

عنوان درس: توابع مختلط

۱- فرم استاندارد عدد مختلط $z = \frac{2+i}{3-2i}$ کدام است؟

۱. $\frac{4}{13} + \frac{7}{13}i$ ۲. $\frac{4}{5} + \frac{7}{5}i$ ۳. $\frac{4}{5} - \frac{7}{5}i$ ۴. $\frac{4}{13} - \frac{7}{13}i$

۲- آرگومان اصلی $2+2i$ کدام است؟

۱. $\frac{\pi}{4}$ ۲. $-\frac{\pi}{4}$ ۳. $-\frac{\pi}{2}$ ۴. $\frac{\pi}{2}$

۳- معادله مختلط خطی که از دو نقطه $(1,0)$, $(2,1)$ می گذرد کدام است؟

۱. $(1+i)z + (1-i)\bar{z} = 2$ ۲. $(1-i)z + (1+i)\bar{z} = 2$
۳. $(1+i)z - (1-i)\bar{z} = 2$ ۴. $(1-i)z - (1+i)\bar{z} = 2$

۴- مقدار $z = (2+2\sqrt{3}i)^{30}$ کدام است؟

۱. 4^{30} ۲. -4^{30} ۳. $-i4^{30}$ ۴. $i4^{30}$

۵- ریشه های معادله درجه دوم $z^2 + 2z + 2 = 0$ کدام است؟

۱. $-1+i$, $-1-i$ ۲. $-2+2i$, $-2-2i$ ۳. $1+i$, $1-i$ ۴. $1+2i$, $1-2i$

۶- قسمت حقیقی تابع $f(z) = z^2 - 1$ کدام است؟

۱. $u(x,y) = x^2 - y^2 - 1$ ۲. $u(x,y) = x^2 + y^2 - 1$
۳. $u(x,y) = x^2 - y^2 + 1$ ۴. $u(x,y) = x^2 - y^2$

۷- مقدار $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z}$ روی مسیر محور x ها کدام است؟

۱. 1 ۲. -1 ۳. صفر ۴. 2

۸- کدام گزینه نادرست است؟

۱. $f(z) = |z|^2$ در هر نقطه به جز صفر مشتق پذیر است.
۲. $f(z) = \bar{z}$ در هیچ نقطه از C مشتق پذیر نیست.
۳. $f(z) = |z|^2$ همه جا در C پیوسته است.
۴. $f(z) = \bar{z}$ همه جا در C پیوسته است.

۹- مشتق تابع $f(z) = z^2(1+z^{-24})$ کدام است؟

۱. $2z - 22z^{-22}$

۲. $2z + 22z^{-22}$

۳. $2z - 24z^{-23}$

۴. $2z + 24z^{-23}$

۱۰- کدام یک از گزینه های زیر در مورد تابع $f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}$ درست است؟

۱. همه جا به جز $z = i, -i$ تحلیلی است.

۲. نقطه تکین ندارد.

۳. همه جا تحلیلی است.

۴. نقطه $z = 0$ یک نقطه تکین است.

۱۱- تابع $f(z) = z^2$ نقاط واقع بر هذلولی $xy = v$ را به کدام یک از گزینه های زیر در صفحه w -ها می نگارد؟

$z = x + iy$, u, v اعداد حقیقی ثابت هستند.

۱. روی خط $v = 2xy = 2v$

۲. روی خط $u = x^2 - y^2 = u$

۳. به یک سهمی

۴. نیمه مثبت محور u -ها

۱۲- کدام گزینه در مورد تابع نمایی $f(z) = e^z$ نادرست است؟

۱. یک به یک است.

۲. همه جا تحلیلی است.

۳. دارای دوره تناوب $2\pi i$ است.

۴. هر خط موازی با محور y -ها را به یک دایره می نگارد.

۱۳- کدام گزینه در مورد عدد $z = 1 + i$ در بازه $[0, 2\pi)$ درست است؟

۱. $\ln(1+i) = \frac{1}{2} \ln 2 + i \frac{\pi}{4}$, $\text{Arg}(1+i) = \frac{\pi}{4}$

۲. $\ln(1+i) = \ln 2 + i \frac{\pi}{4}$, $\text{Arg}(1+i) = \frac{\pi}{4}$

۳. $\ln(1+i) = \frac{1}{2} \ln 2 + i \frac{\pi}{2}$, $\text{Arg}(1+i) = \frac{\pi}{2}$

۴. $\ln(1+i) = \ln 2 + i \frac{\pi}{2}$, $\text{Arg}(1+i) = \frac{\pi}{2}$

۱۴- مشتق تابع توان $f(z) = (\sqrt{1+i})^z$ کدام است؟

۱. $\frac{1}{2}(\sqrt{1+i})^z \ln(1+i)$

۲. $\frac{1}{2}(1+i)^z \ln(1+i)$

۳. $(\sqrt{1+i})^z \ln(1+i)$

۴. $(1+i)^z \ln(1+i)$

۱۵- روی مسیر بسته و پاره هموار C مقدار انتگرال $\int_C \cos z \, dz$ کدام است؟

۱. صفر

۲. $\sin z$

۳. $-\sin z$

۴. $-\cos z$

۱۶- کدام گزینه درست است؟

۱. $D = \{z \in C : |z| > 1\}$ همبند ساده نیست.

۲. C همبند ساده نیست.

۳. $D = \{z \in C : |z| \leq 1\} \cup \{\infty\}$ همبند ساده نیست.

۴. $D = \{z \in C : r < |z| < R\}, r, R > 0$ همبند ساده است.

۱۷- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ سری مک لوران کدام تابع است؟

۱. e^z ۲. $\sin z$ ۳. $\cos z$ ۴. $\frac{z}{z-1}$

۱۸- نقطه های $z = -i, z = i, z = 0$ به ترتیب از راست به چپ قطب های از مرتبه چند برای تابع

$$f(z) = \frac{1}{z(z^2+1)^2(z+i)}$$

هستند؟

۱. ساده، مرتبه دوم و مرتبه سوم. ۲. ساده، مرتبه دوم و مرتبه اول.

۳. مرتبه اول، مرتبه دوم و مرتبه اول. ۴. ساده، مرتبه دوم و ساده.

۱۹- حد تابع $f(z) = (x^2 + y^2) + i(2x^2 - 3y)$ وقتی $z \rightarrow 2i$ برابر است با:

۱. $8 - 6i$ ۲. $-8 - 6i$ ۳. $-6 - 8i$ ۴. $-2i$

۲۰- مشتق تابع $f(z) = \left(\frac{z^2+1}{4z+1}\right)^2$ کدام است؟

۱. $\frac{2(z^2+1)(4z^2+2z-4)}{(4z+1)^3}$ ۲. $\frac{(z^2+1)(4z^2+2z-4)}{(4z+1)^2}$

۳. $\frac{(z^2+1)(4z^2+2z-4)}{(4z+1)^2}$ ۴. $\frac{2(z^2+1)(4z^2-2z+4)}{(4z+1)^3}$

سوالات تشریحی

۱- ریشه های چهارم عدد مختلط 1 را بیابید.

۱.۲۰ نمره

۲- نشان دهید تابع $f(z) = 2x + ixy^2, z = x + iy$ در هیچ نقطه از صفحه مختلط مشتق ندارد.

۱.۲۰ نمره

۱.۲۰ نمره

۳- فرض کنید $a, b \neq 0$. درباره نگاشت معکوس $f(z) = \frac{1}{z}$:

الف) ثابت کنید این تابع دایره $C_1: (x - \frac{1}{2a})^2 + y^2 = \frac{1}{4a^2}$ را به خط $u = a$ می نگارد.

ب) ثابت کنید این تابع دایره $C_2: x^2 + (y + \frac{1}{2b})^2 = \frac{1}{4b^2}$ را به خط $u = a$ می نگارد.

ج) این تابع دایره $x^2 + y^2 = r^2$ را به یک دایره می نگارد.

۱.۲۰ نمره

۴- انتگرال $\int_{-1}^1 \frac{dz}{\sqrt{z}}$ را روی مسیر نیم دایره $|z|=1$ در نیمه فوقانی به مرکز $(0,0)$ محاسبه کنید. \sqrt{z} شاخه

ای از تابع دو مقداری $z^{\frac{1}{2}}$ است که $\sqrt{1}=1$.

۱.۲۰ نمره

۵- مانده تابع $f(z) = \frac{z^2 e^{\frac{1}{z}}}{1+z}$ را در نقطه بینهایت محاسبه کنید.

شماره سوال	پاسخ صحيح
1	الف
2	الف
3	الف
4	الف
5	الف
6	الف
7	الف
8	الف
9	الف
10	الف
11	الف
12	الف
13	الف
14	الف
15	الف
16	الف
17	الف
18	الف
19	الف
20	الف

۱- آرگومان اصلی عدد مختلط $z = 1 + i$ کدام است؟

۱. $\frac{\pi}{4}$ ۲. $-\frac{\pi}{4}$ ۳. $-\frac{\pi}{2}$ ۴. $\frac{\pi}{2}$

۲-

معادله مختلط خطی که از دو نقطه $(1, \frac{1}{2})$ و $(2, -\frac{3}{2})$ می‌گذرد کدام است؟

۱. $(2-i)z + (2+i)\bar{z} = 0$ ۲. $(2-i)z + (2-i)\bar{z} = 0$
۳. $(2+i)z + (2-i)\bar{z} = 0$ ۴. $(2-i)z + (1+i)\bar{z} = 0$

۳- مقدار $(1+i)^{100}$ کدام است؟

۱. 2^{100} ۲. 2^{10} ۳. -2^{10} ۴. -2^{100}

۴- ریشه های معادله $z^2 + z + 1 = 0$ کدام است؟

۱. $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ۲. $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$
۳. $-1 \pm \sqrt{3}i$ ۴. $1 \pm \sqrt{3}i$

۵- فرض کنید $f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y$ کدام گزینه با $f'(z)$ برابر است؟

۱. $e^x \cos y + ie^x \sin y$ ۲. $e^x \cos y - ie^x \sin y$
۳. $-e^x \cos y - ie^x \sin y$ ۴. $-e^x \cos y + ie^x \sin y$

۶- کدام گزینه در مورد تابع $f(z) = \bar{z}$ درست است؟

۱. در هیچ نقطه از \mathbb{C} تحلیلی نیست.
۲. در تمام نقاط \mathbb{C} مشتق پذیر است.
۳. در $z = 0$ مشتق پذیر است.
۴. در $z = 1$ مشتق پذیر است.

۷- نقاط تکین تابع $f(z) = |z|$ کدام است؟

۱. نقطه تکین ندارد. ۲. $z = 1$ ۳. $z = 0$ ۴. $z = -1$

۸- قسمت حقیقی تابع مختلط $f(z) = \frac{z-\xi}{z}$ ($z \neq 0$) کدام است؟

۱. $1 - \frac{\xi x}{x^2 + y^2}$

۲. $1 + \frac{\xi x}{x^2 + y^2}$

۳. ۱

۴. $1 - \frac{2x}{x^2 + y^2}$

۹- تابع $f(z) = \frac{1}{z}$ دایره $(x - \frac{1}{2a})^2 + y^2 = \frac{1}{4a^2}$ را به کدام یک از گزینه های زیر می نگارد؟

۱. خط $u = a$

۲. خط $v = a$

۳. دایره $(x + \frac{1}{2a})^2 + y^2 = 1$

۴. به دایره ای که از مبدأ می گذرد

۱۰- کدام گزینه در مورد تابع $f(z) = \sin \bar{z}$ درست است؟

۱. در هیچ نقطه از \mathbb{C} تحلیلی نیست.

۲. بر تمام \mathbb{C} مشتق پذیر است.

۳. تنها بر نقاط روی محور x ها مشتق پذیر است.

۴. تنها بر نقاط روی محور y ها مشتق پذیر است.

۱۱- \ln عدد مختلط $z = i$ کدام است؟

۱. $i \frac{\pi}{2}$

۲. $1 + i \frac{\pi}{2}$

۳. $-i \frac{\pi}{2}$

۴. $1 - i \frac{\pi}{2}$

۱۲- به کمک تابع z^{2i} ، مقدار شاخه اصلی i^{2i} کدام است؟

۱. $\frac{1}{e^\pi}$

۲. e^π

۳. $\frac{1}{e^{2\pi}}$

۴. $e^{2\pi}$

۱۳- کدام گزینه در مورد تابع $f(z) = z^n$ ، ($n \geq 2$) درست است؟

۱. روی \mathbb{C} تحلیلی است و یک به یک نیست.

۲. روی \mathbb{C} نه تحلیلی است و نه یک به یک.

۳. روی \mathbb{C} تحلیلی و یک به یک است.

۴. روی \mathbb{C} تحلیلی نیست اما یک به یک است.

۱۴- تابع خطی کسری T با مشخصات $T(1) = 1$, $T(i) = 3$, $T(0) = 2$ کدام است؟

۲. $w = T(z) = \frac{(2i+1)z + 4i}{(1+i)z - 2i}$

۱. $w = T(z) = \frac{(2i+1)z - 4i}{(1+i)z - 2i}$

۴. $w = T(z) = \frac{(2i+1)z - 4i}{(1+i)z + 2i}$

۳. $w = T(z) = \frac{(2i+1)z + 4i}{(1+i)z + 2i}$

۱۵- روی مسیر بسته و پاره هموار C مقدار انتگرال $\int_C e^z dz$ کدام است؟

۴. e^{-z}

۳. $-e^z$

۲. e^z

۱. صفر

۱۶- کدام یک از میدان های زیر همبند ساده نیست؟

۲. $D = \{z \mid |z| \leq 1\} \cup \{\infty\}$

۱. $D = \{z \mid |z| > 1\}$

۴. $D = \{z = x+iy \mid a < x < b\}$

۳. $D = \mathbb{C}$

۱۷- کدام یک از سری های زیر بسط تیلور e^z حول نقطه $z = i$ است؟

۲. $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n!}$

۱. $e^z = e^i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n!}$

۴. $e^z = e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n!}$

۳. $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z)^n}{n!}$

۱۸- نوع نقطه $z = 0$ برای تابع مختلط $f(z) = \frac{1}{z}$ چیست؟

۴. منفرد

۳. ناتکین

۲. تکین نامنفرد

۱. تکین منفرد

۱۹- در مورد $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z}$ کدام گزینه درست است؟

۴. -1

۳. 1

۲. صفر

۱. وجود ندارد.

۲۰- نقطه $z = 0$ برای تابع $f(z) = \frac{\cos z}{z^2}$ چه نقطه ای است؟

۱. یک قطب مرتبه دوم ۲. یک قطب ۳. یک قطب مرتبه سوم ۴. قطب نیست.

سوالات تشریحی

۱.۲۰ نمره

۱- تابع تحلیلی $f(z) = \frac{2z+1}{z-1}$ را در نظر بگیرید و نشان دهید قسمت های حقیقی و موهومی f توابعی موزون هستند.

۱.۲۰ نمره

۲- انتگرال $\int_C z^2 dz$ را روی مسیر دایره ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع a و در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت را محاسبه کنید.

۱.۲۰ نمره

۳- مانده تابع $f(z) = \frac{z^2 e^{\frac{1}{z}}}{1+z}$ را در بینهایت محاسبه کنید.

۱.۲۰ نمره

۴- همه جوابهای معادله $z^6 + 64 = 0$ را به دست آورید.

۱.۲۰ نمره

۵- تابع $f(z) = z^2$ را در نظر بگیرید. فرض کنید u, v اعداد حقیقی ثابتی باشند.

الف) تصویر هذلولی $xy = v$ را توسط f بیابید.

ب) تصویر $x^2 - y^2 = u$ را توسط f بیابید.

ج) تصویر خط $x = a$ ($a \in \mathbb{R}$ عدد ثابت ناصفر) را توسط f بیابید.

د) تصویر خط $y = b$ ($b \in \mathbb{R}$ عدد ثابت ناصفر) را توسط f بیابید.

شماره سوال	پاسخ صحيح
1	الف
2	الف
3	الف
4	الف
5	الف
6	الف
7	الف
8	الف
9	الف
10	الف
11	الف
12	الف
13	الف
14	الف
15	الف
16	الف
17	الف
18	الف
19	الف
20	الف

۱- آرگومان اصلی عدد $z = \sqrt{3} + i$ کدام است؟

۱. π ۲. $\frac{\pi}{6}$ ۳. $\frac{\pi}{3}$ ۴. $\frac{\pi}{2}$

۲- قسمت موهومی عدد $\frac{1+i}{1-i}$ کدام است؟

۱. 1 ۲. -1 ۳. $-\frac{1}{2}$ ۴. $\sqrt{2}$

۳- زاویه بین بردارهای معرف دو ریشه متوالی معادله $z^6 - 1 = 0$ کدام است؟

۱. $\frac{\pi}{2}$ ۲. $\frac{\pi}{6}$ ۳. $\frac{\pi}{3}$ ۴. $\frac{\pi}{4}$

۴- عدد $z \cdot \bar{z}$ با کدام گزینه برابر است؟

۱. 0 ۲. 1 ۳. $|z|$ ۴. $|z|^2$

۵- کدام گزینه، معادله کشی-ریمان درباره تابع $f(z) = u + iv$ است؟

۱. $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial y}$ ۲. $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$ ۳. $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$ ۴. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x}$

۶- کدام گزینه صحیح است؟

۱. $f(z) = \bar{z}$ در هیچ نقطه از صفحه اعداد مختلط تحلیلی نیست.

۲. $f(z) = \frac{1}{z}$ تابعی تام است.

۳. $f(z) = |z|^2$ همه جا مشتق پذیر است.

۴. $f(z) = z^2$ در مبدا مختصات مشتق ندارد.

۷- نگاره خط $y = 1$ توسط تابع $f(z) = z^2$ کدام است؟

۱. یک دایره است. ۲. یک بیضی است. ۳. یک هذلولی است. ۴. یک سهمی است.

۸- قسمت موهومی عدد $z = \ln(1+i)$ کدام است؟

۱. $\frac{\pi}{2}$ ۲. $\frac{\pi}{4}$ ۳. $\sqrt{2}$ ۴. 1

۹- مقدار شاخه اصلی $f(z) = z^i$ به ازای $z = i$ کدام است؟

۱. $\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}}$ ۲. $\frac{1}{e^{\pi}}$ ۳. e^{π} ۴. $e^{\frac{\pi}{2}}$

۱۰- کدام گزینه صفر تابع $f(z) = \sin z$ است؟

۱. πi ۲. $-\pi i$ ۳. $-\pi$ ۴. $\frac{\pi i}{2}$

۱۱- اگر C مسیر دایره ای در جهت حرکت عقربه های ساعت و با شعاع r حول مبدا مختصات باشد، آنگاه حاصل انتگرال $\int_C \frac{dz}{z}$ برابر است با؟

۱. $2\pi i$ ۲. $-2\pi i$ ۳. πi ۴. $-\pi i$

۱۲- معرف مسیر مستقیم واصل بین نقاط ۱ و i کدام است؟ ($0 \leq t \leq 1$)

۱. $i + t + it$ ۲. $i + 2t$ ۳. $1 + t - it$ ۴. $1 - t + it$

۱۳- اگر C مسیر دایره ای به مرکز مبدا مختصات و شعاع ۱ باشد، آنگاه انتگرال $\int_C \frac{dz}{z-2}$ برابر است با؟

۱. $\frac{\pi i}{2}$ ۲. πi ۳. $2\pi i$ ۴. صفر

۱۴- حاصل انتگرال $\int_{|z|=1} \frac{\cos z}{z(z-4)} dz$ کدام گزینه است؟

۱. $\frac{\pi i}{2}$ ۲. $-\frac{\pi i}{2}$ ۳. πi ۴. $-\pi i$

۱۵- مانده تابع $f(z) = \frac{\cos z}{z^3}$ در نقطه صفر برابر کدام گزینه است؟

۱. $\frac{-1}{2}$ ۲. ۱ ۳. -۱ ۴. ۰

۱۶- کدام گزینه درباره تابع $\frac{\sin z}{z^6}$ و نقطه $z = 0$ صحیح است؟

۱. قطب ساده است. ۲. قطب مرتبه ۶ است. ۳. قطب مرتبه ۵ است. ۴. قطب نیست.

۱۷- کدام گزینه درباره نقطه $z = \infty$ صحیح است؟

۱. تکین اساسی تابع $\sin \frac{1}{z}$ است.
۲. تکین اساسی تابع e^z است.
۳. قطب مرتبه m -ام تابع $\cos z$ است.
۴. تکین بی مایه برای تابع $\sin z + \sin \frac{1}{z}$ است.

۱۸- مانده تابع $f(z) = \operatorname{tg} z$ در نقاط تکین کدام گزینه است؟

۱. ۰
۲. ۱
۳. -۱
۴. بستگی به نقطه تکین مقادیر متفاوتی دارد.

۱۹- حاصل انتگرال $\int_{|z|=2} \frac{5z-2}{z(z-1)} dz$ برابر است با ؟

۱. ۰
۲. πi
۳. $5\pi i$
۴. $10\pi i$

۲۰- ناحیه همگرایی سری لوران $\sum_0^{\infty} \frac{z^n}{3^n} + \sum_1^{\infty} \frac{1}{z^n}$ کدام است؟

۱. $\{z: 1 < |z| < 3\}$
۲. $\left\{z: 1 < |z| < \frac{1}{3}\right\}$
۳. $\{z: -3 < |z| < 1\}$
۴. $\{z: |z| > 3\}$

سوالات تشریحی

۱.۲۰ نمره

۱- همه ریشه های معادله $z^6 = -1$ را به دست آورید.

۱.۲۰ نمره

۲- ابتدا نشان دهید که $u(x, y) = 2xy$ یک تابع موزون است و سپس مزدوج آن را بیابید.

۱.۲۰ نمره

۳- انتگرال $\int_{|z|=2} \frac{z^2 + z + 1}{z(z^2 + 1)} dz$ را محاسبه کنید.

۱.۲۰ نمره

۴- مانده تابع $f(z) = 1 + \frac{1}{z}$ را در ∞ پیدا کنید.

۱.۲۰ نمره

۵- با استفاده از قضیه مانده ها نشان دهید: $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 4)^2} dx = \frac{\pi}{8}$

شماره سوال	پاسخ صحيح
1	ب
2	الف
3	ج
4	د
5	ج
6	الف
7	د
8	ب
9	الف
10	ج
11	ب
12	د
13	د
14	ب
15	الف
16	ج
17	ب
18	ج
19	د
20	الف

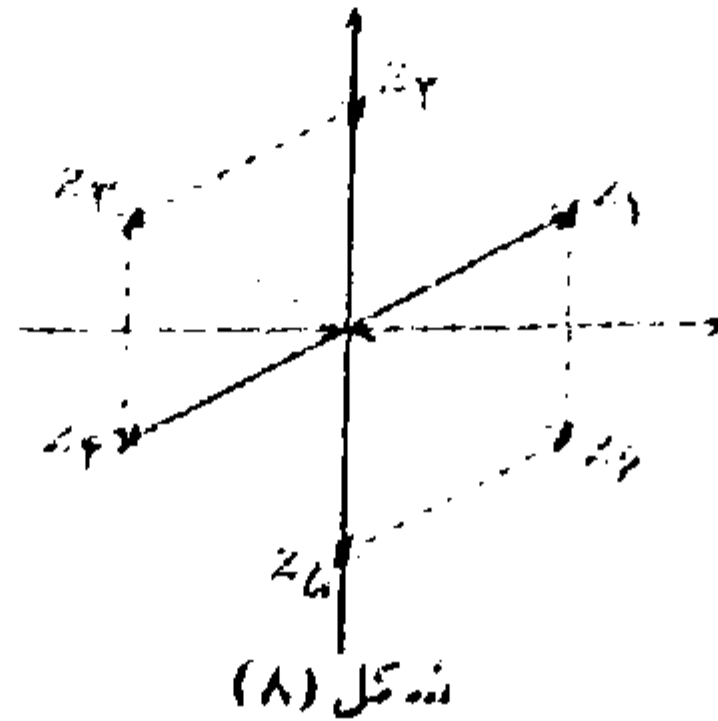
سوالات تشریحی

۱- مشابه مثال 1-3-11 صفحه 40 کتاب:

$$n(2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \rightarrow z = \cos(2k+1)\frac{\pi}{6} + i \sin(2k+1)\frac{\pi}{6}$$

که با فرض $n=6$ و $k=0, 1, 2, 3, 4, 5$ ، نمایش ریشه برای عدد ۱ به دست می‌آید که در

$$\frac{1}{2}$$



$$\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$$

$$\frac{1}{2}$$

۲- مثال صفحه 118

ث/ تابع داخل اندگزال در درون $|z| = 2$ دارای سه نقطه تکین $z = 0$ و $z = i$ و $z = -i$ است. دایره C_1 و C_2 را به مراکز $z = 0$ ، $z = i$ و $z = -i$ و شعاعهای $r = \frac{1}{3}$ در نظر می گیریم. پس:

$$\frac{(z+1)dz}{z^2+1} = 2\pi i \left(\frac{0+1}{0+1} \right) = 2\pi i$$

$$\frac{(z+1)dz}{(z-i)(z+i)} = 2\pi i \left(\frac{-1+i+1}{i(i+i)} \right) = \pi$$

$$\frac{(z+1)dz}{(z-i)(z+i)} = 2\pi i \left(\frac{-1-i+1}{-i(-i-i)} \right) = -\pi$$

$$= 2 \frac{(z^2+z+1)dz}{z(z^2+1)} = \int_{C_1} \frac{(z^2+z+1)dz}{z(z^2+1)} + \int_{C_2} \frac{(z^2+z+1)dz}{z(z^2+1)} + \int_{C_3} \frac{(z^2+z+1)dz}{z(z^2+1)}$$

$$\pi - \pi = 2\pi i$$

۱- قسمت حقیقی و موهومی عدد مختلط $z = \frac{1-i}{1+i}$ (بترتیب) کدام گزینه است؟

۱. 0 و 1 ۲. 1 و 0 ۳. 0 و -1 ۴. 1 و 1

۲- مجموع ریشه های چهارم واحد برابر است با:

۱. 1 ۲. 0 ۳. i ۴. $-i$

۳- قسمت حقیقی تابع $f(z) = z^2$ کدام است؟

۱. $x^2 - y^2$ ۲. $2xy$ ۳. $-2xy$ ۴. $x^2 + y^2$

۴- کدام گزینه درباره تابع $f(z) = \bar{z}$ درست است؟

۱. فقط در نقطه صفر پیوسته و مشتق پذیر است.
۲. در همه نقاط پیوسته و مشتق پذیر است.
۳. در همه نقاط پیوسته و در نقطه صفر مشتق دارد.
۴. در همه نقاط پیوسته اما در هیچ نقطه ای مشتق ندارد.

۵- تابع $f(z) = \frac{\sin z}{z^4 - 1}$ چند نقطه تکین مختلط (غیر حقیقی) دارد؟

۱. 4 ۲. 2 ۳. 3 ۴. 1

۶- کدام تابع موزون است؟

۱. $e^x \cos y$ ۲. e^{x+y} ۳. $y^2 - 4xy$ ۴. $x^2 + y^2$

۷- نگاره خط $X = x_0$ توسط تابع e^z کدام گزینه است؟

۱. خطی که از مبدا می گذرد.
۲. خطی به موازات یکی از محورها مختصات
۳. دایره ای به مرکز مبدا مختصات
۴. دایره ای به مرکز x_0

۸- مزدوج موزون تابع $\sin x \cosh y$ کدام گزینه است؟

۱. $\sin x \cos y$ ۲. $\cos x \sin y$ ۳. $\sinh x \cos y$ ۴. $\cos x \sinh y$

۹- اگر آرگومان اصلی در بازه $[0, 2\pi)$ انتخاب شود، مقدار $\ln(1+i)$ کدام است؟

۱. $\ln(2) + i\frac{7\pi}{4}$ ۲. $i\frac{\pi}{4}$ ۳. $\ln(\frac{1}{2}) + i\frac{\pi}{4}$ ۴. $\ln(\sqrt{2}) + i\frac{\pi}{4}$

۱۰- تابع $\frac{1}{z^n}$ چند مقداری است؟

۱. n مقداری ۲. یک مقداری ۳. دو مقداری ۴. بینهایت مقداری

۱۱- کدام گزینه معرف مسیر واصل بین نقاط 1 و i است؟ $(0 \leq t \leq 1)$

۱. $\gamma(t) = (1+i)t$ ۲. $\gamma(t) = 1+it$ ۳. $\gamma(t) = 1+(i-1)t$ ۴. $\gamma(t) = (i-1)t$

۱۲- حاصل انتگرال $\int_{|z|=1} z d\bar{z}$ (که در آن مسیر انتگرال در جهت مثبت طی می شود) برابر است با:

۱. π ۲. $-2\pi i$ ۳. πi ۴. -2π

۱۳- اگر c دایره ای به مرکز مبدا و شعاع 2 باشد، حاصل انتگرال $\int_c \frac{z^3 + 2z^2 - 1}{z + 2i}$ برابر است با

۱. $-2\pi(8+9i)$ ۲. $-2\pi(8-9i)$ ۳. $2\pi(8+9i)$ ۴. $2\pi(8-9i)$

۱۴- کدام گزینه صحیح است؟

۱. $z^2 + 1 = 0$ جواب ندارد. ۲. هر تابع تحلیلی ثابت است.

۳. $\sin z$ کراندار نیست. ۴. e^z کراندار است.

۱۵- $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$ به کدام تابع همگرا است؟

۱. $\frac{1}{1-z}$ ۲. $\frac{1}{1+z}$ ۳. $\frac{-1}{1-z}$ ۴. $\frac{1}{1-z^2}$

۱۶- کدام گزینه درباره صفرهای تابع $f(z) = \sin(z)$ صحیح است؟

۱. فقط یک صفر با مرتبه 2 دارد.
۲. به صورت $\frac{k\pi}{2}$ با مرتبه 2 هستند.
۳. به صورت $2k\pi$ با مرتبه یک هستند.
۴. به صورت $k\pi$ با مرتبه یک هستند.

۱۷- کدام گزینه صحیح است؟

۱. صفر قطب مرتبه 2 تابع $\frac{e^z}{z}$ است.
۲. صفر قطب مرتبه یک تابع $\frac{e^z}{z}$ است.
۳. صفر قطب مرتبه یک تابع $\frac{\sin z}{z}$ است.
۴. صفر قطب مرتبه 2 تابع $\frac{\sin z}{z}$ است.

۱۸- حاصل انتگرال $\int_c \frac{\cos z}{z^2} dz$ (که در آن دایره ای به مرکز مبدا و شعاع 2 است) برابر است با:

۱. $\frac{\pi i}{3}$
۲. πi
۳. $2\pi i$
۴. 0

۱۹- اگر $f(z) = \tan z$ و z_0 یک صفر تابع باشد، آنگاه $\text{Res}[f, z_0]$ برابر است با:

۱. -1
۲. 1
۳. 0
۴. 2π

۲۰- اگر $f(z) = \frac{2-z^2}{z^3+2z}$ ، آنگاه $\text{Res}[f, \infty]$ برابر است با:

۱. 0
۲. -1
۳. 1
۴. ∞

سوالات تشریحی

۱.۲۰ نمره

۱- نشان دهید $u(x, y) = e^x \cos y + x^2 - y^2$ موزون است و سپس مزدوج موزون آنرا بیابید.

۱.۲۰ نمره

۲- نگاره خط $y = y_0$ که $0 \leq y \leq 2\pi$ توسط تابع نمایی $w = e^z$ را به دست آورید.

۱.۲۰ نمره

۳- اگر C دایره ای به مرکز $z_0 = i$ و شعاع 2 باشد، حاصل انتگرال $\int_c \frac{dz}{z^4 - 1}$ را بدست آورید.

۱.۲۰ نمره

۴- مرتبه صفر $z = 0$ را برای تابع $f(z) = 6 \sin z^3 + z^3(z^6 - 6)$ تعیین کنید.

۱.۲۰ نمره

۵- انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 1} dx$ را محاسبه کنید.

باسمہ صحیح

شماره
سواب

1	ج
2	ب
3	الف
4	د
5	ب
6	الف
7	ج
8	د
9	د
10	الف
11	ج
12	ب
13	الف
14	ج
15	ب
16	د
17	ب
18	د
19	الف
20	ج

۱- برای اعداد مختلط z و w و عدد حقیقی r کدام گزینه نادرست است؟

۱. $\overline{z \pm w} = \overline{z} \pm \overline{w}$ ۲. $z \overline{z} = |z|^2$ ۳. $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{z^2}$ ۴. $\overline{rz} = r \overline{z}$

۲- مقدار عدد $(-1+i)^{28}$ کدام است؟

۱. -2^{14} ۲. $2^{14}i$ ۳. 2^{14} ۴. $-2^{14}i$

۳- معادله $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2}$ چه شکلی را نشان می دهد؟

۱. خط راست ۲. هذلولی ۳. بیضی ۴. دایره

۴- حد تابع مختلط $f(z) = \frac{\overline{z}}{z}, z \neq 0$ در $z = 0$ کدام است؟

۱. 0 ۲. -1 ۳. 1 ۴. وجود ندارد.

۵- کدام یک از توابع مختلط زیر در هیچ نقطه ای از صفحه مختلط مشتق ندارد؟

۱. $f(z) = |z|^2$ ۲. $f(z) = 2x + ixy^2$

۳. $f(z) = \overline{z}^2$ ۴. $f(z) = x^2 + iy^2$

۶- کدام یک از توابع زیر موزون نیست؟

۱. $u(x, y) = e^{2x} \sin y$ ۲. $u(x, y) = 2xy + x^2 - y^2$

۳. $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ ۴. $u(x, y) = e^x \cos y$

۷- نگاره محور y ها تحت تابع $w = e^z$ کدام معادله در صفحه w می باشد؟

۱. $v = u^2$ ۲. $uv = 1$ ۳. $u^2 + v^2 = 1$ ۴. $v = 0$

۸- تابع $f(z) = \sin \overline{z}$ در چه ناحیه ای از صفحه مختلط تحلیلی است؟

۱. کل صفحه مختلط ۲. $\{z \mid |z| < 1\}$

۳. $\{z \mid |z| \geq 1\}$ ۴. در هیچ نقطه ای تحلیلی نیست.

۹- جواب های معادله $\cosh z = 0$ کدام است؟

۴. معادله جواب ندارد.

۳. $z = (k\pi + \frac{\pi}{2})i$

۲. $z = k\pi i$

۱. $z = k\pi + \frac{\pi}{2}$

۱۰- مقدار اصلی عدد i^{2i} کدام است؟

۴. $e^{-\pi^2}$

۳. e^{π^2}

۲. $e^{-\pi}$

۱. e^{π}

۱۱- تصویر دایره $x^2 + (y-1)^2 = 1$ تحت نگاشت $w = \frac{1}{z}$ کدام است؟

۴. $u^2 + v^2 = \frac{1}{2}$

۳. $u^2 + (v+1)^2 = 1$

۲. $v = \frac{-1}{2}$

۱. $u = \frac{1}{2}$

۱۲- کدام یک از تبدیلات خطی کسری زیر نقاط i ، ∞ و -1 را به ترتیب به نقاط i ، ∞ و 1 می نگارد؟

۴. $T(z) = \frac{-1}{iz+1}$

۳. $T(z) = \frac{-iz+1}{z-i}$

۲. $T(z) = \frac{iz+2}{z-i}$

۱. $T(z) = \frac{iz-1}{z-i}$

۱۳- اگر C مسیر مربع شکل به رئوس 1 ، $1+i$ ، i و 0 در جهت مثبت باشد، حاصل انتگرال $\int_C e^z dz$ کدام است؟

۴. $\frac{1-i}{3}$

۳. 0

۲. $\frac{1}{2} - \frac{3}{5}i$

۱. $\frac{2-3i}{7}$

۱۴- حاصل انتگرال $\int_{|z|=1} \frac{\cosh z}{z^5} dz$ کدام است؟

۴. $\frac{\pi i}{12}$

۳. $\frac{2\pi i}{9}$

۲. $\frac{\pi i}{3}$

۱. $-\frac{\pi}{2}$

۱۵- شعاع همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty} (3 + (-1)^n)^n z^n$ کدام است؟

۴. 2

۳. $\frac{1}{2}$

۲. 1

۱. $\frac{1}{4}$

۱۶- نقطه $z = 0$ برای تابع $f(z) = \frac{\cos z}{z^2}$ چه نوع نقطه ای است؟

۱. قطب ساده ۲. قطب مرتبه دوم ۳. تکین بی‌مایه ۴. تکین اساسی

۱۷- نقطه $z = \infty$ برای $f(z) = \sin \frac{1}{z}$ چه نوع نقطه ای است؟

۱. قطب مرتبه اول ۲. قطب مرتبه دوم ۳. تکین بی‌مایه ۴. تکین اساسی

۱۸- مانده تابع $f(z) = \frac{e^z}{\sin z}$ در نقطه $z = 0$ کدام است؟

۱. -1 ۲. 1 ۳. $\frac{1}{2}$ ۴. 2

۱۹- حاصل انتگرال $\int_{|z|=2} \frac{5z-2}{z(z-1)} dz$ برابر کدام گزینه است؟

۱. $10\pi i$ ۲. $5\pi i$ ۳. πi ۴. $2\pi i$

۲۰- مانده تابع $f(z) = 1 + \frac{1}{z}$ کدام است؟

۱. 0 ۲. 1 ۳. -1 ۴. 2

سوالات تشریحی

۱.۲۰ نمره

۱- همه ریشه های ششم عدد 1 را به دست آورید.

۱.۲۰ نمره

۲- تصویر نقاط واقع بر خط $x = a$ و نیز نقاط واقع بر هذلولی $x^2 - y^2 = b$ را تحت تابع $w = z^2$ به دست آورید.

۱.۲۰ نمره

۳- اگر C مسیر پاره هموار شامل خطوط از $z_1 = 0$ به $z_2 = i$ و از $z_2 = i$ به $z_3 = 1+i$ باشد، حاصل انتگرال $\int_C (x + y - ix^2) dz$ را محاسبه کنید.

۱.۲۰ نمره

۴- بسط سری لوران تابع $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}$ را حول $z = 0$ بنویسید و نوع این نقطه را برای این تابع مشخص کنید. سپس حاصل انتگرال $\int_C z^2 e^{\frac{1}{z}} dz$ که در آن C یک دایره دلخواه به مرکز $z = 0$ و در جهت مثبت مثلثاتی است را محاسبه کنید.

۱.۲۰ نمره

۵- به کمک قضیه مانده ها حاصل انتگرال حقیقی $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 2x + 4}$ را محاسبه کنید.

شماره سوال	پاسخ صحیح
1	ج
2	الف
3	د
4	د
5	ب
6	الف
7	ج
8	د
9	ج
10	ب
11	ب
12	الف
13	ج
14	د
15	الف
16	ب
17	ج
18	ب
19	الف
20	د

۱- کدامیک از معادلات زیر نمایش یک دایره می باشد؟

۱. $z + \bar{z} = 3$ ۲. $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = |z|$ ۳. $z\bar{z} = 9$ ۴. $(z + \bar{z})^2 = 1$

۲- مقدار عبارت $\frac{1+i}{1-i}$ کدام است؟

۱. $n-1$ ۲. i ۳. $n+1$ ۴. $2n$

۳- مکان هندسی نقاطی از صفحه مختلط که در رابطه $|z+1| = |z-1|$ صدق می کند کدام است؟

۱. خط راست ۲. بیضی ۳. محور y ها ۴. سهمی

۴- $z = 0$ نقطه انباشتگی کدام یک از مجموعه های زیر است؟

۱. $\left\{ z_n \mid z_n = \frac{1}{2} - \frac{i^n}{n} \right\}$ ۲. $\left\{ z_n \mid z_n = \frac{(-1)^n (1+i)(n-1)}{n+1} \right\}$

۳. $\left\{ z_n \mid z_n = \frac{i^n}{n} \right\}$ ۴. $\left\{ z_n \mid z_n = (1+i)^n \right\}$

۵- با فرض اینکه n عدد طبیعی باشد معادله $z^n + 1 = 0$ در اعداد مختلط چند ریشه دارد؟

۱. $n-1$ ۲. n ۳. $n+1$ ۴. ∞

۶- ساده شده معادله $|z-1| = |z+i|$ کدام معادله زیر می باشد؟

۱. $x^2 + y^2 = 1$ ۲. $y = x$ ۳. $y = -x$ ۴. $(x-1)^2 + y^2 = 1$

۷- حاصل عبارت $(1+i)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{1000}$ کدام است؟

۱. $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۲. $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۳. $(1+i)$ ۴. $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

۸- کدام یک از موارد زیر در مورد مجموعه $A = \{z \mid |z| < 1\} \cup \{z \mid |z-2| < 1\}$ صحیح نمی باشد؟

۱. A کراندار است. ۲. A باز است. ۳. A همبند است. ۴. \bar{A} همبند است.

۹- اگر $u(x, y)$ در حوزه D موزون باشد، آنگاه تابع $f(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}$ در حوزه D

۱. تحلیلی است.
۲. تحلیلی نمی باشد.
۳. یک تابع ثابت است.
۴. فقط در یک نقطه تحلیلی است.

۱۰- در مورد تابع $f(z) = \text{Arg} z$ کدام گزینه درست است؟

۱. همه جا پیوسته است.
۲. روی محور حقیقی منفی ناپیوسته است.
۳. روی محور حقیقی نامنفی ناپیوسته است.
۴. تابعی همه جا تحلیلی است.

۱۱- تصویر ناحیه مستطیلی $0 < x < 1, 0 < y < \frac{\pi}{2}$ در صفحه z تحت تابع $w = e^z$ کدام است؟ $(w = \rho e^{i\varphi})$

۱. $0 < \rho < \frac{\pi}{2}, 1 < \varphi < e$
۲. $0 < \rho < \frac{\pi}{2}, 0 < \varphi < 1$
۳. $0 < \rho < 1, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$
۴. $1 < \rho < e, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$

۱۲- مقدار اصلی عدد i^{2i} کدام است؟

۱. e^{π^2}
۲. $-e^{\pi^2}$
۳. $e^{2\pi^2}$
۴. $e^{-\pi}$

۱۳- حاصل انتگرال $\int_{|z|=10} e^{\bar{z}^2} dz = 0$ برابر است با:

۱. ۰
۲. π
۳. ۱
۴. $2\pi i$

۱۴- اگر C منحنی $y = 2x^2, 0 \leq x \leq 1$ باشد، مقدار $\int_C (\text{Im } z) dz$ چقدر است؟

۱. $\frac{2}{3} + 2i$
۲. $\frac{1}{3} + i$
۳. i
۴. ۰

۱۵- نقطه $z = 0$ برای تابع $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ چه نوع نقطه ای است؟

۱. تکین بیمایه (رفع شدنی)
۲. قطب مرتبه دوم
۳. قطب مرتبه سوم
۴. تکین اساسی

۱۶- ناحیه همگرایی سری توانی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}{z^n}$ کدام است؟

۱. $|z| < e$ ۲. $|z| > e$ ۳. $|z| < \frac{1}{e}$ ۴. $|z| > \frac{1}{e}$

۱۷- حاصل انتگرال $\int_{|z|=2} \frac{5z-2}{z(z-1)} dz$ کدام است؟

۱. $10\pi i$ ۲. $\frac{\pi}{e}$ ۳. $\frac{2\pi i}{e}$ ۴. πe^2

۱۸- مانده تابع $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ در $z=0$ کدام است؟

۱. -1 ۲. 1 ۳. e ۴. 0

۱۹- مقدار $\operatorname{Res}[\frac{1}{z(1-e^{2z})}, 0]$ کدام است؟

۱. 1 ۲. $\frac{1}{4}$ ۳. $\frac{1}{2}$ ۴. 0

۲۰- نقطه $z=1$ برای تابع $f(z) = \frac{z+1}{(z-1)^2}$ چه نوع نقطه ای است؟

۱. قطب مرتبه اول ۲. قطب مرتبه دوم ۳. تکین بیمایه ۴. تکین اساسی

سوالات تشریحی

۱.۲۰ نمره

۱- تابع مختلط $f: C \rightarrow C$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید که هرگاه f و \bar{f} هر دو روی ناحیه D مشتق پذیر باشد، آنگاه f روی D ثابت است.

۱.۲۰ نمره

۲- تصویر نیم نوار $u \geq 0, 0 \leq v \leq \pi$ به وسیله تابع e^w که $w = u + iv$ تعیین کنید.

۱.۲۰ نمره

۳- فرض کنید f تابعی تام، $f(0) = 0$ و A عدد مثبت باشد بطوری که $|f'(z)| \leq A|z|$ برای هر $z \in C$. نشان دهید f به صورت $f(z) = az$ است.

۴- الف) بسط سری لوران تابع $f(z) = \frac{\sinh \frac{1}{z}}{1-z}$ را حول نقطه $z = 0$ با فرض $0 < |z| < 1$ بنویسید و مانده تابع $f(z)$ را در نقطه $z = 0$ به دست آورید.

ب) به کمک قضیه مانده ها و قسمت قبل حاصل انتگرال $\int_{|z|=2} \frac{\sinh \frac{1}{z}}{1-z} dz$ را محاسبه کنید.

۵- به کمک قضیه مانده ها حاصل انتگرال های زیر را حساب کنید.

الف) $\int_{|z|=1} e^{z - \frac{1}{z}} dz$

ب) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4x + 5)^2}$

نمبر سوال	جواب صحيح
1	ج
2	ب
3	ج
4	ج
5	ب
6	ج
7	ج
8	ج
9	الف
10	ب
11	د
12	د
13	الف
14	الف
15	د
16	ب
17	الف
18	د
19	ج
20	ب

سوالات تشریحی

۱.۲۰ نمره

۱- تمرین 2 از 2-3-14 کتاب.

با نوشتن روابط کوشی-ریمان برای دو تابع $f(z) = u + iv$ و $\bar{f}(z) = u - iv$ و مقایسه روابط باهم مشخص می شود که توابع u و v نسبت به x و y ثابتند. در نتیجه f تابعی ثابت است.

۱.۲۰ نمره

۲- تمرین 29-1-4 کتاب.

۱.۲۰ نمره

۳- مثال 4-4-19 صفحه 291 کتاب.

۱.۲۰ نمره

۴- الف)

$$\sinh \frac{1}{z} = (1 + z + z^2 + z^3 + \dots) \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} + \dots \right) \Rightarrow \operatorname{Res}[f(z), 0] = a_{-1} = 1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \dots = \sinh 1$$

ب) در این دایره دونقطه تکین $z = 0$ (تکین اساسی) و $z = 1$ (قطب ساده) وجود دارد. مانده تابع در $z = 0$ در قسمت قبل محاسبه شد. داریم:

$$g(z) = (z-1)f(z) = -\sinh \frac{1}{z} \Rightarrow \operatorname{Res}[f(z), 1] = g(1) = -\sinh 1$$

$$\Rightarrow \int_{|z|=2} \frac{\sinh \frac{1}{z}}{1-z} dz = 2\pi i (\operatorname{Res}[f(z), 0] + \operatorname{Res}[f(z), 1]) = 2\pi i (\sinh 1 - \sinh 1) = 0$$

۱.۲۰ نمره

۵- الف) مشابه تمرین 1 قسمت ب از 5-4-17 کتاب.

$$\Rightarrow a_{-1} = \operatorname{Res}[f(z), 0] = -1 + \frac{1}{1!.2!} - \frac{1}{2!.3!} + \frac{1}{3!.4!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!(n+1)!} \Rightarrow \int_{|z|=1} e^{\frac{-1}{z}} dz = 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!(n+1)!}$$

ب) ریشه های مخرج کسر $-2 \pm 2i$ می باشند که $-2 + 2i$ در نیم صفحه بالائی قرار دارد. داریم:

$$\operatorname{Res}[f(z), -2 + 2i] = 2\pi i \cdot \frac{1}{32i} = \frac{\pi}{16}$$

$$(z) = (z + 2 - 2i)^2 f(z) = \frac{1}{(z + 2 + 2i)^2} \Rightarrow \operatorname{Res}[f(z), -2 + 2i] = \frac{-2}{(-2 + 2i + 2 + 2i)^3} = \frac{-2}{-64i} = \frac{1}{32i}$$

۱- مجموع ریشه های سوم عدد 1 کدام گزینه است؟

۱. 1 ۲. صفر ۳. 2 ۴. 3

۲- قسمتهای حقیقی و موهومی عدد مختلط $z = \frac{1+i}{1-i}$ بترتیب عبارتند از

۱. $i, 0$ ۲. $i, 1$ ۳. $2, 1$ ۴. $1, 0$

۳- کدام گزینه درباره تابع $f(z) = \bar{z}$ صحیح است؟

۱. همه جا پیوسته است اما هیچ جا مشتق ندارد.
۲. همه جا پیوسته و مشتق پذیر است.
۳. هیچ جا پیوسته و مشتق پذیر نیست.
۴. در برخی نقاط هم پیوسته و هم مشتق پذیر است.

۴- تابع $f(z) = \frac{e^z}{z^3 + 1}$ چند نقطه تکین دارد؟

۱. 1 ۲. 2 ۳. 3 ۴. نقطه تکین ندارد.

۵- کدام تابع موزون است؟

۱. $x^2 + y^2$ ۲. $y - 3xy^2$ ۳. $y^2 - 2xy$ ۴. $y^3 - 3x^2y$

۶- تصویر خطی که از مبدا نمی گذرد توسط تابع $w = \frac{1}{z}$ کدام گزینه است؟

۱. خطی که از مبدا می گذرد.
۲. خطی که از مبدا نمی گذرد.
۳. دایره ای که از مبدا می گذرد.
۴. دایره ای که از مبدا نمی گذرد.

۷- مقدار شاخه اصلی تابع $f(z) = z^{2i}$ به ازای $z = i$ کدام گزینه است؟

۱. π^e ۲. $e^{-\pi}$ ۳. e ۴. $\frac{1}{e^{-\pi}}$

۸- کدام گزینه جواب معادله $\text{Ln} z = i \frac{\pi}{2}$ است؟

۱. i ۲. $-i$ ۳. $2\pi i$ ۴. $-2\pi i$

۹- کدام مورد درباره تابع $f(z) = \sinh z$ صحیح نیست؟

۱. تابعی متناوب است. ۲. تابعی موزون است. ۳. تابعی زوج است. ۴. تابعی تحلیلی است.

۱۰- حاصل انتگرال $\int_{|z|=2} \frac{1}{z} dz$ کدام گزینه است؟

۱. صفر ۲. i ۳. 2π ۴. $2\pi i$

۱۱- تابع $\gamma(t) = \cos t + i \sin t$ که در آن $0 \leq t \leq 2\pi$ معرف کدام مسیر است؟

۱. دایره ای به مرکز مبدا و شعاع یک. ۲. دایره ای به شعاع یک که از مبدا عبور می کند. ۳. خط راستی که از مبدا می گذرد. ۴. خط راستی که از مبدا نمی گذرد.

۱۲- حاصل انتگرال $\int_C \frac{1}{z^4 - 1} dz$ که در آن C دایره ای به مرکز i و شعاع $\frac{1}{2}$ است برابر است با

۱. $\frac{\pi}{2}$ ۲. $-\frac{\pi}{2}$ ۳. $\frac{\pi i}{2}$ ۴. $-\frac{\pi i}{2}$

۱۳- اگر f تابعی تام و کراندار باشد، آنگاه

۱. f تابعی ثابت است. ۲. f تابعی مثلثاتی است. ۳. $f = 0$ ۴. چنین تابعی وجود ندارد.

۱۴- مرتبه صفر $z = 0$ تابع $f(z) = \frac{1}{1-z} - 1 - z - z^2$ کدام است؟

۱. ۱ ۲. ۲ ۳. ۳ ۴. ۴

۱۵- حاصل انتگرال $\int_C \frac{z}{z-1} dz$ که در آن C دایره ای به مرکز ۱ و در جهت مثلثاتی است برابر است.

۱. 2π ۲. $2\pi i$ ۳. πi ۴. ۰

۱۶- کدام گزینه درباره $z = 0$ و تابع $f(z) = \frac{\sin z}{z^6}$ صحیح است؟

۱. صفر ساده است. ۲. صفر مرتبه ۶ است. ۳. قطب مرتبه ۶ است. ۴. قطب مرتبه ۵ است.

۱۷- کدام گزینه صحیح است.

۱. $z = 0$ تکین بی مایه برای تابع $\cos \frac{1}{z}$ است.

۲. $z = \infty$ تکین اساسی برای تابع $e^{\frac{1}{z}}$ است.

۳. $z = \infty$ قطب مرتبه دوم برای تابع $\sin z$ است.

۴. $z = \infty$ تکین بی مایه برای تابع $\sin \frac{1}{z}$ است.

۱۸- مانده تابع $f(z) = 1 + \frac{1}{z}$ را در ∞ بیابید.

۱. ۱ ۲. -1 ۳. 0 ۴. $2\pi i$

۱۹- حاصل انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{1+x^2} dx$ برابر است با

۱. $\pi e i$ ۲. πi ۳. $\pi e^{-1} i$ ۴. $\frac{\pi}{e i}$

۲۰- اگر $f(z) = \frac{1}{z^2 + 2z + 5}$ باشد مجموع مانده های f در نقاط تکین کدام گزینه است؟

۱. 0 ۲. $\frac{1}{2i}$ ۳. $-\frac{1}{2i}$ ۴. $\frac{1}{4i}$

سوالات تشریحی

۱.۲۰ نمره

۱- ریشه های چهارم عدد $z = -16$ را بیابید.

۱.۲۰ نمره

۲- نشان دهید تابع $u(x, y) = e^x \cos y$ موزون است و سپس مزدوج موزون آنرا بیابید.

۱.۲۰ نمره

۳- نگاره ناحیه $0 \leq y \leq 1, x \geq 0$ را به وسیله تابع $w = \frac{i}{z}$ پیدا کنید.

۱.۲۰ نمره

۴- قضیه «لیوویل» را بیان و اثبات کنید.

۵- به کمک قضیه مانده ها و مانده در بینهایت حاصل انتگرال $\int_{|z|=2} \frac{z^8}{(z^2+2)^3(z^3+1)} dz$ را محاسبه کنید.

نمبر سوال	ياسخ صحيح
1	ب
2	د
3	الف
4	ج
5	د
6	ج
7	ب
8	الف
9	ج
10	د
11	الف
12	ب
13	الف
14	ج
15	ب
16	د
17	د
18	ب
19	ج
20	الف

۱- مکان هندسی نقاطی از صفحه مختلط که در رابطه $\left| \frac{z-1}{z-2} \right| = \sqrt{2}$ صدق می کند، کدام است؟

۱. دایره ۲. بیضی ۳. هذلولی ۴. خط راست

۲- حاصل عدد $(1+i\sqrt{3})^{-10}$ کدام است؟

۱. $\frac{1}{2^{10}}(-1+i\sqrt{3})$ ۲. $\frac{1}{2^{11}}(-1+i\sqrt{3})$ ۳. $\frac{1}{2^{11}}(1-i\sqrt{3})$ ۴. $\frac{1}{2^{10}}(1-i\sqrt{3})$

۳- معادله مختلط خط راستی که از نقطه $z=1+2i$ گذشته و با خط $y=-x+1$ موازی است کدام است؟

۱. $(1-i)z + (1+i)\bar{z} = 6$ ۲. $(1+2i)z + (1-2i)\bar{z} = 4$
۳. $(1+i)z - (1-i)\bar{z} = 4$ ۴. $(1-2i)z - (1+2i)\bar{z} = 6$

۴- کدام یک از اعداد زیر جزء ریشه های معادله $z^6 + 64 = 0$ می باشد؟

۱. $\sqrt{2} + i$ ۲. $-\sqrt{3} - i$ ۳. $1 + 2i$ ۴. $-1 + i$

۵- اگر تابع موزون $u(x, y) = e^x \sin x$ قسمت حقیقی تابع $f(z) = u + iv$ باشد، تابع $f(z)$ کدام است؟

۱. $e^{\bar{z}}$ ۲. $ie^{i\bar{z}}$ ۳. $e^{-i\bar{z}}$ ۴. $ie^{-i\bar{z}}$

۶- کدام یک از موارد زیر در مورد تابع $f(z) = e^{2x} \cos 3y + ie^{3x} \sin 2y$ صحیح است؟

۱. f در همه نقاط تحلیلی است. ۲. f فقط در $z=0$ مشتق پذیر است.
۳. f فقط در $z=0$ تحلیلی است. ۴. f در همه نقاط مشتق پذیر است ولی تحلیلی نیست.

۷- قسمت حقیقی و موهومی تابع $f(z) = ze^{\bar{z}}$ کدام است؟

۱. $u(x, y) = xe^x \cos y - ye^x \sin y$ ۲. $u(x, y) = xe^x \cos y + ye^x \sin y$
۳. $v(x, y) = ye^x \cos y - xe^x \sin y$ ۴. $v(x, y) = xe^x \cos y + ye^x \sin y$

۸- اگر $u(x, y) = ax^2 + by^2 + cx + dy + e$ موزون باشد آنگاه:

۱. $b=0$ ۲. $a=0$ ۳. $a=b$ ۴. $a+b=0$

۹- تصویر $x = \frac{\pi}{2}$ تحت نگاشت $w = \cos z$ کدام است؟

۱. محور u ها ۲. محور v ها ۳. هذلولی ۴. بیضی

۱۰- تصویر $x^2 - y^2 < 4$ با $x > 0, y > 0$ تحت $w = z^2$ چیست؟

۱. $v > 1, u < 4$ ۲. $v > 0$ ۳. $v > 0, u < 4$ ۴. $0 < u < 3$

۱۱- معادله $e^z = 0$:

۱. جواب ندارد. ۲. تعداد متناهی جواب دارد.

۳. دارای جواب $z = k\pi i$ است. ($k \in \mathbb{Z}$) ۴. دارای جواب $z = \frac{k\pi i}{2}$ است. ($k \in \mathbb{Z}$)

۱۲- انتگرال تابع $f(z) = -iz$ روی خط راست از $A = 1 + i$ تا $B = 3i$ کدام است؟

۱. $1 - \frac{9}{2}i$ ۲. $-1 + \frac{9}{2}i$ ۳. $2 - \frac{5}{4}i$ ۴. $-2 + \frac{5}{4}i$

۱۳- هرگاه C مسیر ساده و بسته حول صفر باشد، حاصل $\int_C \frac{e^{\alpha z}}{z^{n+1}} dz$ (n عدد صحیح مثبت است) کدام است؟

۱. 0 ۲. $\frac{2\pi i}{(n-1)!} \alpha^{n-1}$ ۳. $\frac{2\pi i}{(n+1)!} \alpha^n$ ۴. $\frac{2\pi i}{n!} \alpha^n$

۱۴- حاصل انتگرال تابع $f(z) = |z|^2$ روی مسیر $c: z(t) = \cos t + i \sin t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ کدام است؟

۱. 0 ۲. $i - 1$ ۳. $1 - i$ ۴. $1 + i$

۱۵- نقطه $z = 0$ برای تابع $f(z) = \frac{\sinh \frac{1}{z}}{1 - z}$ چه نوع نقطه ای است؟

۱. قطب مرتبه اول ۲. تکین بیمایه ۳. تکین اساسی ۴. نقطه عادی

۱۶- حاصل انتگرال $\int_{|z|=1} e^{\frac{1}{z}} dz$ برابر است با:

۱. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\pi i}{n!(n+1)!}$ ۲. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-2\pi i}{n!(n+1)!}$ ۳. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2\pi i}{n!(n+1)!}$ ۴. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2\pi i}{n!(n+1)!}$

۱۷- حاصل $\text{Res}[\frac{\cos^3 z}{z^3}, 0]$ برابر است با:

۱. $\frac{3}{2}$ ۲. $-\frac{3}{2}$ ۳. $\frac{2}{3}$ ۴. $-\frac{2}{3}$

۱۸- مقدار انتگرال $\int_{|z-i|=1} \frac{\sin \frac{i\pi z}{2}}{z^2+1} dz$ کدام است؟

۱. 0 ۲. $-\pi$ ۳. $-2\pi i$ ۴. πi

۱۹- حاصل انتگرال $\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{z^6+1}{z^{12}+1} dz$ کدام است؟

۱. $6\pi i$ ۲. $\frac{\pi i}{4}$ ۳. πi ۴. 0

۲۰- حاصل انتگرال $\int_0^\infty \frac{\sin \pi x}{x(1-x^2)} dx$ برابر کدام گزینه است؟

۱. 2π ۲. π ۳. $\frac{\pi}{2}$ ۴. $\frac{\pi}{4}$

سوالات تشریحی

۱.۲۰ نمره

۱- نشان دهید تابع $f(z) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} + i \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & z = x+iy \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$ در $z=0$ در روابط کوشی-ریمان صدق می کند ولی در این نقطه مشتق پذیر نیست.

۱.۲۰ نمره

۲- تصویر قرص $|z| \leq 1$ را تحت نگاشت $w = \frac{1}{(z+i)^2}$ به دست آورید.

۱.۲۰ نمره

۳- قضیه اصل ماکسیمم قدر مطلق را بیان و اثبات کنید.

۱.۲۰ نمره

۴- هرگاه C مسیر نیم دایره در نیم صفحه سمت راست از نقطه $-i$ تا i باشد، ثابت کنید: $\left| \int_C (x^2 + iy^2) dz \right| \leq \pi$

۵- مقدار $\int_{|z|=2} \frac{5z-2}{z(z-1)} dz$ را محاسبه کنید.

پاسخ صحیح

نمبر رد
سوال

الف	۱
ب	۲
الف	۳
ب	۴
د	۵
ب	۶
الف	۷
د	۸
ب	۹
ج	۱۰
د	۱۱
ب	۱۲
د	۱۳
ب	۱۴
ج	۱۵
د	۱۶
ب	۱۷
ب	۱۸
د	۱۹
ب	۲۰

سوالات تشریحی

۱- تمرین 4 از 2-3-14 کتاب.

۱.۲۰ نمره

کافیست مشتقات جزئی توابع u و v را نسبت به x و y در نقطه $(0,0)$ در مبدأ مختصات با تعریف مشتق به دست آوریم که روابط کوشی-ریمان برقرار است. ولی چون مشتقات جزئی u و v نسبت به x و y در نقطه $(0,0)$ پیوسته

نیست $f'(z)$ وجود ندارد (مثلاً u_x در $(0,0)$ حد ندارد و لذا پیوسته نیست)

$$u_x = \frac{x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}.$$

۲-

۱.۲۰ نمره

بهترین روش، تعریف $f(z)$ در $z=0$ است. زیرا $f(z)$ در $z=0$ تعریف نشده است. از این رو، $f(z)$ در $z=0$ تعریف نشده است.

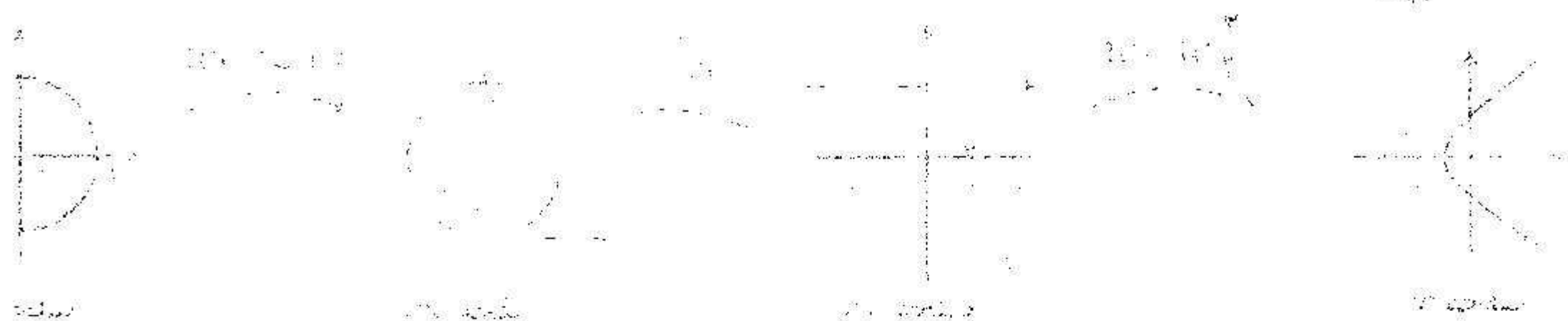
در این مسئله، $f(z)$ در $z=0$ تعریف نشده است. زیرا $f(z)$ در $z=0$ تعریف نشده است. از این رو، $f(z)$ در $z=0$ تعریف نشده است.

در این مسئله، $f(z)$ در $z=0$ تعریف نشده است. زیرا $f(z)$ در $z=0$ تعریف نشده است. از این رو، $f(z)$ در $z=0$ تعریف نشده است.

در این مسئله، $f(z)$ در $z=0$ تعریف نشده است. زیرا $f(z)$ در $z=0$ تعریف نشده است. از این رو، $f(z)$ در $z=0$ تعریف نشده است.

در این مسئله، $f(z)$ در $z=0$ تعریف نشده است. زیرا $f(z)$ در $z=0$ تعریف نشده است. از این رو، $f(z)$ در $z=0$ تعریف نشده است.

که $f(z)$ در $z=0$ تعریف نشده است.



۱.۲۰ نمره

۳- قضیه 4-5-1 صفحه 298 کتاب.

۱.۲۰ نمره

۴- مثال 4-2-14 قسمت الف صفحه 239 کتاب.

۱.۲۰ نمره

۵- 417

۱- اگر $\frac{x-iy}{x+iy} = a+ib$ باشد، مقدار a^2+b^2 برابر است با:

۱. $\sqrt{2}$ ۲. 1 ۳. 2 ۴. x^2+y^2

۲- مقدار $\text{Arg} \frac{i}{-2-2i}$ برابر است با:

۱. $\frac{\pi}{4}$ ۲. $-\frac{\pi}{4}$ ۳. $\frac{3\pi}{4}$ ۴. $\frac{5\pi}{4}$

۳- کدام عدد مختلط زیر یکی از ریشه های سوم عدد i می باشد؟

۱. $\frac{-i+\sqrt{2}}{2}$ ۲. $\frac{-i+\sqrt{3}}{2}$ ۳. $\frac{i+\sqrt{2}}{2}$ ۴. $\frac{i+\sqrt{3}}{2}$

۴- کدام تابع در $z=0$ تحلیلی است؟

۱. $f(z)=|\bar{z}|$ ۲. $f(z)=\overline{(\bar{z})}$ ۳. $f(z)=\frac{1}{\bar{z}}$ ۴. $f(z)=\text{Re } \bar{z}$

۵- کدام یک از توابع زیر موزون است؟

۱. $\cos x \cdot \sin y$ ۲. $e^{-x} \sinh y$ ۳. $\cosh x \cdot \sinh y$ ۴. $e^y \sin x$

۶- در مورد تابع $f(z)=\frac{\bar{z}}{|z|^2}$ کدام گزینه صحیح است؟

۱. همه جا مشتق پذیر است. ۲. فقط در مبدأ مختصات تحلیلی نیست. ۳. هیچ جا تحلیلی نیست. ۴. در $z=0$ مشتق پذیر است.

۷- تصویر خط $x+y=1$ تحت نگاشت $w=z^2$ کدام است؟

۱. $v=\frac{u^2+1}{2}$ ۲. $v=\frac{-u^2+1}{2}$ ۳. $u=\frac{v^2+1}{2}$ ۴. $u=\frac{-v^2+1}{2}$

۸- یک مزدوج موزون برای تابع $u(x,y)=\sin(x^2-y^2) \cdot \cosh 2xy$ کدام است؟

۱. $v(x,y)=\sin(x^2-y^2) \cdot \sinh 2xy$ ۲. $v(x,y)=\cos 2xy \cdot \sinh(x^2-y^2)$ ۳. $v(x,y)=\cos(x^2-y^2) \cdot \sinh 2xy$ ۴. وجود ندارد.

۹- تابع $w = \ln z$ با $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$ روی چه قسمتی از صفحه z ناتحلیلی است؟

۱. قسمت مثبت محور حقیقی

۲. قسمت منفی محور حقیقی

۳. قسمت مثبت محور موهومی

۴. قسمت منفی محور موهومی

۱۰- حاصل $\int_c \frac{z^6 + 4z^4 - 2z^2 + 1}{(z - 2i)^6} dz$ که در آن c مربعی با رئوس ± 4 و $\pm 4i$ می باشد کدام است؟

۱. $24\pi i$

۲. $-24\pi i$

۳. 24π

۴. -24π

۱۱- مقدار $\int_c z^2 dz$ که c به صورت: $z(t) = t + it^2, 0 \leq t \leq 1$ است کدام است؟

۱. $\frac{2}{3}(i - 1)$

۲. $\frac{3}{2}(i - 1)$

۳. $\frac{3}{2}(i + 1)$

۴. $\frac{2}{3}(i + 1)$

۱۲- حاصل $\int_c z^2 dz$ که در آن c از مبدأ شروع شده و توسط خطوط راست ابتدا به $z = 3$ ، سپس به $z = 3 + i$ و نهایتاً به

$z = 1 + i$ وصل می شود کدام است؟

۱. $\frac{3}{2}(1 + i)$

۲. $\frac{1}{3}(1 - i)$

۳. $\frac{2}{3}(i - 1)$

۴. 0

۱۳- شعاع همگرایی سری توانی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n^2}}{n!}$ کدام است؟

۱. e

۲. 0

۳. 1

۴. ∞

۱۴- سری لوران تابع $f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$ حول نقطه $z = 0$ در ناحیه $|z| > 1$ کدام است؟

۱. $\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n$

۲. $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$

۳. $1 + \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}$

۴. $-\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{z^n}$

۱۵- حاصل انتگرال $\int_{|z|=1} \frac{dz}{z \sin z}$ برابر کدام گزینه است؟

۱. $2\pi i$

۲. πi

۳. $\frac{\pi i}{4}$

۴. 0

۱۶- مانده تابع $f(z) = \frac{\cos z}{e^z - 1}$ در تنها نقطه تکین آن کدام است؟

۱. -1 ۲. 1 ۳. e ۴. \circ

۱۷- مقدار انتگرال $\int_C \frac{e^z}{z^3 - 1} dz$ که در آن C دایره $x^2 + y^2 = 2x$ است کدام است؟

۱. $\frac{2}{3}\pi i$ ۲. $\frac{3}{2}\pi i$ ۳. $\frac{2}{3}\pi e i$ ۴. $-\frac{3}{2}\pi e i$

۱۸- حاصل انتگرال $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin ax}{x^2 + 1} dx$ برابر است با:

۱. πe^{-a} ۲. $\frac{\pi e^{-1}}{a}$ ۳. $\frac{\pi e^{-a}}{a}$ ۴. πe^{-a}

۱۹- حاصل انتگرال $\int_{|z|=4} \frac{dz}{z^2 + 2z + 5}$ کدام است؟

۱. π ۲. $\frac{\pi}{2}$ ۳. $\frac{\pi}{4}$ ۴. \circ

۲۰- نقطه $z = \circ$ برای کدام تابع زیر تکین بی‌مایه نیست؟

۱. $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ ۲. $f(z) = \frac{1 + \cos z}{z^2}$ ۳. $f(z) = \frac{\tan z}{z}$ ۴. $f(z) = \frac{\sec z - 1}{z^2}$

سوالات تشریحی

۱.۴۰ نمره

۱- همه ریشه‌های معادله $(1+z)^6 = (1-z)^6$ را بدست آورید.

۱.۴۰ نمره

۲- ابتدا نشان دهید تابع $v(x, y) = x - \frac{y}{x^2 + y^2}$ موزون است. سپس $v(x, y)$ را طوری به دست آورید که $f(z) = u + iv$ تابعی تحلیلی باشد. این تابع را می‌شناسید؟

۱.۴۰ نمره

۳- تصویر مستطیل $0 \leq x \leq \pi$ و $1 \leq y \leq 2$ را تحت نگاشت $w = e^z$ به دست آورید.

۱.۴۰ نمره

۴- قضیه موررا را بیان و اثبات کنید.

۵- به کمک قضیه مانده ها انتگرال های حقیقی زیر را محاسبه کنید.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx \quad \text{(الف)}$$

(ب)

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{13 + 12\cos \theta}$$

شماره سوال	پاسخ صحیح
1	ب
2	د
3	د
4	ب
5	د
6	ب
7	ب
8	ج
9	د
10	د
11	الف
12	ج
13	د
14	د
15	د
16	ب
17	ج
18	د
19	د
20	ب

سوالات تشریحی

۱- مشابه مثال 1-3-17 کتاب صفحه 42.

۱.۴۰ نمره

۲- برای موزون بودن باید نشان دهیم در رابطه لاپلاس صدق می کند. سپس به کمک روابط کوشی-ریمان

۱.۴۰ نمره

$$u(x, y) = -y + \frac{x}{x^2 + y^2}$$

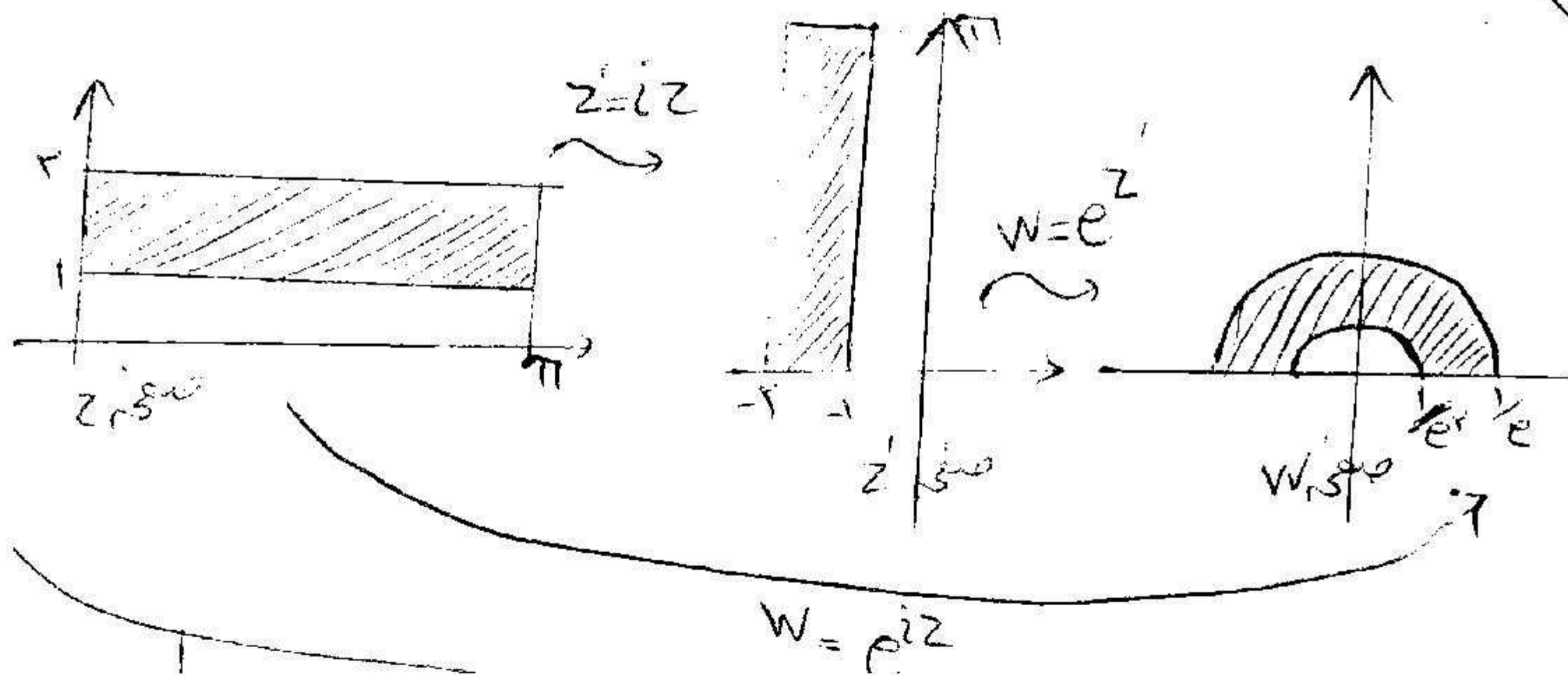
بدست می آید. داریم:

$$f(z) = u + iv = \frac{1}{z} + iz$$

۱.۴۰ نمره

۳- می توان ابتدا مستطیل را تحت تبدیل خطی $z' = iz$ به اندازه 90 درجه دوران داده و به مستطیل $[-2, -1] \times [0, \pi]$

تصویر کنیم. سپس تصویر مستطیل جدید را تحت $w = e^{z'}$ به دست می آوریم. با توجه با اینکه تابع نمائی خطوط افقی را به خطوط پرتوی و خطوط قائم را به دایره به مرکز مبدأ تصویر می کند، تصویر به صورت زیر است:



۱.۴۰ نمره

۴- قضیه 4-4-22 صفحه 295 کتاب.

$$\frac{\frac{dz}{iz}}{+12\left(\frac{z^2+1}{2z}\right)} = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{(3z+2)(2z+3)} = \frac{1}{i} \cdot 2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{1}{(3z+2)(2z+3)}, \frac{-2}{3}\right] = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{1}{2\left(\frac{-2}{3}\right)+3}\right) = \frac{2\pi}{5}$$

ب) تمرین 4-3-6 قسمت ث کتاب.

با توجه به مطالب گفته شده در صفحه 429 کتاب داریم:

$$\frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx = 2\pi i (\operatorname{Res}[f(z), i] + \operatorname{Res}[f(z), 2i]) = 2\pi i \left(\frac{-i+1}{16i} + \frac{3i+7}{48i}\right) = \frac{20\pi}{48} = \frac{5\pi}{12}$$

$$: \frac{z^2 - z + 2}{z^4 + 10z^2 + 9} \Rightarrow \begin{cases} g_1(z) = (z-i)f(z) = \frac{z^2 - z + 2}{(z+i)(z^2+9)} \Rightarrow \operatorname{Res}[f(z), i] = \frac{-i+1}{2i(-1+9)} = \frac{-i+1}{16i} \\ g_2(z) = (z-3i)f(z) = \frac{z^2 - z + 2}{(z+3i)(z^2+1)} \Rightarrow \operatorname{Res}[f(z), 3i] = \frac{-3i-7}{6i(-9+1)} = \frac{3i+7}{48i} \end{cases}$$

شماره سوال	پاسخ صحیح
1	ج
2	ج
3	ب
4	د
5	د
6	ب
7	الف
8	ج
9	ب
10	د
11	ب
12	الف
13	ب
14	ج
15	د
16	ج
17	الف
18	ب
19	ج
20	د

سوالات تشریحی

نمره ۱.۴۰

$$-64 = 64(\cos(2k\pi + \pi) + i\sin(2k\pi + \pi)) \Rightarrow z = 2\left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{6} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{6}\right), \quad k = 0, 1, \dots, 5$$

نمره ۱.۴۰

۲- برای موزون بودن باید نشان دهیم در رابطه لاپلاس صدق می کند. سپس به کمک روابط کوشی-ریمان

$$v(x, y) = 3x^2y - y^3 - x^2 + y^2 \quad \text{بدست می آید. داریم:}$$

$$f(z) = u + iv = z^3 - iz^2$$

نمره ۱.۴۰

۳- مثال صفحه ۲۷۶

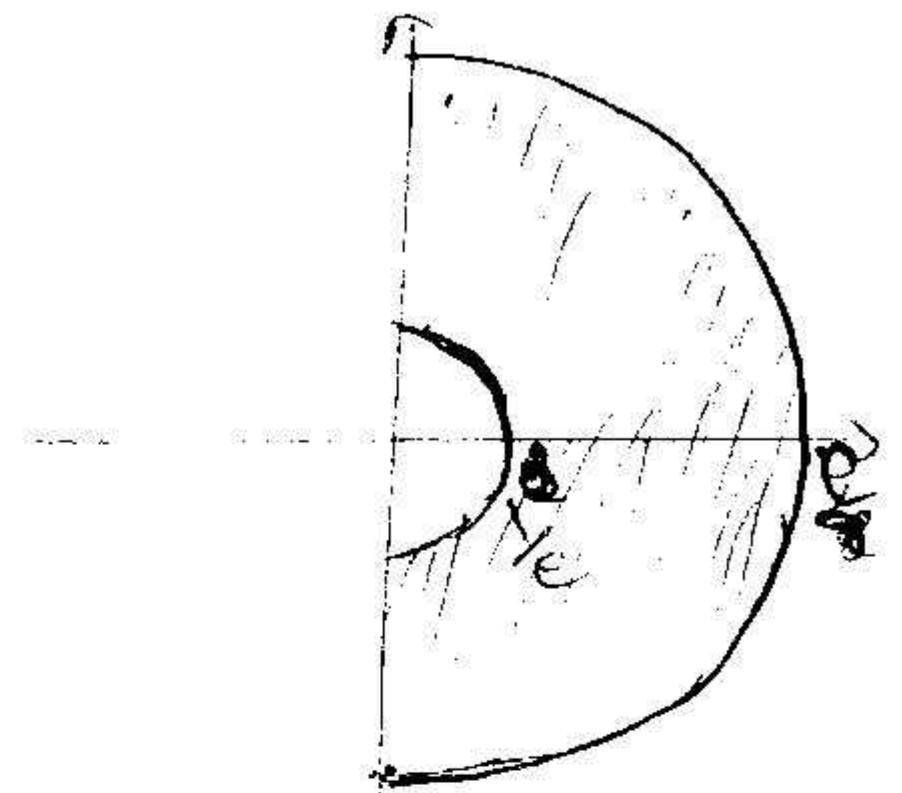
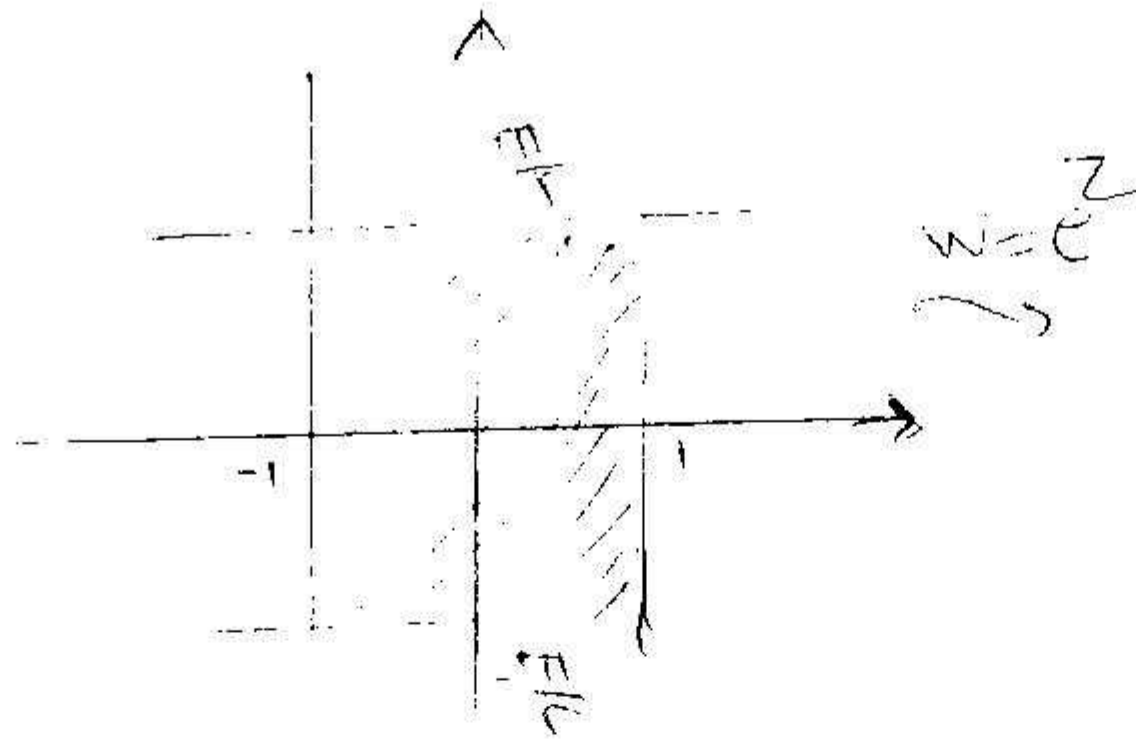
نمره ۱.۴۰

۴- ۴۱۷

نمره ۱.۴۰

۵- چون تصویر خطوط افقی و قائم تحت $w = e^z$ به ترتیب خطوط پرتوی و دایره به مرکز مبدأ است لذا تصویر به صورت زیر است:

(روابط باید نوشته شود.)



۱- مکان هندسی نقاطی از صفحه مختلط که در معادله $\operatorname{Re}(z^2) = 0$ صدق می کند کدام است؟

۱. دایره ۲. بیضی ۳. خطوط راست ۴. هذلولی

۲- جواب های معادله $z^n + z^{n-1} + \dots + z + 1 = 0$ با جوابهای کدام یک از معادلات زیر برابر است؟

۱. $z^{n-1} + 1 = 0, z \neq -1$ ۲. $z^{n+1} - 1 = 0, z \neq 1$ ۳. $z^n - 1 = 0, z \neq 1$ ۴. $z^n + 1 = 0, z \neq -1$

۳- کدام یک از توابع زیر در هیچ نقطه از C تحلیلی نیست؟

۱. $f(z) = e^{z^2}$ ۲. $f(z) = e^{\bar{z}}$ ۳. $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ ۴. $f(z) = e^{\frac{1}{z^2+1}}$

۴- تابع $f(z) = \begin{cases} \frac{(1+i)xy}{x^3+y^3} & z = x+iy \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$ مفروض است. کدام گزینه صحیح است؟

۱. f در $z=0$ مشتق پذیر است و در این نقطه معادلات کوشی-ریمان صدق می کند.
 ۲. f در $z=0$ مشتق پذیر نیست ولی در این نقطه معادلات کوشی-ریمان صدق می کند.
 ۳. f در $z=0$ پیوسته است ولی مشتق پذیر نیست.
 ۴. f در $z=0$ پیوسته است.

۵- اگر توابع f و \bar{f} روی ناحیه D ($D \subseteq C$) مشتق پذیر باشد، آنگاه:

۱. f روی D بیکران است.
 ۲. f روی C بیکران است.
 ۳. f روی D ثابت است.
 ۴. $f = \bar{f}$

۶- همه مقادیر i^{2i} کدام است؟

۱. $e^{(4k-1)\pi}$ ۲. $e^{(2k-1)\pi}$ ۳. $e^{-(2k+3)\pi}$ ۴. $e^{(2k-3)\pi}$

۷- تصویر $0 \leq \operatorname{Arg} z \leq \frac{\pi}{6}$ تحت نگاشت $w = iz^3$ کدام ناحیه از صفحه w می باشد؟

۱. ربع اول ۲. ربع دوم ۳. ربع سوم ۴. ربع چهارم

۸- مقدار $\sin(i)$ برابر است با:

۱. $i \sinh 1$ ۲. $-i \sinh 1$ ۳. $i \cosh 1$ ۴. $-i \cosh 1$

۹- مقدار $\int_{|z-i|=2} \frac{dz}{(z^2+4)^2}$ برابر است با:

۱. $\frac{\pi}{2}$ ۲. $\frac{\pi}{4}$ ۳. $\frac{\pi}{8}$ ۴. $\frac{\pi}{16}$

۱۰- حاصل انتگرال $\int_{|z|=1} \tan z dz$ کدام است؟

۱. πi ۲. $2\pi i$ ۳. $-\pi i$ ۴. 0

۱۱- حاصل انتگرال تابع $f(z) = |z|^2$ روی مسیر خط راستی که نقطه $z=1$ را به $z=i$ وصل می کند کدام است؟

۱. 0 ۲. $\frac{2}{3}(i+1)$ ۳. $\frac{3}{2}(i-1)$ ۴. $\frac{2}{3}(i-1)$

۱۲- حاصل انتگرال $\int_C \frac{(\cosh 2z + \sin \frac{z}{2})^2}{z^4(z^2+16)} dz$ که در آن C اجتماع دایره های $|z|=1$ و $|z|=3$ می باشد کدام است؟

۱. $\sinh 2i$ ۲. $\sin 4$ ۳. $2 \sinh 4$ ۴. 0

۱۳- هرگاه f روی ناحیه D تحلیلی و $f \neq 0$ ، آنگاه تعداد صفرهای f در هر زیرمجموعه فشرده D :

۱. برابر صفر است. ۲. متناهی است. ۳. نامتناهی است. ۴. قابل شمارش نیست.

۱۴- نقطه $z=0$ قطب مرتبه برای تابع $f(z) = \frac{z^{102} + z^{101} + z^{100} + 1}{z^{100}}$ می باشد؟

۱. صدم ۲. صد و یکم ۳. صد و دوم ۴. $z=0$ قطب این تابع نیست.

۱۵- نقطه $z=0$ برای تابع $f(z) = \frac{z - \sin z}{z^3}$ چه نوع نقطه ای است؟

۱. تکین بیمایه ۲. قطب مرتبه دوم ۳. قطب مرتبه سوم ۴. تکین اساسی

۱۶- نقطه $z=0$ تکین اساسی کدام تابع نیست؟

۱. $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ ۲. $f(z) = \sin \frac{1}{z}$ ۳. $f(z) = \frac{1}{\sin z}$ ۴. $f(z) = \cosh \frac{1}{z}$

۱۷- مانده تابع $f(z) = e^{z - \frac{1}{z}}$ در نقطه $z=0$ برابر است با:

۱. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!}$ ۲. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!(2n+1)!}$ ۳. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!}$ ۴. 0

۱۸- شعاع همگرایی سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n$ کدام است؟

۱. e ۲. 1 ۳. $\frac{1}{e}$ ۴. ∞

۱۹- ناحیه همگرایی سری توانی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{z^n}$ کدام است؟

۱. $|z| < \frac{1}{2}$ ۲. $|z| < 2$ ۳. $|z| > 2$ ۴. $|z| > \frac{1}{2}$

۲۰- حاصل انتگرال $\int_{|z|=2} \frac{z^3 dz}{z^4 - 1}$ کدام است؟

۱. $2\pi i$ ۲. πi ۳. $-2\pi i$ ۴. $-\pi i$

سوالات تشریحی

۱.۴۰ نمره

۱- با استفاده از فرمول دِموآور درستی رابطه $(\sqrt{3} - i)^n + (\sqrt{3} + i)^n = 2^{n+1} \cos(\frac{n\pi}{6})$ را بررسی کنید.

۱.۴۰ نمره

۲- ابتدا نشان دهید تابع $u(x, y) = e^x (x \cos y - y \sin y)$ موزون است. سپس مزدوج موزون آن و همچنین تابع تحلیلی $f(z) = u + iv$ را به دست آورید. این تابع را می شناسید؟

۱.۴۰ نمره

۳- تصویر ناحیه بین دو دایره $|z|=1$ و $|z|=2$ در نیم صفحه بالائی را تحت نگاشت $w = \ln z$ با شاخه $\frac{\pi}{2} \leq \theta < \frac{5\pi}{2}$ به دست آورید.

۱.۴۰ نمره

۴- حاصل انتگرال های حقیقی زیر را با استفاده از قضیه مانده ها به دست آورید.

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 - \sin \theta} \quad \text{الف)}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin \pi x}{x^2 + 2x + 5} dx \quad \text{ب)}$$

۱.۴۰ نمره

۵- قضیه:اصل مینیمم قدر مطلق را بیان و اثبات کنید.

ردیف	شرح
1	14
2	1
3	1
4	1
5	14
6	14
7	1
8	14
9	1
10	1
11	1
12	1
13	1
14	14
15	14
16	14
17	14
18	14
19	14
20	14

-1

مکان هندسی نقاطی از صفحه مختلط که در نا معادله $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) < \frac{1}{2}$ صدق می کند کدام است؟

۱. خارج دایره به مرکز $(1,0)$ و شعاع 1
۲. داخل دایره به مرکز $(1,0)$ و شعاع 1
۳. خارج دایره به مرکز $(0,1)$ و شعاع 1
۴. داخل دایره به مرکز $(0,1)$ و شعاع 1

۲- مجموع ریشه های z^n ام واحد کدام است؟

۱. -1
۲. 1
۳. n
۴. 0

۳- یک مزدوج موزون برای تابع $u(x, y) = 3xy^2 + 4xy - x^3$ کدام است؟

۱. $v(x, y) = -3x^2y + 2x^2 - y^3 + 4y + c$
۲. $v(x, y) = 3x^2y + 2x^2 - y^3 + 4y + c$
۳. $v(x, y) = 3xy^2 + 2x^2 + y^3 - 2y^2 + c$
۴. $v(x, y) = -3x^2y - 2x^2 + y^3 + 2y^2 + c$

۴- اگر $u(x, y) = 2x(1 - y)$ و v مزدوج موزون u باشد (یعنی $f(z) = u + iv$ تحلیلی باشد) آنگاه:

۱. $f'(z) = 2iz$
۲. $f'(z) = -y + ix$
۳. $f'(z) = 2(1 - y) + 2ix$
۴. $f'(z) = 2(1 - y) + 2i(x - 1)$

۵- کدام یک از موارد زیر برای تابع $f(z) = \operatorname{Arg} z$ با $-\pi \leq \operatorname{Arg} z < \pi$ صحیح است؟

۱. این تابع روی نیم محور حقیقی مثبت تحلیلی نیست.
۲. این تابع روی نیم محور حقیقی منفی تحلیلی نیست.
۳. این تابع روی کل محور حقیقی تحلیلی نیست.
۴. این تابع روی کل محور حقیقی تحلیلی است.

۶- تابع مختلط $f(z) = x$ روی کدام ناحیه از C مشتق پذیر است.

۱. در تمام C
۲. درون دایره واحد
۳. روی محور x ها
۴. در هیچ نقطه از C مشتق پذیر نیست

۷- هرگاه $f(z) = \frac{xy}{x^2 + y^2} + ixy$ باشد، مقدار $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$ کدام است؟

۱. 0
۲. 1
۳. $1 + i$
۴. موجود نیست.

۸- تصویر خط قائم $x = \frac{1}{2}$ تحت نگاشت $w = z^2$ کدام معادله زیر می باشد؟

۱. $u = \frac{1}{4} - v^2$

۲. $u = v^2 - \frac{1}{4}$

۳. $v = u^2 - \frac{1}{4}$

۴. $v = \frac{1}{4} - u^2$

۹- در تابع $w = \ln z$ ، قسمت حقیقی تابع کدام است؟

۱. $u = \ln(x^2 + y^2)$

۲. $u = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$

۳. $u = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

۴. $u = \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$

۱۰- جواب های معادله $e^z = 1 - i$ کدام است؟

۱. $z = \ln \sqrt{2} + i(2k\pi + \frac{3\pi}{4})$

۲. $z = \ln \sqrt{2} - i(2k\pi - \frac{\pi}{4})$

۳. $z = \ln \sqrt{2} + i(2k\pi - \frac{\pi}{4})$

۴. معادله جواب ندارد.

۱۱- مقدار انتگرال $\int_{|z|=1} \frac{z^4 + 1}{(2z + 1)^3} dz$ کدام است؟

۱. $-\frac{3\pi i}{8}$

۲. $\frac{\pi i}{8}$

۳. $\frac{3\pi}{8}$

۴. $\frac{3\pi i}{8}$

۱۲- حاصل $\int_{|z|=\frac{4}{5}} \frac{dz}{z^7 + z^6 + \dots + z + 1}$ کدام است؟

۱. $2\pi i$

۲. $4\pi i$

۳. $8\pi i$

۴. ۰

۱۳- ماکسیمم قدر مطلق تابع $f(z) = z^2$ روی ناحیه مربع شکل با رئوس ± 2 و $\pm 2i$ کدام است؟

۱. 4

۲. 8

۳. $\frac{6}{5}$

۴. 16

-۱۴

هرگاه سری لوران تابعی به صورت $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} n z^n$ باشد، سری لوران f در چه ناحیه ای همگراست؟

۱. $|z| < 1$

۲. $|z| > 1$

۳. $1 < |z| < \frac{1}{4}$

۴. سری لوران در هیچ نقطه همگرا نیست.

-۱۵

بسط مک لوران تابع $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$ در ناحیه $|z| < 1$ حول $z=0$ کدام است؟

۱. $1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} z^n$

۲. $-\sum_{n=1}^{\infty} z^n$

۳. $1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} z^n$

۴. $-1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} z^n$

-۱۶

مانده تابع $f(z) = \frac{1}{z^2 \sin z}$ در نقطه $z=0$ برابر است با:

۱. $\frac{1}{3!}$

۲. ۱

۳. $\frac{1}{2!}$

۴. ۰

-۱۷

نقطه $z=0$ برای تابع $f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^2}$ چه نوع نقطه ای است؟

۱. قطب مرتبه اول

۲. قطب مرتبه دوم

۳. تکین اساسی

۴. تکین بیمایه

-۱۸

مقدار انتگرال $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + 5x^2 + 4}$ برابر است با:

۱. $\frac{\pi}{6}$

۲. $\frac{\pi}{4}$

۳. $\frac{\pi}{3}$

۴. $\frac{\pi}{2}$

-۱۹

حاصل انتگرال $\int_{|z|=2} \frac{z^6 + 1}{z^2(z+1)} dz$ کدام است؟

۱. $2\pi i$

۲. $-2\pi i$

۳. 2π

۴. -2π

۲۰- اگر انتگرال ناسره $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ همگرا باشد، آنگاه :

۱. $p.v. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ وجود ندارد.

۲. $p.v. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ نا متناهی است.

۳. $p.v. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$

۴. ممکن است $p.v. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ موجود نباشد.

سوالات تشریحی

۱.۴۰ نمره

۱- همه ریشه های معادله $z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ را محاسبه کنید.

۱.۴۰ نمره

۲- ابتدا نشان دهید تابع $v(x, y) = x - \frac{y}{x^2 + y^2}$ همزون است. سپس $v(x, y)$ را طوری به دست آورید که $f(z) = u + iv$ تابعی تحلیلی باشد. این تابع را می شناسید؟

۱.۴۰ نمره

۳- تصویر مستطیل $0 \leq x \leq 1$ و $0 \leq y \leq \pi$ را تحت نگاشت $w = e^{-z}$ به دست آورید.

۱.۴۰ نمره

۴- سری لوران تابع $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)}$ را در ناحیه $D = \{z | 0 < |z-3| < 2\}$ حول نقطه $z=3$ بنویسید و به کمک آن حاصل $\int_C f(z)dz$ را به دست آورید که در آن C دایره $|z-3|=1$ می باشد.

۱.۴۰ نمره

۵- به کمک قضیه مانده ها حاصل انتگرال های زیر را حساب کنید.

$$\int_{|z-i|=\frac{3}{2}} \frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z^2+1} dz \quad (\text{ب})$$

$$\int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta}{5-4\cos \theta} d\theta \quad (\text{الف})$$

باسخ صحيح
شماره
سواب

1	الف
2	د
3	د
4	ج
5	ب
6	د
7	د
8	الف
9	ب
10	ج
11	د
12	د
13	الف
14	د
15	د
16	الف
17	د
18	الف
19	الف
20	ج

سوالات تشریحی

۱.۴۰ نمره

۱- چون $z=1$ ریشه این معادله نیست طرفین معادله را در $(z-1)$ ضرب می کنیم و به دست می آوریم $z^6 - 1 = 0$. لذا ریشه های ششم واحد بجز $z=1$ ، همه جواب های این معادله می باشد.

۱.۴۰ نمره

۲- برای موزون بودن باید نشان دهیم در رابطه لاپلاس صدق می کند. سپس به کمک روابط کوشی-ریمان

$$u(x, y) = -y + \frac{x}{x^2 + y^2}$$

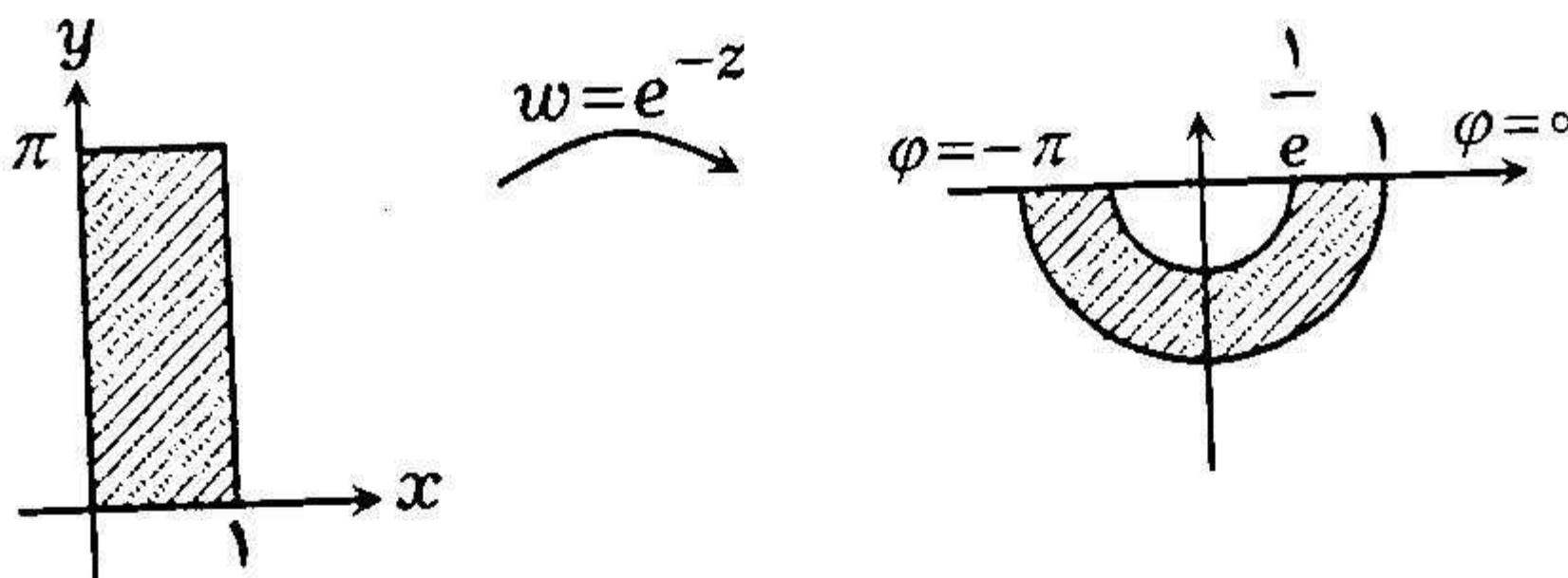
بدست می آید. داریم:

$$f(z) = u + iv = \frac{1}{z} + iz$$

۱.۴۰ نمره

۳- می توان ابتدا مستطیل را تحت تبدیل خطی $w_1 = -z$ به اندازه 180° درجه دوران داده و به مستطیل $[-1, 0] \times [-\pi, 0]$

تصویر کنیم. سپس تصویر مستطیل جدید را تحت $w = e^{w_1}$ به دست می آوریم. با توجه با اینکه تابع نمائی خطوط افقی را به خطوط پرتوی و خطوط قائم را به دوائر به مرکز مبدأ تصویر می کند، تصویر نهائی به صورت زیر است:



۱.۴۰ نمره

۴- تمرین ۵-۴-۱۷ سؤال ۱ قسمت ت کتاب. حل:

$$w = z - 3 \Rightarrow z = w + 3 \quad \text{و} \quad z - 1 = w + 2$$

$$\frac{1}{(w+2)w} = \frac{1}{w} \cdot \frac{1}{2(1 - (-\frac{w}{2}))} = \frac{1}{w} \cdot \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{w}{2}\right)^n = \frac{1}{w} \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \frac{w}{2} + \frac{w^2}{4} - \frac{w^3}{8} + \dots\right)$$

$$= \frac{1}{2(z-3)} \left(1 - \frac{z-3}{2} + \left(\frac{z-3}{2}\right)^2 - \left(\frac{z-3}{2}\right)^3 + \dots\right) \quad \left| \frac{z-3}{2} \right| < 1$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z-3} - \frac{1}{2} + \frac{z-3}{4} - \frac{(z-3)^2}{8} + \dots \right) \quad \text{و} \quad a_{-1} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{dz}{(z-1)(z-3)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \int_c \frac{dz}{(z-1)(z-3)} = \pi i$$

که c دایره ای به مرکز ۳ و شعاع کمتر از ۲ در جهت مثبت است.

$$\frac{(z^2 - 1)^2}{4 \left(\frac{z^2 + 1}{2z} \right)} \cdot \frac{dz}{iz} = \frac{-i}{8} \int_{|z|=1} \frac{(z^4 - 2z^2 + 1)dz}{z^2(2z-1)(z-2)} = \frac{-i}{8} \cdot 2\pi i (\text{Res}[f(z), 0] + \text{Res}[f(z), \frac{1}{2}]) = \frac{\pi}{4} \left(\frac{5}{4} - \frac{3}{4} \right) = \frac{\pi}{8}$$

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{z^4 - 2z^2 + 1}{(2z-1)(z-2)} \right]_{z=0} = \frac{5}{4}$$

$$f(z) \Big|_{z=\frac{1}{2}} = \left[\frac{z^4 - 2z^2 + 1}{2z^2(z-2)} \right]_{z=\frac{1}{2}} = \frac{-3}{4}$$

ب) دو نقطه تکین $z=0$ و $z=i$ که اولی تکین اساسی و دومی قطب ساده است برای این انتگرال وجود دارد. چون تابع داخل انتگرال زوج است، لذا مانده در $z=0$ برابر صفر است. داریم:

۱- کدام رابطه داده شده صحیح است؟

۱. $\operatorname{Re}(iz) = \operatorname{Re} z$ ۲. $\operatorname{Re}(iz) = -\operatorname{Im} z$ ۳. $\operatorname{R}(z^2) = x^2$ ۴. $\operatorname{Re}(z^2) = xy$

۲- مقدار اصلی تابع i^{2i} برابر است با:

۱. $e^{-\pi}$ ۲. e^{π} ۳. $e^{\frac{\pi}{2}}$ ۴. $e^{-\frac{\pi}{2}}$

۳- مکان هندسی نقاطی از صفحه مختلط که در رابطه $|z-1| - |z+1| = 0$ صدق می کند کدام است؟

۱. محور x ها ۲. محور y ها ۳. مبدأ مختصات ۴. $x=1$

۴- اگر z و w دو عدد مختلط باشد، کدام یک از گزینه های زیر همواره عددی حقیقی می باشد؟

۱. $\bar{z} - \bar{w}$ ۲. $z\bar{w} + \bar{z}w$ ۳. $z\bar{w} - \bar{z}w$ ۴. \overline{zw}

۵- هرگاه $f(z) = \frac{z+1}{2z+1}$ تابعی مختلط باشد، قسمت موهومی آن کدام است؟

۱. $v(x, y) = -\frac{2x+1}{(2x+1)^2 + 4y^2}$ ۲. $v(x, y) = \frac{2x+1}{(2x+1)^2 + 4y^2}$

۳. $v(x, y) = \frac{2y}{(2x+1)^2 + 4y^2}$ ۴. $v(x, y) = \frac{-y}{(2x+1)^2 + 4y^2}$

۶- در مورد تابع $f(z) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} + i \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & z = x + iy \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$ کدام گزینه صحیح است؟

۱. $f(z)$ در $z=0$ مشتق پذیر نیست و در این نقطه روابط کوشی-ریمان صدق نمی کند.

۲. $f(z)$ در $z=0$ مشتق پذیر است و در این نقطه روابط کوشی-ریمان صدق نمی کند.

۳. $f(z)$ در $z=0$ مشتق پذیر نیست و در این نقطه روابط کوشی-ریمان صدق می کند.

۴. $f(z)$ در $z=0$ مشتق پذیر است و در این نقطه روابط کوشی-ریمان صدق می کند.

۷- کدام تابع در کل صفحه مختلط تحلیلی است؟

۱. $f(z) = |z|^2$

۲. $f(z) = \frac{1}{z}$

۳. $f(z) = z \operatorname{Re} z$

۴. $f(z) = x^2 - y^2 + i2xy$

۸- حاصل $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z}$ برابر است با:

۱. ۱

۲. -۱

۳. صفر

۴. موجود نیست.

۹- یک مزدوج موزون برای تابع $u(x, y) = x + \frac{y}{x^2 + y^2}$ کدام است؟

۱. $v(x, y) = x + \frac{x}{x^2 + y^2}$

۲. $v(x, y) = y + \frac{x}{x^2 + y^2}$

۳. $v(x, y) = y - \frac{x}{x^2 + y^2}$

۴. $v(x, y) = y + \frac{y}{x^2 + y^2}$

۱۰- جواب های معادله $\ln z = i\frac{\pi}{2}$ کدام است؟

۱. تنها جواب معادله $z = i\pi$ است.

۲. معادله بینهایت جواب دارد.

۳. تنها جواب معادله $z = i$ است.

۴. معادله دو جواب $z = i$ و $z = i\pi$ دارد.

۱۱- دوره تناوب تابع مختلط $w = \sinh z$ کدام است؟

۱. $2\pi i$

۲. 2π

۳. πi

۴. این تابع متناوب نیست.

۱۲- ناحیه محصور بین دو دایره $|z-1|=1$ و $|z-i|=1$ توسط تابع $w = \frac{1}{z}$ کدام است؟

۱. $v > -\frac{1}{2}, u > \frac{1}{2}$

۲. $v < -\frac{1}{2}, u < \frac{1}{2}$

۳. $v \leq -\frac{1}{2}, u \geq \frac{1}{2}$

۴. $v > -\frac{1}{2}, u < \frac{1}{2}$

۱۳- حاصل $\int_C |z| dz$ که C از نقطه $-i$ تا i در طول دایره واحد $(|z|=1)$ در نیم صفحه راست طی می شود کدام است؟

۱. $2i$ ