

عنوان درس: مبانی جبر

۱- کدام گزینه همواره صحیح است؟

۱. هر نیم گروه یک تکواره است.
۲. هر گروه‌واره یک نیم گروه است.
۳. هر گروه‌واره یک تکواره است.
۴. هر تکواره یک نیم گروه است.

۲- جدول کیلی بیانگر کدام عمل روی هر مجموعه دلخواه ناتهی است؟

۱. عمل 0-تایی
۲. عمل 3-تایی
۳. عمل 2-تایی
۴. عمل یکانی

۳- کدام یک از مجموعه‌های زیر با توجه به عمل تعریف شده یک گروه می‌باشد؟

۱. $\mathbb{Z} - \{0\}$ با عمل ضرب معمولی
۲. $\{1, -1\}$ با عمل جمع معمولی
۳. $G = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ با عمل جمع اعداد
۴. $G = \{q \in \mathbb{Q} \mid q > 1\}$ با عمل ضرب اعداد

۴- یک نیم گروه مانند $(S, *)$ یک گروه است اگر و تنها اگر

۱. قوانین حذف در $(S, *)$ برقرار باشند.
۲. به ازای هر $a \in S$ عنصر $b \in S$ وجود داشته باشد به طوری که $b * a = e$.
۳. عنصر $e \in S$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $a \in S$ ، $e * a = a$.
۴. برای هر $a, b \in S$ معادلات $a * x = b$ و $y * a = b$ دارای جواب در S باشند.

۵- تعداد گروه‌های از مرتبه 4 کدام گزینه است؟

۱. تعداد نامتناهی گروه از مرتبه 4 وجود دارد.
۲. تنها یک گروه از مرتبه 4 وجود دارد، $\mathbb{Z}_4$.
۳. تنها یک گروه از مرتبه 4 وجود دارد، K_4 .
۴. تنها دو گروه از مرتبه 4 وجود دارد.

۶- وارون جایگشت $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ در کدام گزینه است؟

۱. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
۲. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$
۳. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
۴. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

۷- فرض کنید G یک گروه و H یک زیرگروه ناتهی از G باشد. در این صورت $H \leq G$ است هرگاه

۱. به ازای هر $a, b \in H$ ، $ab \in H$
۲. به ازای هر $a, b \in H$ ، $ab^{-1} \in H$
۳. به ازای هر $a \in H$ ، $a^{-1} \in H$ و $e \in H$
۴. به ازای هر $a, b \in H$ ، $ab \in H$ و $a^{-1} \in H$

۸- کدام گزینه زیرگروهی از گروه چهارتایی کلاین $K = \{e, a, b, c\}$ است؟

۱. $\{e, a, b\}$ ۲. $\{e, b, c\}$ ۳. $\{b, c\}$ ۴. $\{e, a\}$

۹- کدام گزینه همواره صحیح است؟

۱. هر گروه آبلی، دوری است.

۲. گروه جمعی Q دوری است.

۳. هر زیرگروه یک گروه دوری، دوری است.

۴. اگر G گروه دوری باشد، آنگاه G تنها یک عنصر از مرتبه 2 دارد.

۱۰- اگر G گروهی از مرتبه 21 باشد، آنگاه کدام یک از گزینه‌های زیر می‌تواند مرتبه یکی از زیرگروه‌هایش باشد؟

۱. 12 ۲. 8 ۳. 7 ۴. 5

۱۱- فرض کنید $G = \langle a \rangle$ یک گروه دوری باشد که در آن $o(a) = 24$. کدام گزینه صحیح است؟

۱. $G \cong K_4$ ۲. $G \cong Z_{18}$ ۳. $G \cong S_4$ ۴. $G \cong Q$

۱۲- کوچکترین گروه غیر آبلی از مرتبه چند است؟

۱. 4 ۲. 5 ۳. 6 ۴. 7

۱۳- در گروه جمعی $(Z_{30}, \oplus)$ شاخص زیرگروه $H = \langle \bar{6} \rangle$ در Z_{30} کدام گزینه است؟

۱. 10 ۲. 6 ۳. 3 ۴. 5

۱۴- کدام گزینه همواره صحیح است؟

۱. اگر $H \leq G$ و $K \triangleleft G$ ، آنگاه $HK \leq G$.

۲. اگر $H \leq G$ و $K \leq G$ ، آنگاه $HK \leq G$.

۳. اگر $H \leq G$ و $K \leq G$ ، آنگاه $H \cup K \leq G$.

۴. اگر $H \leq G$ و $K \triangleleft G$ ، آنگاه $HK \triangleleft G$.

۱۵- $\frac{4Z}{12Z}$ با کدام گزینه یکرخت است؟

۱. Z_4 ۲. Z_3 ۳. Z_{12} ۴. Z_6

۱۶- در گروه Z_{15} ، حاصل $\langle \bar{3} \rangle \cap \langle \bar{5} \rangle$ کدام گزینه است؟

۱. $\langle \bar{15} \rangle$ ۲. $\{0\}$ ۳. $\langle \bar{3} \rangle$ ۴. Z_{15}

۱۷- کدام گزینه در مورد مجموعه $2Z = \{2k \mid k \in Z\}$ با اعمال جمع و ضرب معمول اعداد صحیح است؟

۱. یک حلقه ناجابجایی و یکدار است.
۲. یک حلقه جابجایی و یکدار است.
۳. یک حلقه جابجایی و غیر یکدار است.
۴. یک حلقه ناجابجایی و غیر یکدار است.

۱۸- کدام گزینه در مورد حلقه اعداد صحیح Z ، صحیح است؟

۱. یک حوزه صحیح و میدان است.
۲. یک حلقه تقسیم است.
۳. یک حوزه صحیح است اما میدان نیست.
۴. یک حلقه تقسیم است اما میدان نیست.

۱۹- در حلقه Z_{18} تعداد مقسوم علیه‌های صفر کدام گزینه است؟

۱. 6
۲. 11
۳. 13
۴. 12

۲۰- کدام گزینه همواره صحیح است؟

۱. هر ایده‌آل یک حلقه، زیرحلقه‌ای از آن است.
۲. هر زیرحلقه از یک حلقه، ایده‌آلی از آن است.
۳. $2Z + 3Z$ یک ایده‌آل اصلی از Z است.
۴. $2Z \cup 3Z$ یک ایده‌آلی از Z است.

سوالات تشریحی

۱- ثابت کنید اشتراک دو زیر گروه از گروه دلخواه G همیشه زیر گروه G است. در ادامه مرکز یک گروه را تعریف کنید و نشان دهید مرکز یک گروه، زیرگروهی آبلی از آن است.

۲- فرض کنید G یک گروه متناهی و H یک زیر گروه آن باشد. در این صورت $|H| \mid |G|$.

۳- نشان دهید هر گروه دوری، آبلی است. با یک مثال نشان دهید عکس این قضیه برقرار نیست.

۴- فرض کنید I, J ایده‌آل‌های چپ حلقه R باشند. در این صورت $I \cup J$ ایده‌آلی از R است اگر و تنها اگر $I \subseteq J$ یا $J \subseteq I$.

۵- فرض کنید $f: R \rightarrow S$ یک همریختی حلقه‌ای باشد. در این صورت f یک به یک است اگر و تنها اگر $\text{Ker}(f) = \{0\}$.

شماره
سوال پاسخ صحیح

1 د

2 ج

3 ج

4 د

5 د

6 الف

7 ب

8 د

9 ج

10 ج

11 ج

12 ج

13 ب

14 الف

15 ب

16 ب

17 ج

18 ج

19 د

20 الف

۱- کدام گزینه یک نیم گروه است؟

۱. $(Z, -)$ ۲. $(R, +)$ ۳. $(Z, \div)$ ۴. $(R, \div)$

۲- کدام گزینه یک گروهوار است؟

۱. $(Z, \div)$ ۲. $(N, -)$ ۳. $(R, \div)$ ۴. $(N, +)$

۳- فرض کنید p مجموعه گزاره های دو شرطی باشد. در این صورت جبر جامع $(P, \wedge, \vee, \sim, T, F)$ از کدام نوع است؟

۱. $(2, 2, 1, 0, 0)$ ۲. $(2, 2, 1, 1, 0)$ ۳. $(2, 1, 1, 1, 0)$ ۴. $(2, 2, 2, 1, 0)$

۴- عبارت $(xyx^{-1})^{-1}$ در گروه G با کدام گزینه برابر است؟

۱. xyx^{-1} ۲. $x^{-1}yx^{-1}$ ۳. $xy^{-1}x^{-1}$ ۴. $xy^{-1}x$

۵- به ترتیب از سمت راست تعداد گروه های از مرتبه 4 و 5 عبارت است از

۱. 2,2 ۲. 2,1 ۳. 1,2 ۴. 1,1

۶- حاصل ترکیب دورهای $(1347)(235) \in S_7$ کدام است؟

۱. (123547) ۲. (1236547) ۳. (1235746) ۴. (135247)

۷- کدام گزینه نادرست است؟

۱. گروه دو وجهی از درجه سه، شش عضو دارد.
۲. گروه S_3 گروهی آبلی است.
۳. معکوس هرترانهمش خودش است.
۴. به ازای $n \geq 1$ ، $|S_n| = n!$

۸- اگر G گروهی از مرتبه 78 باشد و $a \in G$ ، آنگاه کدام گزینه زیر با $o(a)$ می تواند برابر باشد؟

۱. 4 ۲. 12 ۳. 18 ۴. 13

۹- مرتبه زیرگروه های یک گروه دوری از مرتبه 20 کدام گزینه است؟

۱. $1, 2, 4, 5, 10, 20$ ۲. $1, 2, 4, 6, 8, 10, 20$ ۳. $1, 4, 6, 8, 10, 20$ ۴. $1, 2, 6, 8, 10, 20$

۱۰- کدام گزینه صحیح است؟

۱. گروه جمعی Q دوری است.
۲. کوچک ترین گروه غیرآبلی از مرتبه ۸ است.
۳. هرگروه آبلی دوری است.
۴. رتبه هر عضو غیرصفر درگروه جمعی Z نامتناهی است.

۱۱- کدام گزینه لزوماً درست نیست؟

۱. $o(ab) = o(b^{-1}a^{-1})$
۲. $o(a) = o(bab^{-1})$
۳. $o(ab) = o(ba)$
۴. $o(a) = o(a^2)$

۱۲- کدام گزینه صحیح است؟

۱. هر گروه دوری از مرتبه ۶ با Z_6 یکرخت است.
۲. هر گروه دوری از مرتبه ۶ با S_3 یکرخت است.
۳. هر گروه دوری از مرتبه ۶ با D_6 یکرخت است.
۴. گروه جمعی Z بی نهایت مولد دارد.

۱۳- کدام گزینه صحیح است؟

۱. $2Z \cup 3Z$ زیرگروه Z (با عمل جمع) است.
۲. اشتراک دو زیرگروه از یک گروه، یک زیرگروه آن گروه است.
۳. گروه چهارتایی کلاین دقیقاً ۴ زیرگروه دارد.
۴. مرکز گروه S_3 دو عضو دارد.

۱۴- در گروه جمعی Z_{30} شاخص زیرگروه $H = \langle \bar{3} \rangle$ کدام است؟

۱. ۲
۲. ۳
۳. ۴
۴. ۵

۱۵- گروه $Z_2 \times Z_3$ با کدام گروه زیر یکرخت است؟

۱. D_6
۲. Z
۳. S_3
۴. Z_6

۱۶- مقدار $[S_5 : A_5]$ برابر است با

۱. ۶
۲. ۵
۳. ۲
۴. ۱۲

۱۷- گروه $\frac{6Z}{3Z}$ با کدام یک از گروه های زیر یکرخت است؟

۱. Z_6
۲. Z_3
۳. Z_2
۴. Z_{12}

۱۸- کدام گزینه در مورد حلقه $(6Z, +, \cdot)$ صحیح است؟

۱. جابجایی است ولی یکدار نیست.
۲. جابجایی و یکدار نیست.
۳. جابجایی و یکدار است.
۴. جابجایی نیست ولی یکدار است.

۱۹- کدام گزینه صحیح است؟

۱. Z یک ایده آل Q است.
۲. هر حوزه صحیح یک میدان است.
۳. Z یک حوزه صحیح است.
۴. حلقه Z دارای ایده آل بیشینه ای است که اول نیست.

۲۰- کدام گزینه در مورد حلقه Z درست نیست؟

۱. $2Z \cap 3Z$ ایده آلی از Z است.
۲. $2Z + 3Z$ ایده آلی از Z است.
۳. $(2Z)(3Z)$ ایده آلی از Z است.
۴. $2Z \cup 3Z$ ایده آلی از Z است.

سوالات تشریحی

۱- فرض کنید G گروهی دوری و غیربدیهی از مرتبه n باشد. ثابت کنید به ازای هر عدد صحیح مثبت m ، که $m \mid n$ گروه G دارای زیرگروه منحصر به فرد از مرتبه m است.

۲- ثابت کنید اشتراک دو زیرگروه از گروه دلخواه G همیشه زیرگروه G است. در ادامه مرکز یک گروه را تعریف کنید و نشان دهید مرکز یک گروه، زیرگروهی آبدلی از آن است.

۳- (قضیه اول یکرختی گروه ها) فرض کنیم G و K دو گروه و $f: G \rightarrow K$ یک همریختی گروهی باشد. نشان دهید

$$\frac{G}{\text{Ker} f} \cong \text{Im} f \quad (\text{منظور از } \text{Ker} f \text{ هسته } f \text{ و } \text{Im} f \text{ تصویر گروه } G \text{ تحت } f \text{ است}).$$

۴- مفاهیم ایده آل، ایده آل اول و ایده آل ماکسیمال (بیشینه) را تعریف کنید و نشان دهید حلقه $\frac{Z}{6Z}$ قلمرو صحیح نیست.

۵- نشان دهید دو حلقه $2Z$ و $3Z$ با هم یکرخت نیستند.

شماره سوال	پاسخ صحيح
1	ب
2	د
3	الف
4	ج
5	ج
6	د
7	ب
8	د
9	الف
10	د
11	د
12	الف
13	ب
14	ب
15	د
16	ج
17	ب
18	الف
19	ج
20	د

۱- فرض کنید A یک مجموعه ناتهی باشد. در این صورت A^0 کدام است؟

۱. $\{\emptyset\}$ ۲. A ۳. $\emptyset$ ۴. $\{A\}$

۲- کدام گزینه درست نیست؟

۱. هر جبر جامع از نوع 2 یک نیم گروه است.
۲. هر نیم گروه یک گروه واره است.
۳. هر گروه واره که خاصیت شرکت پذیری را هم داشته باشد، یک نیم گروه است.
۴. هر گروه واره یک جبر جامع از نوع 2 است.

۳- وارون عنصر $\bar{5}$ در گروه $(Z_7, \oplus)$ کدام است؟

۱. $\bar{1}$ ۲. $\bar{2}$ ۳. $\bar{3}$ ۴. $\bar{4}$

۴- به ترتیب گروه های از مرتبه 2 و 4 عبارتند از:

۱. 1 و 2 ۲. 2 و 1 ۳. 1 و 1 ۴. 2 و 2

۵- حاصل ترکیب دوره های $(1\ 3\ 6\ 7)(2\ 4\ 5\ 3)$ در S_7 کدام است؟

۱. $(1\ 3\ 2\ 4\ 5\ 6\ 7)$ ۲. $(1\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)$ ۳. $(1\ 3\ 2\ 4\ 5\ 6)$ ۴. $(1\ 2\ 4\ 5\ 6\ 7)$

۶- کدام گزینه با جایگشت زیر برابر است؟

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 8 & 6 & 1 & 5 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix} \in S_8$$

۱. $(8\ 3\ 6\ 4\ 1\ 2)$ ۲. $(4\ 2\ 8\ 3\ 6\ 1)$ ۳. $(1\ 2\ 4\ 3\ 6\ 8)$ ۴. $(3\ 2\ 8\ 1\ 6\ 4)$

۷- کدام گروه به طور متناهی تولید شده نیست؟

۱. گروه جمعی اعداد گویا
۲. گروه متقارن از درجه 3
۳. گروه چهارتایی کلاین
۴. هر زیر گروه از گروه جمعی اعداد صحیح

۸- کدام یک زیرگروهی از گروه جمعی Z_6 نیست؟

۱. $\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{3}\}$ ۲. $\{\bar{0}, \bar{2}\}$ ۳. $\{\bar{0}, \bar{3}\}$ ۴. $\{\bar{0}\}$

۹- تمام مولدهای گروه $G = \langle a \rangle$ که در آن $o(a) = 5$ عبارتند از:

۱. a, a^2, a^3, a^4 ۲. a, a^3 ۳. a, a^2 ۴. e, a, a^2, a^3, a^4

۱۰- کدام گزینه نادرست است؟

۱. $Z \cong Z_n$ ۲. $R \cong R^+$ ۳. $Z_n \cong \frac{Z}{nZ}$ ۴. $Z \cong nZ$

۱۱- مرتبه کوچک ترین گروه غیرآبلی چند است؟

۱. 6 ۲. 4 ۳. 3 ۴. 8

۱۲- فرض کنید G یک گروه و H یک زیرگروه از آن باشد. اگر G از مرتبه 30 و H از مرتبه 15 باشد، تعداد هم مجموعه های چپ H در G برابر است با:

۱. 2 ۲. 5 ۳. 15 ۴. 1

۱۳- کدام گزینه درست است؟

۱. زیرگروه متناوب A_n یک زیرگروه نرمال از گروه متقارن S_n است.
۲. همواره شاخص هر زیرگروه نرمال در یک گروه برابر 2 است.
۳. زیرگروه دوری تولید شده توسط $\tau = (2\ 3)$ در S_3 نرمال است.
۴. هر زیرگروه از گروه جمعی اعداد صحیح یک زیرگروه نرمال است.

۱۴- مرتبه گروه $(Z/12Z) / (3Z/12Z)$ برابر است با:

۱. 3 ۲. 12 ۳. 4 ۴. 2

۱۵- فرض کنید $H = \langle \bar{2} \rangle$ و $K = \langle \bar{3} \rangle$ زیرگروه های گروه جمعی Z_6 باشند. در این صورت $H \cap K$ برابر است با:

۱. $\{\bar{0}\}$ ۲. $\langle \bar{6} \rangle$ ۳. $\langle \bar{12} \rangle$ ۴. $\langle \bar{1} \rangle$

۱۶- در حلقه $Z \oplus Z_6$ کدام گزینه درست است؟

۱. یک حلقه متناهی است.
۲. یک حلقه جابجایی و یکدار است.
۳. عنصر واحد آن $(1, \bar{1})$ است.
۴. عنصر خنثی آن $(0, \bar{0})$ است.

۱۷- کدام گزینه در حلقه $(Z_6, \oplus, \sqcup)$ درست است؟

۱. $\overline{3}$ یک مقسوم علیه صفر است.
۲. $\overline{5}$ یک مقسوم علیه صفر است.
۳. $\overline{5}$ یک یکال نیست.
۴. $\overline{2}$ یک یکال است.

۱۸- کدام گزینه درست است؟

۱. اشتراک هر دو ایده آل، یک ایده آل است.
۲. هر زیرحلقه از یک حلقه یکدار، یکدار است.
۳. هر زیرحلقه از یک حلقه، یک ایده آل است.
۴. اجتماع هر دو ایده آل، یک ایده آل است.

۱۹- کدام گزینه درست است؟

۱. $\frac{Z}{Z_6}$ یک میدان است.
۲. $\frac{Z}{6Z}$ یک میدان است.
۳. $\frac{Z}{4Z}$ یک حوزه صحیح است.
۴. $\frac{Z}{8Z}$ یک حوزه صحیح است.

۲۰- کدام گزینه در حلقه $R[x]$ درست نیست؟

۱. اگر R یک میدان باشد، آنگاه $R[x]$ میدان است.
۲. اگر R یک حوزه صحیح باشد، آنگاه $R[x]$ حوزه صحیح است.
۳. اگر R یک حلقه جابجایی باشد، آنگاه $R[x]$ جابجایی است.
۴. اگر R یک حلقه یکدار باشد، آنگاه $R[x]$ یکدار است.

سوالات تشریحی

۱- ثابت کنید هر زیرگروه یک گروه دوری، دوری است.

۲- ثابت کنید هر گروه دلخواه G با زیرگروهی از S_G یکرخت است.

۳- جایگشت های زیر را در S_6 در نظر بگیرید:

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

الف) وارون جایگشت τ را بدست آورید.

ب) حاصل $\sigma\tau^{-1}\sigma$ را بدست آورید.

۴- قضیه دوم یکرختی گروه ها را بیان و اثبات کنید.

۱.۲۰ نمره

۱.۲۰ نمره

۱.۲۰ نمره

۱.۲۰ نمره

باسخ صحيح	شماره سوال
الف	1
الف	2
الف	3
الف	4
الف	5
الف	6
الف	7
الف	8
الف	9
الف	10
الف	11
الف	12
الف	13
الف	14
الف	15
الف	16
الف	17
الف	18
الف	19
الف	20

۱- فرض کنیم X یک مجموعه ناتهی و دل خواه باشد. در این صورت جبر جامع $(P(X), \cup, \cap, c, \phi, X)$ از کدام نوع است؟

۱. $(0,0,1,2,2)$ ۲. $(0,0,2,2,2)$ ۳. $(2,2,1,0,0)$ ۴. $(2,2,2,0,0)$

۲- جدول کیلی بیان گر کدام عمل روی هر مجموعه است؟

۱. عمل 0 -تایی ۲. عمل یکانی ۳. عمل 2 -تایی ۴. عمل 3 -تایی

۳- فرض کنیم X یک مجموعه دل خواه باشد. در این صورت کدام گزینه یک گروه‌واره نیست؟

۱. $(P(X), \cap)$ ۲. $(P(X), \cup)$ ۳. $(P(X), \setminus)$ ۴. $(P(X), c)$

۴- کدام گزینه یک نیم گروه است؟

۱. $(Z, -)$ ۲. $(Z, +)$ ۳. $(Q^c, \cdot)$ ۴. $(Z, \div)$

۵- کدام گزینه درست نیست؟

۱. $Z - \{0\}$ یک گروه آبلی با عمل ضرب معمولی اعداد است.

۲. $Q - \{0\}$ یک گروه آبلی با عمل ضرب معمولی اعداد است.

۳. $R - \{0\}$ یک گروه آبلی با عمل ضرب معمولی اعداد است.

۴. $C - \{0\}$ یک گروه آبلی با عمل ضرب معمولی اعداد است.

۶- فرض کنیم G یک گروه، a و b دو عضو از این گروه و m و n دو عدد صحیح باشند. در این صورت کدام گزینه درست نیست؟

۱. $(a^{-1})^{-1} = a$ ۲. $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ ۳. $a^m a^n = a^{m+n}$ ۴. $(a^m)^n = a^{mn}$

۷- فرض کنیم $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ و $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. حاصل ترکیب $f \circ g$ کدام گزینه است؟

۱. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ۲. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ۳. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ ۴. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

۸- کدام گزینه درست است؟

۱. هر زیرگروه نابديهی از یک گروه نامتناهی، نامتناهی است.
۲. هر گروه متناهی، تعداد متناهی زیرگروه دارد.
۳. یک گروه آبلی است اگر و تنها اگر مرکز آن با خود گروه برابر نباشد.
۴. اجتماع دو زیرگروه از یک گروه، یک زیرگروه آن گروه است.

۹- کدام گزینه درست نیست؟

۱. مجموعه اعداد گویا Q یک گروه به طور متناهی تولید شده است.
۲. S_3 دارای یک مجموعه مولد متناهی است.
۳. گروه چهارتایی کلاین K_4 یک گروه به طور متناهی تولید شده است.
۴. تمام زیرگروه های Z به طور متناهی تولید شده اند.

۱۰- کدام گزینه درست است؟

۱. هر گروه آبلی، یک گروه دوری است.
۲. هر زیرگروه یک گروه دوری، خود یک گروه دوری است.
۳. عناصر غیرخنثی از یک گروه دوری نامتناهی، می توانند رتبه متناهی داشته باشند.
۴. زیرگروه های نابديهی از یک گروه دوری نامتناهی، می توانند متناهی باشند.

۱۱- کدام گزینه درست است؟

۱. هر دو گروه دوری با مرتبه های برابر (متناهی یا نامتناهی) با هم یکرخت هستند.
۲. هر دو گروه دوری با هم یکرخت هستند.
۳. هر دو گروه دوری متناهی با هم یکرخت هستند.
۴. هر دو گروه دوری نامتناهی با هم یکرخت هستند.

۱۲- کوچک ترین گروه غیر آبلی چند عضو دارد؟

۴ . 10

۳ . 8

۲ . 6

۱ . 4

۱۳- کدام گزینه درست نیست؟

۱. $[S_4 : A_4] = 2$

۲. $A_4 \triangleleft S_4$

۳. A_4 زیرگروهی از مرتبه 9 دارد.

۴. A_4 زیرگروهی از مرتبه 12 دارد.

۱۴- گروه $(Z/8Z)/(4Z/8Z)$ با کدام گروه یکریخت است؟

۱. Z_4

۲. $Z/2Z$

۳. Z_2

۴. Z_8

۱۵- گروه $Z_3 \times Z_2$ با کدام گروه یکریخت است؟

۱. Z_{12}

۲. Z

۳. Z_6

۴. Z_4

۱۶- کدام گزینه در خصوص حلقه $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ درست است؟

۱. یکدار است و جابه‌جایی نیز است.

۲. یکدار است ولی جابه‌جایی نیست.

۳. یکدار نیست ولی جابه‌جایی است.

۴. یکدار نیست و جابه‌جایی نیز نیست.

۱۷- کدام گزینه درست نیست؟

۱. هر میدان یک حوزه صحیح است.

۲. هر حوزه صحیح متناهی یک میدان است.

۳. هر حوزه صحیح یک میدان است.

۴. هر میدان متناهی یک حوزه صحیح است.

۱۸- فرض کنیم I و J دو ایده‌آل از حلقه R باشند. در این صورت کدام گزینه درست نیست؟

۱. $I \cap J$ ایده‌آلی از R است.

۲. $I \cup J$ ایده‌آلی از R است.

۳. $I + J$ ایده‌آلی از R است.

۴. IJ ایده‌آلی از R است.

۱۹- کدام گزینه در خصوص حلقه اعداد صحیح Z درست است؟

۱. هر ایده‌آل اول آن، یک ایده‌آل ماکسیمال است.

۲. تعداد متناهی ایده‌آل ماکسیمال دارد.

۳. تعداد متناهی ایده‌آل اول دارد.

۴. دارای ایده‌آل ماکسیمالی است که اول نیست.

۲۰- فرض کنیم R یک حلقه جابه‌جایی و یک‌دار، I یک ایده‌آل از R ، P یک ایده‌آل اول از R و M یک ایده‌آل ماکسیمال از R باشد. در این صورت کدام گزینه درست نیست؟

۱. $I[x]$ یک ایده‌آل از حلقه $R[x]$ است.

۲. $\left(\frac{R}{I}\right)[x] \cong \frac{R[x]}{I[x]}$

۳. $P[x]$ یک ایده‌آل اول از حلقه $R[x]$ است.

۴. $M[x]$ یک ایده‌آل ماکسیمال از حلقه $R[x]$ است.

سوالات تشریحی

- ۱- نشان دهید هر گروه دوری، آبلی است. ۱.۲۰ نمره
- ۲- قضیه لاگرانژ را بیان و اثبات نمایید. ۱.۲۰ نمره
- ۳- قضیه دوم یکرختی گروه‌ها را بیان و اثبات نمایید. ۱.۲۰ نمره
- ۴- فرض کنیم p یک عدد صحیح مثبت باشد. در این صورت ثابت کنید Z_p یک میدان است اگر و تنها اگر p یک عدد اول باشد. ۱.۲۰ نمره
- ۵- فرض کنیم R یک حلقه جابه‌جایی یک‌دار و P یک ایده‌آل از R باشد. در این صورت نشان دهید P ایده‌آل اول R است اگر و تنها اگر $\frac{R}{P}$ یک حوزه صحیح باشد. ۱.۲۰ نمره

شماره سوال	پاسخ صحيح
1	ج
2	ج
3	د
4	ب
5	الف
6	ب
7	الف
8	ب
9	الف
10	ب
11	الف
12	ب
13	ج
14	الف
15	ج
16	ج
17	ج
18	ب
19	الف
20	د

۱- کدام یک از اعمال زیر روی مجموعه اعداد طبیعی یک عمل دوتایی است؟

۱. $a * b = a - b$ ۲. $a * b = a \div b$ ۳. $a * b = a^b$ ۴. $a * b = a^{a-b}$

۲- فرض کنید X یک مجموعه باشد. گروه $(P(X), \Delta)$ که در آن Δ تفاضل متقارن روی $P(X)$ است را در نظر بگیرید. فرض کنید $A \in P(X)$ باشد. وارون A کدام یک از گزینه های زیر است؟

۱. $\emptyset$ ۲. A ۳. X ۴. $X - A$

۳- کدام گزینه صحیح است؟

۱. مجموعه اعداد صحیح با عمل دوتایی $x * y = x$ عضو همانی دو طرفه دارد.
۲. مجموعه ماتریس های 2×2 با درایه های حقیقی تحت ضرب ماتریس ها یک گروه است.
۳. مجموعه اعداد حقیقی مثبت تحت جمع یک گروه است.
۴. مجموعه $\{-1, 1\}$ تحت عمل ضرب یک گروه است.

