صفر
۲. -1
۳. +1
۴. 0/5

۴- در فرایند $\{X_n, n \geq 1\}$ فرض کنید $X_6 = 15$ و $X_{17} = 22/5$ باشند در این صورت، نمو فرایند در فاصله 6 تا 17 کدام است؟

۱. 7/5
۲. 3/75
۳. 11/25
۴. 37/5

۵- در فرایند $\{X_t, t \geq 0\}$ به صورت $X_t = A \cos \pi t + B \sin \pi t$ فرض کنید A و B دو پیشامد مستقل با امید ریاضی یکسان صفر و واریانس یکسان σ^2 باشند. در این صورت کدام شرایط برقرار است؟

۱. مانای وسیع است.
۲. مانای اکید نیست.

۳. $C(s, t) = \sigma^2 \cos \pi(t - s)$
۴. همه موارد

۶- فرض کنید $\{X_t, t \geq 0\}$ یک فرایند حرکت براونی باشد، در این صورت کدام شرایط برقرار است؟

۱. X_t مانای اکید می باشد.
۲. X_t مانای وسیع می باشد.

۳. X_t دارای توزیع نرمال می باشد.
۴. X_t همواره مشتق پذیر است.

۷- اگر $\{N(t), t \geq 0\}$ یک فرایند پواسن با پارامتر 2 باشد. مقدار $P(N(6) - N(4) = 1)$ کدام است؟

۱. $2e^{-2}$
۲. $6e^{-6}$
۳. $4e^{-4}$
۴. e^{-1}

۸- اگر متغیر تصادفی X دارای ویژگی بیحافظگی و $P(X \leq 2) = 0/65$ باشد. آنگاه مقدار $P(X > 5 | X > 3)$ کدام است؟

۱. $0/35$ ۲. $0/45$ ۳. $0/55$ ۴. $0/65$

۹- اگر متغیر تصادفی X دارای توزیع احتمال کای دو با یک درجه آزادی باشد، آنگاه مقدار $\int_0^{\infty} P(X > x) dx$ کدام است؟

۱. صفر ۲. ۱ ۳. ۲ ۴. ۴

۱۰- در زنجیر ارنفست با $d = 5$ مهره، اگر توزیع آغازین یکنواخت باشد، آنگاه مقدار $P(X_1 = 2)$ کدام است؟

۱. صفر ۲. $\frac{2}{25}$ ۳. $\frac{2}{30}$ ۴. $\frac{7}{30}$

۱۱- اگر $\{X_n, n \geq 1\}$ یک زنجیر مارکف با فضای حالت $\{0, 1\}$ به طوریکه $\pi_1 = \pi_0 = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$ باشد. آنگاه مقدار $\pi_n(1)$ به ازای $n \geq 1$ کدام است؟

۱. $\frac{1}{2}$ ۲. $\frac{2}{5}$ ۳. $\frac{3}{5}$ ۴. $\frac{1}{5}$

۱۲- در فرایند قدم زدن تصادفی اینکه متحرک پس از ۲ واحد زمانی در نقطه ۲- قرار گیرد کدام است؟

۱. $r^2 + 2pq$ ۲. q^2 ۳. $3rq^2$ ۴. p^3

۱۳- فرض کنید زنجیر $\{X_n, n \geq 0\}$ با فضای حالت $\{1, 2, 3, 4\}$ دارای ماتریس احتمال انتقال زیر باشد. اگر π_0 دارای توزیع یکنواخت باشد. در این صورت مقدار $P(X_1 = 1)$ کدام است؟

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

۱. $\frac{1}{4}$ ۲. $\frac{1}{3}$ ۳. $\frac{3}{4}$ ۴. $\frac{2}{3}$

۱۴- فرض کنید زنجیر $\{X_n, n \geq 0\}$ با فضای حالت $\{0, 1\}$ دارای ماتریس احتمال انتقال زیر باشد. در این صورت مقدار $P_{01}^{(10)}$ کدام است؟

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

۱. $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ ۲. $\frac{1}{2}$ ۳. $\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$ ۴. $\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

۱۵- اگر حالت وضعیت x گذرا باشد. در این صورت کدام شرایط برقرار است؟

۱. $f_{xx} = 1$ ۲. $f_{xx} < 1$ ۳. $f_{xx} > 1$ ۴. با احتمال $1 - f_{xx}$ به x باز می گردد.

۱۶- زنجیر مارکف $\{X_n, n \geq 0\}$ با ماتریس احتمال انتقال زیر را در نظر بگیرید. در این صورت مقدار $P_{01}^{(2)}$ کدام است؟

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

۱. $\frac{2}{9}$ ۲. $\frac{3}{9}$ ۳. $\frac{4}{9}$ ۴. $\frac{5}{9}$

۱۷- در زنجیر ارنفست ساده با d مهره احتمال آنکه زنجیر در مرحله اول در وضعیت k باشد چیست؟

۱. $\frac{d+2}{d^2(d+1)}$ ۲. $\frac{d}{d^2(d+1)}$ ۳. $\frac{d+2}{d(d+1)}$ ۴. 1

۱۸- اگر $\{X_n, n \geq 0\}$ یک زنجیر مارکف همگن و Y یک حالت گذرا از فضای حالت‌های آن (E) باشد، در این صورت کدام رابطه برقرار است؟

۱. $\forall x \in E, E_x(N(y)) = \infty$
۲. $\exists x \in E, E_x(N(y)) = \infty$
۳. $\forall x \in E, E_x(N(y)) < \infty$
۴. $\exists x \in E, E_x(N(y)) < \infty$

۱۹- در مساله ورشکستگی قمارباز اگر $q > p$ باشد، در این صورت مقدار $\lim_{b \rightarrow \infty} \alpha_p$ (احتمال ورشکستگی شخص با سرمایه a) کدام است؟

۱. 1
۲. $\frac{p^a}{q}$
۳. $\left(\frac{p}{q}\right)^a$
۴. $\left(\frac{q}{p}\right)^a$

۲۰- فرض کنید ξ ، تعداد نوزادان هر فرد در زنجیر شاخه ایی دارای توزیع هندسی به صورت $P(\xi = k) = pq^k, k = 0, 1, 2, \dots$ باشد، در این صورت، احتمال انقراض کدام است؟

۱. $\frac{q}{p}$
۲. $\frac{p}{q}$
۳. $1 - \frac{p}{q}$
۴. $1 - \frac{q}{p}$

۲۱- در فرایند زاد و مرگ برای $x \geq 0$ ، فرض کنید $q_x = \frac{x+2}{2(x+1)}$ و $p_x = \frac{x}{2(x+1)}$ باشد، در این صورت زنجیر فرایند در چه وضعیتی قرار دارد؟

۱. تحویل ناپذیر و گذرا است.
۲. تحویل ناپذیر و بازگشتی است.
۳. یک حالت بازگشتی و در بقیه حالتها گذرا است.
۴. تحویل ناپذیر نیست.

۲۲- توزیع مانای زنجیر ارنفست کدام است؟

۱. برنولی
۲. دوجمله ای
۳. هندسی
۴. پاسکال

۲۳- شرط لازم و کافی برای اینکه یک زنجیر زمان-پیوسته یک زنجیر مارکف باشد کدام است؟

۱. توزیع T_x نمایی باشد.
۲. فضای حالت شمارا باشد.
۳. توزیع T_x غیر نمایی باشد.
۴. 1 و 2

۲۴- در یک زنجیر مارکف زمان-پیوسته با فضای حالت $\mathcal{V} = \{0, 1, 2, \dots\}$ فرض کنید $q_{xy} = \begin{cases} \lambda, & y = x + 1 \\ \mu, & y = 0 \end{cases}$ باشد، به ازای

$x \neq y$ ، مقدار q_{xx} کدام است؟

۱. $\lambda + \mu$
۲. $-(\lambda + \mu)$
۳. $\frac{-1}{\lambda + \mu}$
۴. $\frac{1}{\lambda + \mu}$

۲۵- در یک زنجیر مارکف زمان-پیوسته با فضای حالت $\mathcal{V} = \{0, 1, 2, \dots\}$ فرض کنید $q_{xy} = \begin{cases} \lambda, & y = x + 1 \\ \mu, & y = 0 \end{cases}$ باشد، به ازای

$y = x + 1$ ، مقدار Q_{xy} کدام است؟

۱. $\frac{1}{\lambda + \mu}$
۲. $\frac{\mu}{\lambda + \mu}$
۳. $\frac{\lambda}{\lambda + \mu}$
۴. $\frac{1}{2}$

سوالات تشریحی

۱.۲۰ نمره

۱- اگر $A_n \uparrow$ باشد، ثابت کنید $P\left(\bigcup_i A_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$.

۱.۲۰ نمره

۲- فرض کنید P ماتریس احتمال انتقال یک مرحله ای و π توزیع X_n باشد. در این صورت ثابت کنید به ازای هر $n \geq 1$ ، $\pi_n = \pi_{n-1}P$.

۱.۲۰ نمره

۳- فرض کنید تعداد نوزادان هر فرد در زنجیر شاخه ایی به صورت تابع مولد $\varphi(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}s + \frac{1}{8}s^2 + \frac{2}{8}s^3$ باشد. در این صورت، احتمال انقراض را بدست آورید.

ماتریس احتمالات انتقال $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ و توزیع آغازین زیر باشد:

$\Pi_0(x)$	0	1	2
	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$

الف. توزیع X_1 را بدست آورید.

ب. مقدار $P(X_2 = 1 | X_0 = 1)$ را محاسبه کنید.

۵- در زنجیر مارکف زمان پیوسته با فضای حالت $E = \{0, 1, 2\}$ که توزیع مانای آن در رابطه

$$\frac{\Pi(y-1)}{\Pi(y)} = \frac{\lambda + \mu}{\lambda}, \quad y \neq 0$$

صادق است، توزیع کلی مانای زنجیر را بدست آورید.

ياشيخ صحيح
شماره
سواب

- | | |
|----|-----|
| 1 | الف |
| 2 | ب |
| 3 | الف |
| 4 | الف |
| 5 | د |
| 6 | ج |
| 7 | ج |
| 8 | الف |
| 9 | ب |
| 10 | د |
| 11 | ب |
| 12 | ب |
| 13 | الف |
| 14 | ب |
| 15 | ب |
| 16 | د |
| 17 | ج |
| 18 | ج |
| 19 | د |
| 20 | ب |
| 21 | الف |
| 22 | ب |
| 23 | الف |
| 24 | ب |
| 25 | ج |