۴- فرض کنید G یک گروه و $x \in G$ باشد. اگر $o(x) = n$ آنگاه $o(x^m)$ کدام یک از گزینه های زیر است؟

۱. n ۲. $\frac{n}{m}$ ۳. $\frac{m}{n}$ ۴. $\frac{n}{d}$ که در آن $d = (m, n)$

۵- تعداد مولد های گروه $(Z_{14}, \oplus)$ عبارت است از:

۱. ۱۴ ۲. ۷ ۳. ۶ ۴. ۲

۶- تعداد زیرگروه های $(Z_{20}, \oplus)$ عبارت است از

۱. ۶ ۲. ۲۰ ۳. ۴ ۴. ۵

۷- مرتبه عضو $(\bar{2}, \bar{3}, \bar{2})$ در $Z_4 \times Z_9 \times Z_{20}$ برابر است با:

۱. ۱ ۲. ۱۲ ۳. ۳۰ ۴. ۷۲۰

۸- کدام یک از گروه های زیر دوری است؟

۲. $Z_2 \times Z_3$

۱. $Z_{10} \times Z_7 \times Z_{15}$

۴. Q

۳. K_4

۹- کدام یک از جایگشت های زیر در S_5 یک جایگشت فرد است؟

۴. (2345)

۳. (325)

۲. جایگشت همانی

۱. (12345)

۱۰- تعداد هم مجموعه های یک زیرگروه ۸ عضوی از یک گروه ۲۴ عضوی کدام است؟

۴. ۱

۳. ۲۴

۲. ۸

۱. ۳

۱۱- تجزیه جایگشت $\begin{pmatrix} 12345678 \\ 42761835 \end{pmatrix}$ به صورت حاصل ضرب دورهای از هم جدا کدام است؟

۴. (37)(85)

۳. (142)(37)(85)

۲. (37)(1468)

۱. (14685)(37)

۱۲- گروه G را در نظر بگیرید. کدام گزینه نادرست است؟

۲. $Z(G)$ همواره یک زیرگروه نرمال G است.

۱. هر زیرگروه از $Z(G)$ در G نرمال است.

۴. اگر هر زیرگروه از G نرمال باشد آنگاه G آبلی است.

۳. اگر G آبلی باشد آنگاه هر زیرگروه آن نرمال است.

۱۳- فرض کنید $\varphi: G \rightarrow H$ یک همسانی باشد. در این صورت کدام گزینه در حالت کلی نادرست است؟

۱. $\varphi(e_G) = e_H$

۲. برای هر $x \in G$ و هر عدد صحیح n ، $\varphi(x^n) = (\varphi(x))^n$

۳. اگر $o(x) = n$ آنگاه $o(\varphi(x)) \mid n$

۴. برای هر $x \in G$ ، $o(\varphi(x)) = o(x)$

۱۴- فرض کنید $\varphi: G \rightarrow K$ یک همسانی گروهی باشد. کدام گزینه در حالت کلی برقرار نیست؟ ($\varphi^{-1}(J)$ تصویر معکوس J تحت نگاشت φ است.)

۲. اگر $J \triangleleft K$ آنگاه $\varphi^{-1}(J) \triangleleft G$

۱. اگر $H \leq G$ آنگاه $\varphi(H) \leq K$

۴. اگر $J \leq K$ آنگاه $\varphi^{-1}(J) \leq G$

۳. اگر $H \triangleleft G$ آنگاه $\varphi(H) \triangleleft K$

۱۵- فرض کنید G گروهی از مرتبه ۱۵، H زیرگروهی از مرتبه ۳ و K زیرگروه نرمال از مرتبه ۵ باشد. کدام گزینه نادرست است؟

۱. $|HK|=15$ ۲. $G \cong HK$ ۳. $H \cap K = \{e\}$ ۴. $|HK|=1$

۱۶- در مورد گروه $G = Z_2 \times Z_2$ کدام گزینه صحیح است؟

۱. $G \cong Z_4$ ۲. گروه G تنها یک زیرگروه از مرتبه دو دارد.
۳. گروه G سه زیرگروه از مرتبه دو دارد. ۴. $G \cong Z_2 + Z_2$

۱۷- حلقه بخشی حلقه ای است یک دار $(1 \neq 0)$ که

۱. مقسوم علیه صفر غیر بدیهی نداشته باشد.
۲. جابجایی باشد.
۳. مرتبه اش توانی از یک عدد اول باشد.
۴. هر عضو غیر صفر آن یک یکه باشد.

۱۸- برای قلمرو صحیح R و ایده آل I از R کدام گزینه نادرست است؟

۱. $\frac{R}{I}$ تعویض پذیر است.
۲. $\frac{R}{I}$ دارای عنصر یکه است.
۳. $\frac{R}{I}$ قلمرو صحیح است.
۴. $\frac{R}{I}$ میدان است هرگاه I ایده آل ماکزیمال R باشد.

۱۹- فرض کنید $\varphi: R \rightarrow T$ یک همسانی و S ایده آلی از R باشد. در این صورت

۱. همواره $\varphi(S)$ ایده آل T است.
۲. اگر φ یک به یک باشد آنگاه $\varphi(S)$ ایده آل T است.
۳. اگر φ پوشا باشد آنگاه $\varphi(S)$ ایده آل T است.
۴. برای آن که $\varphi(S)$ ایده آل T باشد لازم است که φ دوسویی باشد.

۲۰- فرض کنید R یک حلقه باشد. کدام گزینه صحیح است؟

۱. R را می توان در یک حوزه صحیح نشانند.
۲. R را می توان در حلقه ای با عضو یکه نشانند.
۳. R را می توان در یک میدان نشانند.
۴. R را می توان در یک حلقه بخشی نشانند.

سوالات تشریحی

۱.۲۰ نمره

۱- نشان دهید هر زیرگروه یک گروه دوری، دوری است. در ادامه همه زیرگروه های $(\mathbb{Z}_{12}, \oplus)$ را با مولدهای مربوطه مشخص نمایید.

۱.۲۰ نمره

۲- ثابت کنید هر گروه از مرتبه عدد اول p دوری است.

۱.۲۰ نمره

۳- همریختی $\varphi: S_n \rightarrow (\{-1, 1\}, \cdot)$ با ضابطه تعریف $\varphi(f) = \begin{cases} 1, & f \text{ زوج} \\ -1, & f \text{ فرد} \end{cases}$ را در نظر بگیرید. نشان دهید

$\frac{S_n}{A_n} \cong \{-1, 1\}$ که در آن A_n گروه جایگشت های زوج است.

۱.۲۰ نمره

۴- نشان دهید که در یک حلقه تعویض پذیر با عنصر یکه هر ایده آل ماکسیمال یک ایده آل اول است.

۱.۲۰ نمره

۵- فرض کنید S حلقه توابع حقیقی روی R تحت جمع و ضرب توابع باشد. عدد حقیقی $r \in R$ را ثابت فرض

کنید. همریختی پوشای $\varphi_r: S \rightarrow R$ را با ضابطه $\varphi_r(f) = f(r)$ در نظر بگیرید. به ازای هر $r \in R$ نشان دهید که $I_r = \{f \in S \mid f(r) = 0\}$ ایده آل ماکسیمال S است.

پاسخ صحیح

شماره
سوال

- | | |
|----|-----|
| 1 | ج |
| 2 | ب |
| 3 | د |
| 4 | د |
| 5 | ج |
| 6 | الف |
| 7 | ج |
| 8 | ب |
| 9 | د |
| 10 | الف |
| 11 | الف |
| 12 | د |
| 13 | د |
| 14 | ج |
| 15 | د |
| 16 | ج |
| 17 | د |
| 18 | ج |
| 19 | ج |
| 20 | ب |

۱- کدام عمل جابجایی و شرکت پذیر است؟

۱. ترکیب توابع روی A_4
۲. ضرب ماتریس های 2×2
۳. $x * y = x + y - xy$ روی اعداد حقیقی
۴. تفریق روی اعداد صحیح Z

۲- کدام گزینه در مورد اعداد حقیقی تحت عمل $x * y = x + y - xy$ درست است؟

۱. دارای عضو همانی و هر عضو آن معکوس پذیر است.
۲. دارای عضو همانی است و لی عضوی از آن وجود دارد که معکوس ناپذیر است.
۳. عضو همانی ندارد ولی هر عضو آن معکوس پذیر است.
۴. نه دارای عضو همانی و نه هر عضو آن معکوس پذیر است.

۳- جواب معادله $\bar{3} \oplus \bar{x} \oplus \bar{6} = \bar{1}$ در گروه $(Z_{12}, \oplus)$ کدام گزینه است؟

۱. $\bar{1}$
۲. $\bar{2}$
۳. $\bar{3}$
۴. $\bar{4}$

۴- در گروه جمعی Z_{24} رتبه عنصر $\bar{11}$ کدام است؟

۱. ۲۴
۲. ۱۱
۳. ۲۰
۴. ۸

۵- اگر $G = \langle x \rangle$ گروهی نامتناهی باشد آنگاه G چند مولد دارد؟

۱. ۱
۲. ۲
۳. نامتناهی
۴. بستگی به گروه G دارد.

۶- گروه ۴-کلاین چند زیر گروه سره دارد؟

۱. ۱
۲. ۲
۳. ۳
۴. ۴

۷- تعداد زیرگروه های $(Z_{24}, \oplus)$ چند تا است؟

۱. ۶
۲. ۸
۳. ۱۲
۴. ۲۴

۸- رتبه $(\bar{3}, \bar{5})$ در $Z_{30} \times Z_{80}$ کدام گزینه است؟

۱. ۱۵
۲. ۲۰
۳. ۳۰
۴. ۸۰

۹- کدام گروه دوری است؟

۱. $Z_4 \times Z_9 \times Z_{35}$
۲. $Z_4 \times Z_9 \times Z_{36}$
۳. $Z_4 \times Z_{11} \times Z_{36}$
۴. $Z_3 \times Z_{11} \times Z_{36}$

۱۰- حاصلضرب $(1,2)(3,5,4)(2,1,3,5)$ کدام جایگشت است؟

۱. ε ۲. $(1,3)(2,4)$ ۳. $(1,5)(3,4)$ ۴. $(1,3)(4,5)$

۱۱- کوچک ترین گروه غیر آبلی چند عضو دارد؟

۱. ۶ ۲. ۸ ۳. ۱۰ ۴. ۱۱

۱۲- مرتبه گروه متناوب از درجه n ، کدام گزینه است؟

۱. n ۲. $n!$ ۳. $\frac{n!}{2}$ ۴. ۲

۱۳- کدام گزینه نادرست است؟

۱. اگر H زیرگروهی از گروه آبلی G باشد آنگاه $H \triangleleft G$.
۲. مرکز هر گروه، زیرگروه نرمال آن است.
۳. هر زیرگروه S_3 نرمال است.
۴. اگر $H \triangleleft G$ و $g \in G$ باشد آنگاه $gHg^{-1} = H$.

۱۴- مرتبه گروه خارج قسمتی $\frac{Z_{12} \times Z_4}{\langle (2,2) \rangle}$ کدام گزینه است؟

۱. ۸ ۲. ۶ ۳. ۳ ۴. ۱۲

۱۵- اگر $\varphi: G \rightarrow H$ یک همسانی، $x \in G$ و n عدد صحیح باشد آنگاه کدام گزینه درست است؟

۱. $o(\varphi(x)) = o(x)$.
۲. اگر $K \triangleleft G$ آنگاه $\varphi(K) \triangleleft G$.
۳. G آبلی است اگر و تنها اگر H آبلی باشد.
۴. $\varphi(x^n) = [\varphi(x)]^n$.

۱۶- کدام گروه خارج قسمتی غیریکسان با $\frac{4Z+6Z}{6Z}$ است؟

۱. $\frac{2Z}{6Z}$ ۲. $\frac{10Z}{6Z}$ ۳. $\frac{4Z}{4Z \cap 6Z}$ ۴. $\frac{4Z}{12Z}$

۱۷- اگر $f = (1,2,3)$ و $g = (2,3)$ در گروه S_3 و $H = \langle f \rangle$ و $K = \langle g \rangle$ باشند کدام یکسانی درست است؟

۱. $H \times K \cong Z_3 \times Z_2$ ۲. $HK \cong Z_3 \times Z_2$ ۳. $HK \cong H \times K$ ۴. $HK \cong Z_6$

۱۸- کدام عضو در $(Z_8, \oplus, .)$ یکه است؟

۱. $\bar{2}$ ۲. $\bar{3}$ ۳. $\bar{4}$ ۴. $\bar{6}$

۱۹- اگر R حلقه‌ای تعویض پذیر با عنصر یکه و I ایده‌آلی از آن باشد آنگاه

۱. R قلمرو صحیح است اگر و تنها اگر $\frac{R}{I}$ قلمرو صحیح باشد.
۲. I ایده‌آل اول است اگر و تنها اگر $\frac{R}{I}$ میدان باشد.
۳. اگر I ایده‌آل ماکسیمال باشد آنگاه I ایده‌آل اول است.
۴. اگر I ایده‌آل ماکسیمال باشد آنگاه $I = R$.

۲۰- کدام یک از حلقه‌های زیر یک میدان با مشخصهٔ صفر است؟

۴. Z_{11}

۳. Z_9

۲. Q

۱. Z_2

سوالات تشریحی

۱- ثابت کنید اگر G یک گروه و H یک زیرمجموعهٔ غیرتهی و متناهی از G و H تحت ضرب G بسته باشد آنگاه H زیرگروه G است.

۲- ثابت کنید هرگروه از مرتبهٔ عدد اول P دوری است.

۳- ثابت کنید اگر H یک زیرگروه از گروه G با شاخص ۲ باشد آنگاه $H \triangleleft G$.

۴- به کمک قضیه اساسی همسانی‌ها ثابت کنید

$$\frac{S_n}{A_n} \cong \{-1, 1\}.$$

۵- ثابت کنید هر قلمرو صحیح متناهی یک میدان است.

شماره سوال	پاسخ صحیح
1	ج
2	ب
3	د
4	الف
5	ب
6	د
7	ب
8	د
9	الف
10	ج
11	الف
12	ج
13	ج
14	الف
15	د
16	ب
17	الف
18	ب
19	ج
20	ب

۱- کدام گزینه درست است؟

۱. تقسیم یک عمل دوتایی روی Z^1 است.
۲. تقسیم یک عمل دوتایی روی Z است.
۳. تقسیم یک عمل دوتایی روی Q^1 است.
۴. تقسیم یک عمل دوتایی روی Q است.

۲- کدام گزینه در مورد ضرب ماتریس‌های 2×2 درست است؟

۱. یک عمل دوتایی شرکت‌پذیر و جابه‌جایی است.
۲. یک عمل دوتایی شرکت‌پذیر است ولی جابه‌جایی نیست.
۳. یک عمل دوتایی جابه‌جایی است ولی شرکت‌پذیر نیست.
۴. یک عمل دوتایی است که هم شرکت‌پذیر نیست و هم جابه‌جایی نیست.

۳- کدام گزینه درست است؟

۱. $(Z^1, +)$ یک گروه است.
۲. $(R, +)$ یک گروه است.
۳. R با عمل دوتایی $a * b = 2(a + b)$ یک گروه است.
۴. $R - \{0\}$ با عمل دوتایی $a * b = 2ab$ یک گروه است.

۴- کدام گزینه نادرست است؟

۱. $R - \{0\}$ تحت عمل $a * b = |ab|$ یک گروه است.
۲. مجموعه $\{-1, 1\}$ تحت عمل ضرب یک گروه است.
۳. $R - \{1\}$ تحت عمل $a * b = a + b - ab$ یک گروه است.
۴. Z تحت عمل $a * b = a + b - 1$ یک گروه است.

۵- فرض کنید $(G, *)$ یک گروه باشد. در این صورت کدام گزینه نادرست است؟

۱. مجموعه $\left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix} \mid a \in R, a \neq 0 \right\}$ با عمل دوتایی ضرب ماتریس‌ها یک گروه آبلی است.
۲. مجموعه $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \mid a, b, d \in R, ad \neq 0 \right\}$ با عمل دوتایی ضرب ماتریس‌ها یک گروه آبلی است.
۳. گروه G آبلی است اگر و تنها اگر به ازای هر x و y از G ، $(x * y)^{-1} = x^{-1} * y^{-1}$.
۴. گروه G آبلی است اگر و تنها اگر به ازای هر x و y از G ، $(x * y)^2 = x^2 * y^2$.

۶- فرض کنید $X = \{1, 2, \dots, 10\}$ ، $A = \{1, 4, 5, 7, 8\}$ و $B = \{2, 4, 6\}$. در این صورت در گروه $(P(X), \Delta)$ اگر $A \Delta B = C$ ، آن‌گاه کدام گزینه درست است؟

۱. $C = \{1, 2, \dots, 10\}$
۲. $C = \{1, 2, 5, 6, 7, 8\}$
۳. $C = \{1, 5, 6, 7, 8\}$
۴. $C = \{2, 6\}$

۷- گروه متشکل از اعداد مختلط غیرصفر تحت عمل ضرب را در نظر بگیرید. در این صورت کدام گزینه درست است؟

۱. $0(2+3i)=5$. ۲. $0(2+3i)=6$. ۳. $0(2+3i)=36$. ۴. $0(2+3i)=\infty$.

۸- کدام گزینه درست است؟

۱. $(Q^+, \cdot)$ یک گروه دوری است.
۲. اگر X مجموعه‌ای با لااقل دو عضو باشد، آن گاه $(P(X), \Delta)$ یک گروه دوری است.
۳. در یک گروه متناهی، رتبه هر عضو متناهی است.
۴. اگر هر عضو از یک گروه دارای رتبه متناهی باشد، آن گاه آن گروه متناهی است.

۹- $(Z_{18}, \oplus)$ چند زیرگروه دارد؟

۱. ۲ . ۲. ۶ . ۳. ۹ . ۴. ۱۸

۱۰- رتبه $(2,3,2)$ در گروه $Z_4 \times Z_9 \times Z_{20}$ کدام است؟

۱. ۱۲ . ۲. ۳۰ . ۳. ۶۰ . ۴. ۱۸۰

۱۱- تجزیه جایگشت $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 2 & 7 & 6 & 1 & 8 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ به صورت حاصل ضرب دورهای از هم جدا کدام گزینه است؟

۱. $(1,4)(3,7)(6,8)$. ۲. $(1,4,6,8,5)(3,7)$. ۳. $(3,7)(1,4,6,8)$. ۴. $(1,4,6,5)(3,7)$.

۱۲- فرض کنید n یک عدد طبیعی باشد به طوری که $n \geq 3$. در این صورت کدام گزینه نادرست است؟

۱. A_n یک زیرگروه S_n است.
۲. $|S_n| = n!$.
۳. $|A_n| = \frac{n!}{2}$.
۴. $\{\varepsilon\} \subset Z(S_n) \subset A_n$.

۱۳- کدام گزینه نادرست است؟

۱. رتبه هر عضو از یک گروه متناهی G ، مرتبه G را عاد می‌کند.
۲. هر گروه از مرتبه عدد اول p ، دوری است.
۳. هر گروه از مرتبه عدد اول p ، آبلی است.
۴. هر گروه ۶ عضوی آبلی است.

۱۴- فرض کنید G یک گروه و H یک زیرگروه G باشد. در این صورت کدام گزینه نادرست است؟

۱. اگر H زیرگروهی از $Z(G)$ باشد، آن گاه H یک زیرگروه نرمال G است.

۲. اگر $|G:H|=2$ ، آن گاه H یک زیرگروه نرمال G است.

۳. اگر G آبلی باشد، آن گاه H یک زیرگروه نرمال G است.

۴. اگر هر زیرگروه G نرمال باشد، آن گاه G یک گروه آبلی است.

۱۵- فرض کنید $\phi: G \rightarrow K$ یک هم‌سانی از گروه‌ها باشد. در این صورت کدام گزینه نادرست است؟

۱. اگر H یک زیرگروه G باشد، آن گاه $\phi(H)$ یک زیرگروه K است.

۲. اگر J یک زیرگروه K باشد، آن گاه $\phi^{-1}(J)$ یک زیرگروه G است.

۳. اگر H یک زیرگروه نرمال G باشد، آن گاه $\phi(H)$ یک زیرگروه نرمال K است.

۴. اگر J یک زیرگروه نرمال K باشد، آن گاه $\phi^{-1}(J)$ یک زیرگروه نرمال G است.

۱۶- فرض کنید p یک عدد اول و G یک گروه دوری از مرتبه p باشد. در این صورت تعداد خودسانی‌های G برابر با کدام گزینه است؟

۱. $p!$ ۲. $(p-1)!$ ۳. p ۴. $p-1$

۱۷- فرض کنید p یک عدد اول و G یک گروه از مرتبه p^2 باشد. در این صورت کدام گزینه درست است؟

۱. G یک گروه آبلی نیست.

۲. G یک گروه آبلی است ولی دوری نیست.

۳. G یک گروه دوری است.

۴. G یک گروه دوری است و یا با گروه $Z_p \times Z_p$ یکسان است.

۱۸- فرض کنید n یک عدد طبیعی و a عضوی از حلقه $(Z_n, \oplus, \otimes)$ باشد. در این صورت کدام گزینه نادرست است؟

۱. اگر a در $(Z_n, \oplus, \otimes)$ یکه باشد، آن گاه $(a, n) = 1$.

۲. اگر $(a, n) = 1$ ، آن گاه a در $(Z_n, \oplus, \otimes)$ یکه است.

۳. اگر $(a, n) \neq 1$ ، آن گاه a در $(Z_n, \oplus, \otimes)$ مقسوم‌علیه صفر نیست.

۴. a در $(Z_n, \oplus, \otimes)$ پوچ‌توان است اگر و تنها اگر n توانی از a را تقسیم کند.

۱۹- حلقه $(2\mathbb{Z}, +, \cdot)$ را در نظر بگیرید. در این صورت کدام گزینه نادرست است؟

۱. $2\mathbb{Z}$ یک حلقه جابه‌جایی است.
۲. $2\mathbb{Z}$ دارای عضو یکه نیست.
۳. $4\mathbb{Z}$ یک ایده‌آل ماکسیمال $2\mathbb{Z}$ است.
۴. $\frac{2\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}$ یک میدان است.

۲۰- فرض کنید n یک عدد طبیعی و $\phi: (\mathbb{Z}, +, \cdot) \rightarrow (\mathbb{Z}_n, \oplus, \otimes)$ با ضابطه $\phi(x) = \bar{x}$ تعریف شود. در این صورت هسته این هم‌سانی برابر با کدام گزینه است؟

۱. $\{0\}$
۲. $n\mathbb{Z}$
۳. $\mathbb{Z}_n$
۴. $\mathbb{Z}$

سوالات تشریحی

۱- فرض کنید G یک گروه و x عضوی از G باشد. نشان دهید اگر $o(x) = n$ و $x^m = e$ ، آنگاه n عدد m را تقسیم می‌کند. ۱.۲۰ نمره

۲- نشان دهید هر زیرگروه از یک گروه دوری، یک گروه دوری است. ۱.۲۰ نمره

۳- فرض کنید G یک گروه متناهی و H یک زیرگروه G باشد. نشان دهید $|H||G|$. ۱.۲۰ نمره

۴- فرض کنید $\phi: G \rightarrow K$ یک هم‌سانی پوشا از گروه G به گروه K باشد. نشان دهید $K \cong \frac{G}{\ker(\phi)}$. ۱.۲۰ نمره

۵- نشان دهید هر قلمرو صحیح متناهی یک میدان است. ۱.۲۰ نمره

ردیف	تاریخ تصحیح
1	3
2	2
3	4
4	1
5	2
6	2
7	4
8	3
9	2
10	2
11	2
12	4
13	4
14	4
15	3
16	4
17	4
18	3
19	4
20	2

۱- عمل تقسیم ($a * b = \frac{a}{b}$) یک عمل دوتایی روی کدامیک از مجموعه های زیر است؟

۱. R ۲. Z ۳. Q ۴. Z'

۲- کدامیک از موارد زیر گروه نیست؟

۱. $(R - \{0\}, \cdot)$ ۲. $(Z, +)$ ۳. $(R, +)$ ۴. $(R^-, -)$

۳- گروه $(R - \{1\}, *)$ را با عمل دوتایی $x * y = x + y - xy$ را در نظر بگیرید. در اینصورت معکوس عضو 5 از این گروه کدام است؟

۱. $\frac{1}{5}$ ۲. -5 ۳. $\frac{24}{25}$ ۴. $\frac{5}{4}$

۴- جواب معادله $\bar{2} \oplus x \oplus \bar{7} = \bar{1}$ در گروه $(Z_{12}, \oplus)$ کدام است؟

۱. $\bar{4}$ ۲. $\bar{5}$ ۳. $\bar{6}$ ۴. $\bar{1}$

۵- کدامیک از موارد زیر نادرست است؟

۱. گروه $(Q, +)$ گروه دوری نیست.
۲. گروه $(Z_n, \oplus)$ یک گروه دوری است.
۳. هر گروه دوری، آبلی است.
۴. رتبه عضو 3 در گروه $(Z_8, \oplus)$ برابر 5 است.

۶- فرض کنید G یک گروه باشد و x عضوی از G باشد. اگر رتبه x برابر 4 باشد رتبه x^4 چقدر است؟

۱. 20 ۲. 4 ۳. 5 ۴. 16

۷- کدامیک از موارد زیر در مورد گروه $(Z_2 \times Z_2, +)$ درست است؟

۱. مرتبه این گروه 4 است.
۲. این گروه دوری است.
۳. عنصر همانی این گروه $(1,1)$ است.
۴. معکوس عنصر $(1,0)$ برابر $(0,1)$ است.

۸- رتبه عضو $(\bar{2}, \bar{3}, \bar{2})$ در گروه $Z_6 \times Z_9 \times Z_{18}$ چقدر است؟

۱. 18 ۲. 9 ۳. 54 ۴. 6

۹- فرض کنید $f: R \rightarrow R^+$ تابعی با ضابطه $f(x) = e^x$ باشد. در اینصورت $f^{-1}(e)$ کدام است؟

۱. 2 ۲. 1 ۳. e ۴. e^{-1}

۱۰- زیر گروه $H = \langle 4 \rangle$ از گروه $G = (Z_{20}, \oplus)$ را در نظر بگیرید. در اینصورت حاصل $[G : H]$ کدام است؟

۱. 4 ۲. 5 ۳. 6 ۴. 7

۱۱- فرض کنید G یک گروه متناهی با $|G| = 40$ باشد. اگر H زیر گروه G باشد در اینصورت $|H|$ چقدر است؟

۱. 6 ۲. 7 ۳. 8 ۴. 9

۱۲- کدامیک از موارد زیر درست است؟

۱. اگر v گروه چهارعضوی کلاین باشد آنگاه $V \cong (Z_4, \oplus)$

۲. $(R, +) \cong (R^+, \cdot)$

۳. $(Z, +) \cong (Z_n, \oplus)$

۴. $(R - \{0\}, \cdot) \cong GL(2, R)$

۱۳- کدامیک از گروه های زیر همیشه دوری است؟

۱. گروه G با $|G| = 20$ ۲. گروه G با $|G| = 25$

۳. گروه G با $|G| = 35$ ۴. گروه G با $|G| = 40$

۱۴- کدامیک از حلقه های زیر یک قلمروی صحیح نیست؟

۱. $(Z, +, \cdot)$ ۲. $(R, +, \cdot)$ ۳. $(Q, +, \cdot)$ ۴. $(Z_8, \oplus, \otimes)$

۱۵- کدامیک از حلقه های زیر یک میدان است.

۱. $(Z_{10}, \oplus, \otimes)$ ۲. $(Z_{11}, \oplus, \otimes)$ ۳. $(2Z, +, \cdot)$ ۴. $(6Z, +, \cdot)$

۱۶- کدامیک از موارد زیر درست است؟

۱. $(Z, +, \cdot)$ یک ایده آل حلقه ی $(Q, +, \cdot)$ است.

۲. $(\frac{Z}{6Z}, +, \cdot)$ قلمرو صحیح است.

۳. ایده آل $7Z$ یک ایده آل ماکسیمال حلقه ی $(Z, +, \cdot)$ است.

۴. $(\frac{Z}{10Z}, +, \cdot)$ یک میدان است.

۱۷- فرض کنید $\varphi: Z \oplus Z \rightarrow Z$ با ضابطه ی $\varphi(m, n) = n$ یک همسانی حلقه ایی باشد. در اینصورت $\text{Ker}(\varphi)$ کدام است؟

۱. $\{(m, 0) | m \in Z\}$ ۲. $\{(0, n) | n \in Z\}$ ۳. $\{(1, n) | n \in Z\}$ ۴. $\{(m, 1) | m \in Z\}$

۱۸- کدامیک از موارد زیر یک همسانی حلقه ای است؟

۱. $\varphi: (R, +, \cdot) \rightarrow (R, +, \cdot)$ با ضابطه ی $\varphi(x) = |x|$

۲. $\varphi: (C, +, \cdot) \rightarrow (R, +, \cdot)$ با ضابطه ی $\varphi(a + ib) = a$

۳. $\varphi: (Z, +, \cdot) \rightarrow (Z, +, \cdot)$ با ضابطه ی $\varphi(n) = 2n$

۴. $\varphi: (C, +, \cdot) \rightarrow (C, +, \cdot)$ با ضابطه ی $\varphi(a + ib) = a - ib$

۱۹- فرض کنید S_n و A_n به ترتیب گروه های جایگشتی و متناوب از درجه n باشند. کدام گزینه درست است؟

۱. مرتبه S_n برابر n^2 است. ۲. مرتبه A_n برابر 2^n است.

۳. $[S_n : A_n] = 2$ ۴. $[S_n : A_n] = n$

۲۰- مشخصه ی کدامیک از میدان های زیر برابر صفر نیست؟

۱. Z_{13} ۲. Q ۳. R ۴. C

سوالات تشریحی

۱.۲۰ نمره

۱- فرض کنید $G = \langle x \rangle$ گروهی دوری از مرتبه n باشد. نشان دهید که به ازای هر عدد صحیح و مثبت m گروه G دارای زیرگروهی از مرتبه m است اگر و تنها اگر m عدد n را تقسیم کند.

۱.۲۰ نمره

۲- (الف) ضرب زیر را در S_{10} انجام دهید.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 7 & 10 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 & 6 & 7 & 8 & 10 & 9 \end{pmatrix}$$

(ب) حاصل ضرب بالا را به صورت حاصل ضرب دورهای از هم جدا بدست آورده و سپس آن را به صورت حاصل ضربی از ترانهش ها بنویسید. زوج و یا فرد بودن آن را مشخص کنید.

۱.۲۰ نمره

۳- گروه G را در نظر بگیرید. ابتدا نشان دهید که هر زیرگروه از $Z(G)$ (مرکز گروه G) در گروه G نرمال است. سپس نشان دهید اگر گروه G دوری و H زیرگروه G باشد آنگاه H در G نرمال و گروه خارج قسمتی $\frac{G}{H}$ دوری است.

۱.۲۰ نمره

۴- فرض کنید $\varphi: G \rightarrow K$ یک همسانی پوشا بین گروه ها باشد. ثابت کنید $\frac{G}{\text{Ker}(\varphi)} \cong K$.

۱.۲۰ نمره

۵-

ثابت کنید در یک حلقه ی تعویض پذیر با عنصر یکه R ، ایده آل I اول است اگر و فقط اگر $\frac{R}{I}$ یک قلمرو صحیح باشد.

باسمہ صحیح

شماره
سوال

ج 1

د 2

د 3

الف 4

د 5

ج 6

الف 7

ب 8

ب 9

الف 10

ج 11

ب 12

ج 13

د 14

ب 15

ج 16

الف 17

د 18

ج 19

الف 20

سوالات تشریحی

۱- قسمت اول قضیه 5-5 صفحه 71

۱.۲۰ نمره

۲- تمرین 1 از فصل 8 صفحه 118.

۱.۲۰ نمره

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 7 & 10 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 & 6 & 7 & 8 & 10 & 9 \end{pmatrix} = (12)(465)(78) = (12)(45)(46)(78)$$

بنابراین حاصل ضرب داده شده جایگشتی زوج است

۳- قضیه 10-2 صفحه 140

۱.۲۰ نمره

هرگروه دوری آبدی است. فرض کنید $G = \langle a \rangle$. نشان می دهیم که $\forall x, y \in G, xy = yx$.

$$x \in G \Rightarrow \exists n \in \mathbb{Z}, x = a^n$$

$$y \in G \Rightarrow \exists m \in \mathbb{Z}, y = a^m$$

$$xy = a^n a^m = a^{n+m} = a^{m+n} = a^m a^n = yx$$

بنابراین $G = Z(G)$ و در نتیجه هر زیرگروه G زیرگروه $Z(G)$ است و بنا به قسمت اول در G نرمال است. برای اثبات

دوری بودن گروه خارج قسمتی $\frac{G}{H}$ نشان می دهیم که $\frac{G}{H} = \langle aH \rangle$. واضح است که $\langle aH \rangle \subseteq \frac{G}{H}$. برعکس فرض

کنید $x \in \frac{G}{H}$. بنابراین $x = bH, b \in G$ و از آنجا $b \in G = \langle a \rangle \Rightarrow b = a^t, t \in \mathbb{Z}$. لذا $x = a^t H = (aH)^t \in \langle aH \rangle$.

بنابراین $\frac{G}{H} = \langle aH \rangle$ و در نتیجه $\frac{G}{H} \subseteq \langle aH \rangle$.

۴- قضیه ی 12-2 صفحه ی 177 از فصل 12

۱.۲۰ نمره

۵-

۱.۲۰ نمره

قضیه ی 5-15 صفحه ی 235 از فصل 15

۱- کدام یک از اعمال دوتایی زیر روی Z شرکت پذیر و جابجایی است؟

۱. عمل دوتایی تفریق
۲. عمل دوتایی $\forall a, b \in Z, a * b = 2ab$
۳. عمل دوتایی $\forall a, b \in Z, a * b = a^3 + b^2 + 1$
۴. عمل دوتایی $\forall a, b \in Z, a * b = 2(a + b)$

۲- کدام یک از مجموعه های زیر با عمل دوتایی داده شده یک گروه است؟

۱. R^+ تحت عمل جمع
۲. مجموعه اعداد طبیعی تحت عمل جمع
۳. مجموعه اعداد صحیح تحت عمل دوتایی $*$ به صورت $a * b = 2(a + b)$ برای هر $a, b \in Z$
۴. $R - \{0\}$ همراه با عمل ضرب

۳- گروه $GL(2, R)$ تحت ضرب ماتریس ها را در نظر بگیرید. مرتبه عنصر $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ از این گروه برابر است با

۱. ۱
۲. ۲
۳. ۴
۴. این عنصر از مرتبه نامتناهی است.

۴- کدام یک از گروه های زیر دوری نیست؟

۱. $(Z, +)$
۲. $(Q, +)$
۳. $(Z_8, \oplus)$
۴. $(Z_9, \oplus)$

۵- تعداد مولدهای گروه دوری $(Z_8, \oplus)$ برابر است با

۱. ۸
۲. ۲
۳. ۴
۴. ۱

۶- رتبه عنصر $\bar{5}$ در گروه $(Z_{20}, \oplus)$ کدام است؟

۱. ۵
۲. ۱
۳. ۲
۴. ۴

۷- تعداد زیرگروه های متمایز گروه $G = (Z_{20}, \oplus)$ کدام است؟

۱. ۲
۲. ۲۰
۳. ۶
۴. ۸

۸- کدام یک از گروه های زیر دوری است؟

۱. $Z_2 \times Z_2$
۲. $Z_{10} \times Z_7 \times Z_{15}$
۳. $Z_4 \times Z_9 \times Z_{35}$
۴. $Z_6 \times Z_{14}$

۹- مرتبه گروه متناوب از درجه ۴ کدام است؟

۱. ۲۴
۲. ۱۲
۳. ۴
۴. ۱

۱۰- مرکز گروه S_3 یعنی $Z(S_3)$ کدام است؟

۱. S_3 ۲. $\{\varepsilon\}$ که در آن ε جایگشت همانی است.
۳. (123) ۴. (23)

۱۱- مرتبه جایگشت $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ در S_4 کدام است؟

۱. 1 ۲. 2 ۳. 3 ۴. 4

۱۲- شاخص زیرگروه $H = \langle \bar{2} \rangle$ در گروه $G = (Z_{10}, \oplus)$ برابر است با

۱. 2 ۲. 5 ۳. 10 ۴. 1

۱۳- گروه متناهی G و زیرگروه H از آن را در نظر بگیرید. شاخص H در G برابر است با

۱. $|H|$ ۲. $|G|$ ۳. $\frac{|G|}{|H|}$ ۴. 1

۱۴- گروه G را در نظر بگیرید. گزینه نادرست کدام است؟

۱. هر زیرگروه از $Z(G)$ در G نرمال است.
۲. هر زیرگروه از G در G نرمال است.
۳. اگر G آبلی باشد آنگاه $Z(G) = G$.
۴. $Z(G)$ یک زیرگروه نرمال G است.

۱۵- فرض کنید $\varphi: G \rightarrow H$ یک همسانی گروهی باشد. اگر $o(x) = n$ آنگاه کدام گزینه در مورد $o(\varphi(x))$ درست است؟

۱. $o(\varphi(x)) = n$ ۲. $o(\varphi(x)) > n$ ۳. $o(\varphi(x)) \mid n$ ۴. $o(\varphi(x)) = 1$

۱۶- همریختی $\varphi: GL(2, R) \rightarrow (R - \{0\}, \cdot)$ را با ضابطه $\varphi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = ad - bc$ در نظر بگیرید. هسته این همریختی کدام است؟

۱. $GL(2, R)$

۲. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

۳. $SL(2, R)$

۴. مجموعه ماتریس های 2×2 با درایه های حقیقی که دترمینان آنها صفر است.

۱۷- گزینه نادرست کدام است؟

۱. عضو $\bar{a}$ در $(Z_n, \oplus, \otimes)$ یکه است هرگاه $(a, n) = 1$.
۲. هر عضو در حلقه $(Z_n, \oplus, \otimes)$ یا یکه و یا مقسوم علیه صفر است.
۳. عضو $\bar{a}$ در $(Z_n, \oplus, \otimes)$ با شرط $(a, n) = 1$ یک مقسوم علیه صفر Z_n است.
۴. هر عضو پوچ توان Z_n یک مقسوم علیه صفر است.

۱۸- ایده آل سره I از حلقه R یک ایده آل اول است اگر و تنها اگر

۱. به ازای هر a و b در R ، رابطه $ab \in I$ ایجاب کند که $a \in I$.
۲. $\frac{R}{I}$ یک قلمرو صحیح باشد.
۳. $\frac{R}{I}$ یک میدان باشد.
۴. قانون حذف در حلقه R برقرار باشد.

۱۹- فرض کنید S, R حلقه هایی با عضو یکه و $\varphi: R \rightarrow S$ یک همسانی حلقه باشد. در این صورت گزینه نادرست کدام است؟

۱. اگر S یک حلقه بخشی باشد و $\varphi(1_R) \neq 0$ آنگاه $\varphi(1_R) = 1_S$.
۲. اگر S یک قلمرو صحیح باشد و $\varphi(1_R) \neq 0$ آنگاه $\varphi(1_R) = 1_S$.
۳. اگر φ پوشا باشد آنگاه $\varphi(1_R) = 1_S$.
۴. همواره $\varphi(1_R) = 1_S$.

۲۰- کدام یک از میدان های زیر از مشخصه غیر صفر است؟

۱. میدان اعداد گویا
۲. میدان اعداد حقیقی
۳. میدان اعداد مختلط
۴. Z_p برای عدد اول p

سوالات تشریحی

۱- فرض کنید G یک گروه و H زیرمجموعه غیرتهی و متناهی از G باشد. نشان دهید اگر H تحت ضرب G بسته باشد آنگاه H یک زیرگروه G است.

۲- ابتدا نشان دهید اگر G یک گروه متناهی و H زیرگروه G باشد آنگاه مرتبه H مرتبه گروه G را می شمارد. سپس به کمک آن ثابت کنید هرگروه از مرتبه عدد اول p دوری است.

۳- فرض کنید G گروهی از مرتبه 15، H زیرگروهی از مرتبه 3 و K یک زیرگروه نرمال از مرتبه 5 باشد. نشان دهید که $G = HK$.

۴- حلقه تعویض پذیر با عنصر یکه R را در نظر بگیرید. فرض کنید $\frac{R}{I}$ یک میدان باشد. نشان دهید ایده آل I یک ایده آل ماکسیمال حلقه R است.

۵- حاصل ضرب زیر را در S_{10} بدست آورده و آن را به صورت حاصل ضرب دورهای از هم جدا بنویسید. سپس آن را به صورت حاصل ضربی از ترانهش ها نوشته و زوج یا فرد بودن آن را مشخص کنید.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 9 & 3 & 5 & 4 & 7 & 1 & 8 & 10 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

۱- عمل دوتایی $*$ روی Z به صورت $a * b = 2(a + b)$ تعریف شده است. در این صورت عمل $*$

۱. جابجایی و شرکت پذیر است

۲. جابجایی است اما شرکت پذیر نیست

۳. شرکت پذیر است اما جابجایی نیست

۴. نه جابجایی و نه شرکت پذیر است

۲- فرض کنید X یک مجموعه غیرتهی و $P(X)$ مجموعه توانی X باشد. در این صورت $P(X)$ با کدامیک از اعمال زیر یک گروه است؟

۱. عمل اشتراک

۲. عمل اجتماع

۳. عمل تفاضل

۴. عمل تفاضل متقارن

۳- عمل دوتایی $*$ روی Z به صورت $x * y = x$ تعریف شده است. در این صورت کدام گزینه درست است؟

۱. صفر عضو همانی است

۲. 1 عضو همانی است

۳. 1 عضو همانی راست است

۴. 1 عضو همانی چپ است

۴- تعداد مولدهای گروه $(Z_{12}, \oplus)$ برابر است با

۱. 7

۲. 6

۳. 5

۴. 4

۵- کدام یک از گروه های زیر دوری نیست؟

۱. $(Z_{20}, \oplus)$

۲. $(Z, +)$

۳. $(Q, +)$

۴. $(2Z, +)$

۶- در $(Z_{20}, \oplus)$ رتبه عنصر 16 کدام است؟

۱. 5

۲. 10

۳. 15

۴. 20

۷- زیرگروه های $6Z$ و $8Z$ از $(Z, +)$ را در نظر بگیرید. در این صورت $6Z \cap 8Z$ کدام است؟

۱. $48Z$

۲. $24Z$

۳. $14Z$

۴. $12Z$

۸- فرض کنید H و K دو زیرگروه از یک گروه G باشند. کدام گزینه درست است؟

۱. $H \cup K$ زیرگروه G است

۲. $H \cup K$ تحت ضرب گروه بسته است

۳. $H \cup K$ تحت عضو وارون بسته است

۴. $H \cup K$ تحت هیچ شرطی یک زیرگروه G نیست.

۹- تعداد زیرگروه های یک گروه دوری از مرتبه 24 کدام است؟

۱. 8

۲. 10

۳. 12

۴. 24

۱۰- در $Z_4 \times Z_9 \times Z_{20}$ عضو $(2,3,2)$ دارای کدام رتبه است؟

۱. 60 ۲. 30 ۳. 15 ۴. 5

۱۱- کدام یک از گروه های زیر دوری است؟

۱. $Z_2 \times Z_2$ ۲. $Z_3 \times Z_6$ ۳. $Z_2 \times Z_4$ ۴. $Z_2 \times Z_3$

۱۲- تعداد عضوهای زیرگروه A_4 از S_4 برابر است با:

۱. 24 ۲. 12 ۳. 6 ۴. 4

۱۳- گروه $(Z_{20}, \oplus)$ و زیر گروه $H = \langle 4 \rangle$ از آن را در نظر بگیرید. در این صورت $[G : H]$ کدام است؟

۱. 10 ۲. 5 ۳. 4 ۴. 2

۱۴- فرض کنید $\varphi : (Z, +) \rightarrow (Z_n, \oplus)$ و $\varphi(m) = \bar{m}$ که در آن $\bar{m}$ باقیمانده m با کالبد n است. کدام گزینه درست است؟

۱. φ یک همسانی پوشا است ۲. φ یک همسانی یک به یک است

۳. φ یک همسانی یک به یک و پوشا است ۴. φ یک خودسانی است

۱۵- فرض کنید G یک گروه دوری نامتناهی باشد. در این صورت G با کدامیک از گروه های زیر یکرخت است؟

۱. $(Q, +)$ ۲. $(R, +)$ ۳. $(C, +)$ ۴. $(Z, +)$

۱۶- تعداد عضوهای پوچ توان در حلقه Z_8 برابر است با:

۱. 3 ۲. 4 ۳. 5 ۴. 6

۱۷- کدام گزینه درست است؟

۱. هر قلمرو صحیح یک میدان است ۲. هر قلمرو صحیح نامتناهی یک میدان است

۳. هر میدان یک قلمرو صحیح متناهی است ۴. هر میدان یک قلمرو صحیح است

۱۸- کدام یک از ایده آل های زیر یک ایده آل ماکسیمال حلقه اعداد صحیح است؟

۱. $\{0\}$ ۲. $4Z$ ۳. $6Z$ ۴. $7Z$

۱۹- فرض کنید S و I دو ایده آل حلقه R باشند. در این صورت حلقه $\frac{S+I}{I}$ با کدام حلقه زیر یکرخت است؟

۱. $\frac{I}{S \cap I}$ ۲. $\frac{S}{S \cap I}$ ۳. $\frac{S+I}{S \cap I}$ ۴. $\frac{R}{I}$

۲۰- فرض کنید R یک حلقه باشد. کدام گزینه درست است؟

۱. R را می توان در یک میدان نشانده
۲. R را می توان در یک قلمرو صحیح نشانده
۳. R را می توان در یک حلقه بخشی نشانده
۴. R را می توان در یک حلقه با عضو یکه نشانده

سوالات تشریحی

۱- فرض کنید G یک گروه و $x \in G$ به طوری که $O(x) = n$. ثابت کنید اگر $x^m = e$ آنگاه n عدد m را تقسیم می کند.

۲- فرض کنید G یک گروه متناهی و H زیرگروه G باشد. ثابت کنید مرتبه H مرتبه G را تقسیم می کند.

۳- قضیه اساسی همسانی گروه ها را بیان و اثبات کنید

۴- ثابت کنید در هر حلقه تعویض پذیر با عنصر یکه هر ایده آل ماکسیمال یک ایده آل اول است.

۵- ثابت کنید هر قلمرو صحیح متناهی یک میدان است.

شماره سوال	پاسخ صحیح
1	ب
2	د
3	ج
4	د
5	ج
6	الف
7	ب
8	ج
9	الف
10	ب
11	د
12	ب
13	ج
14	الف
15	د
16	ب
17	د
18	د
19	ب
20	د

۱- عمل $*$ را روی اعداد حقیقی R بصورت $x * y = x + y - xy$ تعریف می کنیم در این صورت کدام گزینه در مورد عمل $*$ درست است؟

۱. شرکتپذیر و جابجایی است
۲. شرکتپذیر است ولی جابجایی نیست
۳. جابجایی است ولی شرکتپذیر نیست.
۴. نه جابجایی و نه شرکتپذیر است.

۲- کدامیک از مجموعه های زیر با عمل تعریف شده یک گروه است؟

۱. R^{-} همراه با عمل جمع
۲. مجموعه $3Z$ مشتمل بر تمام اعداد مضرب 3 تحت عمل ضرب
۳. مجموعه $\{1, -1\}$ تحت عمل ضرب
۴. مجموعه اعداد طبیعی تحت عمل جمع

۳- گروه Z را همراه با عمل $a * b = a + b - 1$ در نظر بگیرید. در این صورت وارون a نسبت به عمل $*$ کدامست؟

۱. $1 - a$
۲. $2 - a$
۳. $1 + a$
۴. $2 + a$

۴- اگر $(G, *)$ یک گروه باشد در این صورت برای هر $x, y \in G$ کدام گزینه همواره صحیح است؟

۱. $x * y = y * x$
۲. $(x * y)^{-1} = x^{-1} * y^{-1}$
۳. $x * y = x$
۴. $(x^{-1})^{-1} = x$

۵- جواب معادله $\overline{2} \oplus \overline{x} \oplus \overline{7} = \overline{1}$ در گروه $(Z_{12}, \oplus)$ کدامست؟

۱. $\overline{4}$
۲. $\overline{5}$
۳. $\overline{6}$
۴. $\overline{7}$

۶- کدامیک از زیرگروههای زیر از گروه $(Z_{12}, \oplus)$ با $(Z_{12}, \oplus)$ برابر است؟

۱. $\langle \overline{2} \rangle$
۲. $\langle \overline{3} \rangle$
۳. $\langle \overline{4} \rangle$
۴. $\langle \overline{7} \rangle$

۷- فرض کنید $G = K_4$ گروه چهارتایی کلاین باشد. در این صورت G یک گروه

۱. آبلی و دوری است.
۲. آبلی است ولی دوری نیست.
۳. دوری است ولی آبلی نیست.
۴. نه آبلی و نه دوری است.

۸- فرض کنید $G = \langle x \rangle$ یک گروه دوری از مرتبه 12 باشد در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

۱. $\langle x^7 \rangle = \langle x^5 \rangle$ ۲. $\langle x^4 \rangle = \langle x^3 \rangle$ ۳. $\langle x^6 \rangle = \langle x^5 \rangle$ ۴. $\langle x^8 \rangle = \langle x^9 \rangle$

۹- تعداد زیرگروههای $(Z_{18}, \oplus)$ کدام است؟

۱. 2 ۲. 3 ۳. 4 ۴. 6

۱۰- رتبه $(\bar{2}, \bar{3}, \bar{2})$ در گروه $Z_4 \times Z_9 \times Z_{20}$ کدامست؟

۱. 15 ۲. 20 ۳. 30 ۴. 45

۱۱- مرتبه $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ در S_4 کدام است؟

۱. 1 ۲. 2 ۳. 3 ۴. 4

۱۲- در گروه $G = (Z_{10}, \oplus)$ ، شاخص زیرگروه $\langle 2 \rangle$ در گروه G یعنی $[G : \langle 2 \rangle]$ کدام است؟

۱. 2 ۲. 3 ۳. 4 ۴. 5

۱۳- اگر H و K دو زیرگروه متناهی از گروه G با فرض $(|H|, |K|) = 1$ باشند آنگاه $H \cap K$ کدامست؟

۱. K ۲. H ۳. G ۴. $\{e\}$

۱۴- زیرگروههای $H = \{e, f, f^2\}$ و $K = \{e, g\}$ از S_3 را در نظر بگیرید در این صورت HK کدامست؟

۱. Z_2 ۲. Z_3 ۳. Z_6 ۴. S_3

۱۵- فرض کنید $G = Z_3 \times Z_2$ و H زیرگروه نرمال $\{0\} \times Z_2$ باشد. در این صورت $|\frac{G}{H}|$ کدام است؟

۱. 1 ۲. 2 ۳. 3 ۴. 4

۱۶- کدامیک از همسانی های زیر تحت تابع تعریف شده یکسانی است؟

۱. $\varphi: (R, +) \rightarrow (R^+, \cdot)$ با $\varphi(x) = e^x$

۲. $\varphi: GL(2, R) \rightarrow (R - \{0\}, \cdot)$ با $\varphi\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = ad - bc$

۳. $\varphi: (Z, +) \rightarrow (Z, +)$ با $\varphi(n) = 2n$

۴. $\varphi: (Z_8, \oplus) \rightarrow (Z_4, \oplus)$ با $\varphi(x)$ برابر است با باقیمانده x بر 4

۱۷- فرض کنید $G = S_3 = \{e, f, f^2, g, fg, f^2g\}$ و $H = \langle f \rangle$ باشد در این صورت رتبه $\frac{G}{H}$ کدام است؟

۱. 1 ۲. 2 ۳. 3 ۴. 4

۱۸- گروه $\frac{4Z + 6Z}{6Z}$ با کدامیک از گروه های زیر یکسان است؟

۱. $\frac{3Z}{2Z \cap 3Z}$ ۲. $\frac{Z}{2Z \cap 3Z}$ ۳. $\frac{6Z}{4Z \cap 6Z}$ ۴. $\frac{4Z}{4Z \cap 6Z}$

۱۹- کدامیک از عضوهای زیر در $(Z_6, \oplus, \cdot)$ یکه است؟

۱. $\bar{5}$ ۲. $\bar{4}$ ۳. $\bar{3}$ ۴. $\bar{2}$

۲۰- $2Z \cap 3Z$ برابر است با:

۱. $2Z$ ۲. $3Z$ ۳. $4Z$ ۴. $6Z$

سوالات تشریحی

۱.۲۰ نمره

۱- نشان دهید هر گروه آبلی دوری است.

۱.۲۰ نمره

۲- قضیه لاگرانژ را بیان کرده و اثبات نمایید.

۱.۲۰ نمره

۳- نشان دهید هر گروه دلخواه G با زیرگروهی از S_G یکسان است.

۱.۲۰ نمره

۴- نشان دهید در یک حلقه تعویض پذیر با عنصر یکه R ، ایده ال I اول است اگر و فقط اگر $\frac{R}{I}$ یک قلمرو صحیح باشد.

نمبر سوال	يـاـسـخـ صـحـيـح
1	الف
2	ج
3	ب
4	د
5	الف
6	د
7	ب
8	الف
9	د
10	ج
11	ب
12	الف
13	د
14	د
15	ج
16	الف
17	ب
18	د
19	الف
20	د

۱- کدام یک از اعمال زیر روی مجموعه اعداد طبیعی یک عمل دوتایی است؟

۱. $a * b = a - b$ ۲. $a * b = a \div b$ ۳. $a * b = a^b$ ۴. $a * b = a^{a-b}$

۲- فرض کنید X یک مجموعه باشد. گروه $(P(X), \Delta)$ که در آن Δ تفاضل متقارن روی $P(X)$ است را در نظر بگیرید. فرض کنید $A \in P(X)$ باشد. وارون A کدام یک از گزینه های زیر است؟

۱. $\emptyset$ ۲. A ۳. X ۴. $X - A$

۳- مجموعه اعداد صحیح را با عمل دوتایی $*$ به صورت $x * y = x$ در نظر بگیرید. کدام گزینه نادرست است؟

۱. 1 عضو همانی راست است. ۲. هر عضوی در Z دارای معکوس چپ 1 است.

۳. Z با عمل $*$ یک گروه نیست. ۴. $(Z, *)$ دارای عضو همانی دوطرفه است.

۴- فرض کنید G یک گروه و $x \in G$ باشد. اگر $o(x) = n$ آنگاه $o(x^m)$ کدام یک از گزینه های زیر است؟

۱. n ۲. $\frac{n}{m}$

۳. $\frac{m}{n}$ ۴. $\frac{n}{d}$ که در آن $d = (m, n)$.

۵- $o(\overline{45})$ در گروه جمعی Z_{60} کدام است؟

۱. 60 ۲. 15 ۳. 4 ۴. 3

۶- مرکز گروه K_4 (چهارتایی کلاین) کدام است؟

۱. K_4 ۲. $\emptyset$ ۳. $\{e\}$ ۴. $\{a, b, c\}$

۷- تعداد زیرگروه های یک گروه دوری از مرتبه n برابر است با

۱. n ۲. 2

۳. 1 ۴. به تعداد مقسوم علیه های مثبت عدد n .

۸- مرتبه عنصر $(\bar{2}, \bar{4}, \bar{2})$ در گروه $Z_4 \times Z_{12} \times Z_6$ کدام است؟

۱. 2 ۲. 3 ۳. 6 ۴. 18

۹- کدام یک از گروه های زیر دوری است؟

۱. $Z_2 \times Z_2$ ۲. $Z_3 \times Z_6 \times Z_5$ ۳. $Z_2 \times Z_7$ ۴. $Z_2 \times Z_3 \times Z_9$

۱۰- کدام یک از جایگشت های زیر زوج است؟

۱. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ۲. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ۳. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ ۴. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

۱۱- مرتبه جایگشت $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ کدام است؟

۱. 2 ۲. 3 ۳. 1 ۴. 5

۱۲- برای گروه متناهی G و زیرگروه H از G حاصل $|G:H|$ برابر است با

۱. $|G|$ ۲. $|H|$ ۳. $\frac{|G|}{|H|}$ ۴. $|G||H|$

۱۳- فرض کنید H و K زیرگروه های متناهی گروه G باشند به طوری که $(|H|, |K|) = 1$. در این صورت $H \cap K$ کدام است؟

۱. H ۲. K ۳. G ۴. $\{e_G\}$

۱۴- گروه G با مرکز $Z(G)$ را در نظر بگیرید. گزینه نادرست کدام است؟

۱. $Z(G)$ همواره یک زیرگروه نرمال G است. ۲. $Z(G)$ همواره زیرگروه G است.
۳. هر زیرگروه از $Z(G)$ در G نرمال است. ۴. همواره $G = Z(G)$

۱۵- قضیه کیلی بیان می کند که

۱. هر گروه دوری متناهی است.
۲. هر گروه از مرتبه عدد اول p دوری است.
۳. مرتبه هر زیرگروه از یک گروه متناهی مرتبه آن گروه را عاد می کند.
۴. هر گروه دلخواه با گروهی از جایگشت ها یکرخت است.

۱۶- هسته همریختی $\varphi: Gl(2, R) \rightarrow (R - \{0\}, \cdot)$ با ضابطه تعریف $\varphi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = ad - bc$ کدام است؟

۱. $Gl(2, R)$
۲. $Sl(2, R)$
۳. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$
۴. $R - \{0\}$

۱۷- شرط لازم و کافی برای این که همسانی $\varphi: G \rightarrow K$ یک به یک باشد کدام است؟

۱. $\text{Ker } \varphi = G$
۲. $\text{Ker } \varphi = \{e_G\}$
۳. $\text{Ker } \varphi \triangleleft G$
۴. $\text{Ker } \varphi \leq G$

۱۸- حلقه بخشی حلقه ای است یک دار $(1 \neq 0)$ که

۱. مقسوم علیه صفر غیر بدیهی نداشته باشد.
۲. جابجایی باشد.
۳. مرتبه اش توانی از یک عدد اول باشد.
۴. هر عضو غیر صفر آن یک یک باشد.

۱۹- برای قلمرو صحیح R و ایده آل I از R کدام گزینه نادرست است؟

۱. $\frac{R}{I}$ تعویض پذیر است.
۲. $\frac{R}{I}$ دارای عنصر یکه است.
۳. $\frac{R}{I}$ قلمرو صحیح است.
۴. $\frac{R}{I}$ میدان است هرگاه I ایده آل ماکزیمال R باشد.

۲۰- فرض کنید $\varphi: R \rightarrow T$ یک همسانی و S ایده آلی از R باشد. در این صورت

۱. همواره $\varphi(S)$ ایده آل T است.
۲. اگر φ یک به یک باشد آنگاه $\varphi(S)$ ایده آل T است.
۳. اگر φ پوشا باشد آنگاه $\varphi(S)$ ایده آل T است.
۴. برای آن که $\varphi(S)$ ایده آل T باشد لازم است که φ دوسویی باشد.

سوالات تشریحی

- ۱- فرض کنید $G = \langle x \rangle$ گروهی دوری از مرتبه n باشد. ثابت کنید اگر m عدد n را تقسیم کند آنگاه G دارای زیرگروه منحصر بفرد از مرتبه m است. ۱.۲۰ نمره
- ۲- جایگشت $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 2 & 7 & 6 & 1 & 8 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ را به صورت حاصل ضرب دوره‌های از هم جدا بنویسید. زوج و یا فرد بودن جایگشت α را با ذکر دلیل مشخص کنید. ۱.۲۰ نمره
- ۳- فرض کنید R یک حلقه و $a, b, c \in R$ چنان باشد که a یک مقسوم علیه صفر نیست. نشان دهید که اگر $ab = ac$ آنگاه $b = c$. ۱.۲۰ نمره
- ۴- نشان دهید که در یک حلقه تعویض پذیر با عنصر یکه هر ایده آل ماکسیمال یک ایده آل اول است. ۱.۲۰ نمره
- ۵- فرض کنید S حلقه توابع حقیقی روی R تحت جمع و ضرب توابع باشد. عدد حقیقی $r \in R$ را ثابت فرض کنید. همریختی پوشای $\varphi_r : S \rightarrow R$ را با ضابطه $\varphi_r(f) = f(r)$ در نظر بگیرید. به ازای هر $r \in R$ نشان دهید که $I_r = \{f \in S \mid f(r) = 0\}$ ایده آل ماکسیمال S است. ۱.۲۰ نمره

شماره سوال	پاسخ صحیح
1	ج
2	ب
3	د
4	د
5	ج
6	الف
7	د
8	ج
9	ج
10	د
11	الف
12	ج
13	د
14	د
15	د
16	ب
17	ب
18	د
19	ج
20	ج

۱- تقسیم روی کدامیک از مجموعه های زیر یک عمل دوتایی است؟

۱. N ۲. Z ۳. Q ۴. $R - \{0\}$

۲- معکوس عنصر 4 در گروه $(Z_{12}, \oplus)$ کدام گزینه است؟

۱. 3 ۲. 6 ۳. 8 ۴. 9

۳- فرض کنید $(G, *)$ یک گروه و $x, y \in G$. در این صورت کدام گزینه نادرست است؟

۱. $(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$ ۲. $(x^{-1})^{-1} = x$ ۳. $(x^{-1} * y^{-1})^{-1} = y * x$ ۴. $(x * y)^{-1} = x^{-1} * y^{-1}$

۴- Z را همراه با عمل دوتایی $*$ که به صورت $x * y = x$ تعریف می شود در نظر بگیرید. کدام گزینه درست است؟

۱. $(Z, *)$ گروه است
۲. $*$ روی Z شرکت پذیر است
۳. $*$ روی Z جابجایی است
۴. $(Z, *)$ دارای عضو همانی است

۵- فرض کنید G یک گروه و $x \in G$ به طوری که $o(x) = 20$. در این صورت $o(x^{16})$ برابر است با:

۱. 5 ۲. 10 ۳. 15 ۴. 20

۶- /تعداد مولدهای گروه $(Z_8, \oplus)$ کدام است؟

۱. 1 ۲. 2 ۳. 3 ۴. 4

۷- فرض کنید H و K دو زیرگروه از گروه G باشند. کدام گزینه درست است؟

۱. HK زیرگروه G است
۲. $H \cap K$ زیرگروه G است
۳. $H \cup K$ زیرگروه G است
۴. $HK = KH$

۸- تعداد زیرگروه های یک گروه دوری از مرتبه 20 برابر است با:

۱. 3 ۲. 4 ۳. 5 ۴. 6

۹- در گروه $Z_4 \times Z_9 \times Z_{20}$ رتبه عنصر $(2, 3, 2)$ کدام گزینه است؟

۱. 20 ۲. 30 ۳. 40 ۴. 60

۱۰- جایگشت $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ را در S_5 در نظر بگیرید. کدام گزینه درست است؟

۱. f یک جایگشت فرد است و $o(f) = 3$.
 ۲. f یک جایگشت زوج است و $o(f) = 3$.
 ۳. f یک جایگشت فرد است و $o(f) = 6$.
 ۴. f یک جایگشت زوج است و $o(f) = 6$.

۱۱- برای زیرگروه H از گروه G رابطه هم ارزی $\sim$ را به صورت زیر تعریف می کنیم.
 $\forall x, y \in G, x \sim y \Leftrightarrow yx^{-1} \in H$. کلاس هم ارزی x کدام گزینه است؟

۱. Hx .
 ۲. xH .
 ۳. H .
 ۴. HxH .

۱۲- گروه $(Z_{20}, \oplus)$ و $H = \langle 4 \rangle$ را در نظر بگیرید. در این صورت $[G:H]$ برابر است با:

۱. 4 .
 ۲. 10 .
 ۳. 5 .
 ۴. 15 .

۱۳- کدامیک از گروه های زیر دوری هستند؟

۱. گروه از مرتبه 4 .
 ۲. گروه از مرتبه 7 .
 ۳. گروه از مرتبه 8 .
 ۴. گروه از مرتبه 9 .

۱۴- فرض کنید G یک گروه آبلی باشد. کدام گزینه درست نیست؟

۱. همه زیرگروه های G آبلی هستند
 ۲. همه زیرگروه های G در G نرمال هستند
 ۳. همه زیرگروه های G آبلی و نرمال در G هستند
 ۴. همه زیرگروه های G آبلی ولی لزوما در G نرمال نیستند.

۱۵- فرض کنید $\varphi: (Z, +) \rightarrow (Z_n, \oplus)$ و $\varphi(m) = \overline{m}$ که در آن $\overline{m}$ با قیمانده m با کالبد n است. کدام گزینه درست است؟

۱. φ یک همسانی پوشا است
 ۲. φ یک همسانی یک به یک است
 ۳. φ یک همسانی یک به یک و پوشا است
 ۴. φ یک همسانی یک به یک ولی پوشا نیست

۱۶- فرض کنید H و K زیرگروه های G و $K \triangleleft G$. کدام گزینه درست است؟

۱. $\frac{HK}{H} \cong \frac{H}{H \cap K}$.
 ۲. $\frac{HK}{H} \cong \frac{K}{H \cap K}$.
 ۳. $\frac{HK}{K} \cong \frac{H}{H \cap K}$.
 ۴. $\frac{HK}{K} \cong H$.

۱۷- گروه $\frac{4Z+6Z}{6Z}$ با کدامیک از گروه های زیر یکرخت است؟

۱. $\frac{4Z}{12Z}$ ۲. $\frac{4Z}{8Z}$ ۳. $\frac{6Z}{12Z}$ ۴. $\frac{6Z}{24Z}$

۱۸- تعداد عناصر یکه در حلقه Z_{10} کدام است؟

۱. ۲ ۲. ۳ ۳. ۴ ۴. ۵

۱۹- در یک حلقه تعویض پذیر با عنصر یکه R ایده ال I یک ایده ال ماکسیمال است اگر و فقط اگر

۱. $\frac{R}{I}$ قلمرو صحیح باشد ۲. $\frac{R}{I}$ حلقه بدیهی باشد
۳. $\frac{R}{I}$ میدان باشد ۴. I ایده ال اول باشد.

۲۰- فرض کنید R و S حلقه هایی با عنصر یکه بوده و $\varphi: R \rightarrow S$ یک همسانی حلقه ها باشد. کدام گزینه درست است؟

۱. $\varphi(1_R) = 1_S$ ۲. اگر φ پوشا باشد آنگاه $\varphi(1_R) = 1_S$
۳. اگر φ یک به یک باشد آنگاه $\varphi(1_R) = 1_S$ ۴. $\varphi^{-1}(1_S) = 1_R$

سوالات تشریحی

۱.۴۰ نمره

۱- ثابت کنید هر گروه دوری آبلی است

۱.۴۰ نمره

۲- ثابت کنید که هر گروه از مرتبه عدد اول P دوری است

۱.۴۰ نمره

۳- فرض کنید $\varphi: G \rightarrow K$ یک همسانی پوشا از گروه G به گروه K باشد. ثابت کنید $K \cong \frac{G}{Ker(\varphi)}$

۱.۴۰ نمره

۴- ثابت کنید که هر قلمرو صحیح متناهی یک میدان است.

۱.۴۰ نمره

۵- ثابت کنید که در یک حلقه تعویض پذیر با عنصر یکه هر ایده ال ماکسیمال یک ایده ال اول است.

شماره سوال	پاسخ صحیح
1	د
2	ج
3	د
4	ب
5	الف
6	د
7	ب
8	د
9	ب
10	ج
11	الف
12	الف
13	ب
14	د
15	الف
16	ج
17	الف
18	ج
19	ج
20	ب

۱- کدام یک از مجموعه های زیر با عمل داده شده گروه نیست؟

۱. $(R, +)$ ۲. $(R, \cdot)$

۳. $R - \{0\}$ با عمل دوتایی $a * b = 2ab$ ۴. $GL(2, R)$ با عمل ضرب ماتریس ها

۲- فرض کنید که $(G, *)$ یک گروه و $x, y \in G$. کدام گزینه صحیح نمی باشد؟

۱. $(x * y)^{-1} = x^{-1} * y^{-1}$ ۲. اگر $x * y = e$ و $y * x = e$ باشد، آنگاه $y = x^{-1}$

۳. $x * e = x$ ۴. $(x^{-1})^{-1} = x$

۳- فرض کنید X یک مجموعه دلخواه باشد. در این صورت $P(X)$ با کدام یک از اعمال زیر تشکیل گروه می دهد؟

۱. اجتماع ۲. تفاضل متقارن ۳. اشتراک ۴. تفاضل

۴- گروه اعداد مختلط همراه با عمل ضرب $(\mathbb{C}, \cdot)$ را در نظر بگیرید. در این صورت رتبه $2+3i$ کدام گزینه است؟

۱. ۲ ۲. ۳ ۳. نامتناهی ۴. ۶

۵- کدام یک از گروه های زیر دوری است؟

۱. گروه چهارتایی کلین V_4 ۲. $(Q, +)$

۳. $(Q^+, \cdot)$ ۴. برای $n \geq 2$ ، $(Z_n, \oplus)$

۶- فرض کنید که G یک گروه و H زیر گروه باشد، در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

۱. $G = (R^+, \cdot)$ و $H = (Q^+, \cdot)$ ۲. $G = (R^+, \cdot)$ و $H = (R - \{0\}, \cdot)$

۳. $G = (Q^+, \cdot)$ و $H = (R^+, \cdot)$ ۴. $G = (Q^+, \cdot)$ و $H = (R - \{0\}, \cdot)$

۷- فرض کنید $G_1 = G_2 = (Z, +)$. در گروه حاصل ضربی $Z \times Z$ کدام گزینه صحیح نمی باشد؟

۱. عضو خنثی آن $(0, 0)$ است. ۲. $Z \times Z$ یک گروه دوری است.

۳. هر عضو مانند (a, b) دارای معکوس $(-a, -b)$ است. ۴. $(1, 1)$ مولد گروه $Z \times Z$ نیست.

۸- کدام یک از گروه های زیر دوری است؟

۱. $Z_{15} \times Z_{16}$ ۲. $Z_{14} \times Z_6$ ۳. $Z_2 \times Z_2$ ۴. $Z_{10} \times Z_7 \times Z_{15}$

۹- فرض کنید که $\beta = (2,3)(4,5)$ و $\alpha = (2,4,6)$ دو جایگشت در S_6 باشد. کدام گزینه درست است؟

۱. $\beta\alpha\beta^{-1}(6) = 5$ ۲. $\beta\alpha\beta^{-1}(5) = 4$ ۳. $\beta\alpha\beta^{-1}(5) = 6$ ۴. $\beta\alpha\beta^{-1}(4) = 6$

۱۰- فرض کنید H, K زیر گروه های متناهی گروه G باشد به طوری که $(|H|, |K|) = 1$. کدام گزینه درست است؟

۱. $H \cap K = \{e\}$ ۲. $H \cap K = H$ ۳. $H \cap K = K$ ۴. $H \cap K = G$

۱۱- کدام یک از عبارات زیر صحیح نیست؟

۱. گروه هامیلتونی Q_8 تنها دارای یک زیر گروه نرمال است.
۲. اگر G یک گروه باشد، آنگاه هر زیر گروه از $Z(G)$ در G نرمال است.
۳. اگر H یک زیر گروه G باشد، به طوری که $[G : H] = 2$ ، آنگاه H در G نرمال است.
۴. اگر G یک گروه آبلی باشد، آنگاه هر زیر گروه آن نرمال در G است.

۱۲- فرض کنید $\varphi : G \rightarrow H$ یک همسانی باشد. در این صورت کدام گزینه درست است؟

۱. $\varphi(e_G) = e_H$
۲. به ازای هر $x \in G$ و هر عدد صحیح n ، $\varphi(x^n) = [\varphi(x)]^n$
۳. اگر $O(x) = n$ آنگاه $O[\varphi(x)]$ ، n را تقسیم می کند.
۴. اگر φ یک به یک باشد، آنگاه $H \triangleleft G$ نتیجه می دهد که $\varphi(H) \triangleleft G$.

۱۳- قضیه کیلی بیان می کند که:

۱. هر گروه با یک گروه دوری یکرخت است.
۲. هر گروه با زیر گروهی از Z_n یکرخت است.
۳. هر گروه G با زیر گروهی از جایگشت های S_G یکرخت است.
۴. هر گروه با یک گروه آبلی یکرخت است.

۱۴- فرض کنید $G = (Z, +)$ و $H = 4Z$ و $K = 6Z$. در این صورت کدام گزینه درست است؟

۱. گروه $4Z/12Z$ گروهی دوری از مرتبه 3 است.
۲. گروه $2Z/6Z$ گروهی غیردوری از مرتبه 3 است.
۳. گروه $2Z/6Z$ گروهی دوری از مرتبه 2 است.
۴. گروه $4Z/12Z$ گروهی غیر دوری از مرتبه 4 است.

۱۵- فرض کنید $G = (Z_6, \oplus)$ ، $H = \langle 2 \rangle$ و $K = \langle 3 \rangle$. در این صورت کدام گزینه درست است؟

۱. $H \times K \cong Z_3$ ۲. $H \times K \cong Z_6$ ۳. $H \times K \cong Z_2$ ۴. $H \times K \cong Z$

۱۶- کدام یک از حلقه های زیر یک حلقه با عضو یکه نمی باشد؟

۱. $(Z, +, \cdot)$ ۲. $(R, +, \cdot)$ ۳. $(2Z, +, \cdot)$ ۴. $(Z_n, \oplus, \otimes)$

۱۷- به ازای هر عدد طبیعی $n \geq 2$ ، $[S_n : A_n]$ برابر کدام است؟

۱. 2 ۲. n فاکتوریل ۳. $\frac{n}{2}$ ۴. n

۱۸- در یک حلقه تعویض پذیر R با عنصر یکه، ایده آل I اول است اگر و فقط اگر

۱. $\frac{R}{I}$ یک میدان باشد. ۲. $\frac{R}{I}$ یک حلقه بخشی باشد.
۳. $\frac{R}{I}$ یک قلمرو صحیح باشد. ۴. $\frac{R}{I}$ حلقه صفر باشد.

۱۹- کدام گزینه درست است؟

۱. مشخصه هر میدان نا متناهی عدد اول است.
۲. مشخصه میدان Q عدد اول است.
۳. Z_{13} میدان از مشخصه 13 است.
۴. Z_p برای عدد اول p از مشخصه صفر است.

۲۰- فرض کنید R حلقه غیر صفر و با عضو یکه باشد. در این صورت R یک حلقه بخشی است هر گاه

۱. هر عضو R یک یکه باشد.
۲. $(R, \cdot)$ یک گروه باشد.
۳. $(R - \{0\}, \cdot)$ یک گروه آبلی باشد.
۴. هر عنصر غیر صفر R یک یکه باشد.

سوالات تشریحی

۱.۴۰ نمره

۱- ثابت کنید اگر G یک گروه دوری باشد، آنگاه هر زیر گروه G نیز دوری است.

۱.۴۰ نمره

۲- قضیه لاگرانژ را بیان و اثبات کنید.

۱.۴۰ نمره

۳- ثابت کنید هر قلمرو صحیح متناهی یک میدان است.

۱.۴۰ نمره

۴- نشان دهید در یک حلقه تعویض پذیر با عضو یکه R ، ایده آل I ماکسیمال است اگر و تنها $\frac{R}{I}$ اگر میدان باشد.

۱.۴۰ نمره

۵- فرض کنید R یک حلقه باشد، ثابت کنید R را می توان در یک حلقه نشانند که دارای عضو یکه باشد.

نمبر سوال	ياسخ صحيح
1	ب
2	الف
3	ب
4	ج
5	د
6	الف
7	ب
8	الف
9	ج
10	الف
11	الف
12	د
13	ج
14	الف
15	ب
16	ج
17	الف
18	ج
19	ج
20	د

۱- کدامیک از اعمال دوتایی زیر جابجایی و شرکت پذیر است ؟

۱. عمل $*$ روی Z به صورت $a * b = 2(a + b)$
۲. عمل تفریق روی Z
۳. عمل $*$ روی Z به صورت $a * b = 2ab$
۴. عمل $*$ روی Z به صورت $a * b = a$

۲- عمل دوتایی $*$ روی مجموعه $R - \{1\}$ را به صورت زیر تعریف کنید.

$$\forall x, y \in R - \{1\} \quad x * y = x + y - xy$$

کدام گزینه درمورد $R - \{1\}$ همراه با عمل $*$ درست نیست؟

۱. $(R - \{1\}, *)$ یک گروه است.
۲. $e = 0$ عضو همانی $R - \{1\}$ همراه با $*$ است.
۳. $*$ روی $R - \{1\}$ یک عمل دوتایی شرکت پذیر نیست.
۴. $x' = \frac{x}{x-1}$ معکوس هر عضو مانند x است.

۳- کدام گزینه یک گروه است ؟

۱. $(R^+, +)$
۲. $(Z, *)$ که در آن $*$ برای هر دو عضو x, y از Z به صورت $x * y = x$ عمل می کند
۳. $(\{-1, 1\}, \cdot)$
۴. $(Q, \cdot)$

۴- گروه G با عضو همانی e را در نظر بگیرید. فرض کنید $o(x) = n, x \in G$ باشد. کدام گزینه در مورد گروه G برقرار نیست؟

۱. اگر $x^m = e$ باشد آنگاه n عدد m را تقسیم می کند.
۲. اگر $(m, n) = 1$ آنگاه $o(x^m) = n$.
۳. اگر $x^m = e$ باشد آنگاه $n \leq m$.
۴. مرتبه هر توانی از x ، نیز برابر با n است.

۵- تعداد مولدهای گروه $(Z_{20}, \oplus)$ کدام است ؟

۶- تعداد زیرگروه های $(Z_{36}, \oplus)$ عبارت است از:

۱. ۶ ۲. ۷ ۳. ۸ ۴. ۹

۷- کدام یک از گروه های زیر دوری است؟

۱. $Z_4 \times Z_{12}$ ۲. $Z_9 \times Z_{18}$ ۳. $Z_8 \times Z_9$ ۴. $Z_6 \times Z_8$

۸- کدام یک از گروه های زیر غیر آبلی است؟

۱. مجموعه اعداد صحیح Z با عمل جمع.
۲. مجموعه اعداد ناصفر R با عمل ضرب.
۳. مجموعه عناصر ناصفر Q با عمل ضرب.
۴. S_3

۹- حاصل ضرب $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ در S_5 برابر است با:

۱. $(1 \ 2 \ 4 \ 3)$ ۲. $(1 \ 3 \ 5 \ 2)$ ۳. $(2 \ 4 \ 5 \ 3)$ ۴. $(2 \ 3 \ 4 \ 5)$

۱۰- شاخص زیرگروه $H = \langle \bar{2} \rangle$ از گروه $(Z_{10}, \oplus)$ کدام است؟

۱. ۲ ۲. ۵ ۳. ۱۰ ۴. ۱

۱۱- فرض کنید G گروهی ۶ عضوی و غیردوری باشد. کدام گزینه در مورد گروه G صحیح نیست؟

۱. دارای عضوی از مرتبه ۶ است.
۲. حتما دارای عضوی از مرتبه ۳ است.
۳. با S_3 یکسان است.
۴. دارای عضوی از مرتبه یک است.

۱۲- فرض کنیم $K = \langle 5 \rangle$ زیرگروهی از گروه $G = (Z_{20}, \oplus)$ باشد. کدام گزینه صحیح است؟

۱. اندیس K در G برابر ۴ است.
۲. K دو زیرگروه از مرتبه ۲ دارد.
۳. K در G نرمال است.
۴. G چهار زیرگروه دارد.

۱۳- تعداد زیرگروههای نرمال D_4 برابر است با:

۱. ۴ ۲. ۳ ۳. ۲ ۴. ۱

۱۴- کدام جفت از گروه های داده شده با یکدیگر یکسانند؟

۱. $G_1 = (Z_4, \oplus), G_2 = (Z_8, \oplus)$

۲. $G_1 = (Z_4, \oplus)$ و $G_2 = V$ (چهار عضوی کلین)

۳. $G_1 = (R^+, \circ), G_2 = (R, +)$

۴. $G_1 = (Q^+, \circ), G_2 = (Q, +)$

۱۵- اگر V_4 گروه چهارتایی کلین باشد آنگاه $Aut(V_4)$ با کدام گروه یکسان است.

۱. S_3 ۲. Z_4 ۳. A_4 ۴. V_4

۱۶- همریختی $\phi: GL(2, R) \rightarrow (R - \{0\}, \cdot)$ با ضابطه $\phi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = ad - bc$ را در نظر بگیرید. آنگاه $\ker(\phi)$

برابر است با:

۱. $GL(2, R)$ ۲. $R - \{0\}$ ۳. $SL(2, R)$ ۴. $\{0\}$

۱۷- در مورد گروه $G = Z_3 \times Z_2$ کدام گزینه درست است؟

۱. $G \cong S_3$

۲. G دو زیرگروه از مرتبه 3 دارد.

۳. $G \cong Z_6$

۴. سه زیرگروه از مرتبه 2 دارد.

۱۸- حلقه Z (اعداد صحیح) در کدام گزینه صدق می کند؟

۱. یک حلقه بخشی است.

۲. یک میدان است.

۳. تنها یک ایده آل دارد.

۴. یک قلمرو صحیح است

۱۹- کدام یک از گزاره های زیر صحیح است؟

۱. در یک حلقه تعویض پذیر با عنصر یکه هر ایده ال اول، ماکسیمال است .

۲. در یک حلقه تعویض پذیر با عنصر یکه R ، ایده ال I ماکسیمال است اگر و تنها اگر $\frac{R}{I}$ میدان باشد .

۳. در یک حلقه تعویض پذیر با عنصر یکه R ، ایده ال I اول است اگر و تنها اگر $\frac{R}{I}$ میدان باشد .

۴. هیچ کدام از ایده ال های Z ماکسیمال نیستند .

۲۰- مشخصه میدان های Q, Z_p به ترتیب برابر است با:

۱. $0,0$ ۲. $0, p$ ۳. $1, p$ ۴. $p,0$

سوالات تشریحی

۱- فرض کنید $G = \langle x \rangle$ گروهی دوری از مرتبه n باشد. ثابت کنید به ازای هر عدد صحیح و مثبت m ، گروه G دارای زیر گروهی از مرتبه m است اگر و تنها اگر m عدد n را تقسیم کند.

۲- فرض کنید $G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$. نشان دهید:

الف) اگر به ازای هر $1 \leq i \leq n$ داشته باشیم $g_i \in G_i$ دارای رتبه متناهی باشد، آنگاه $o((g_1, g_2, \dots, g_n))$ کوچکترین مضرب مشترک $o(g_1), \dots, o(g_n)$ است.

ب) اگر هر G_i یک گروه دوری باشد آنگاه G دوری است اگر و تنها اگر به ازای هر $i \neq j$ ، $|G_i|$ و $|G_j|$ نسبت به هم اول باشند.

۳- هر گروه از مرتبه عدد اول P دوری است.

۴- فرض کنیم G و H دو گروه و $\alpha: G \rightarrow H$ یک یکسانی باشد. ثابت کنید:

الف- به ازای هر $x \in G$ ، $O(\alpha(x)) = O(x)$.

ب- G آبلی است اگر و تنها اگر H آبلی باشد.

۵- ثابت کنید هر قلمرو صحیح متناهی، یک میدان است.

پاسخ صحیح

نمبر رد
سوال

ج	۱
ج	۲
ج	۳
د	۴
د	۵
د	۶
ج	۷
د	۸
الف	۹
الف	۱۰
الف	۱۱
ج	۱۲
الف	۱۳
ج	۱۴
الف	۱۵
ج	۱۶
ج	۱۷
د	۱۸
ب	۱۹
ب	۲۰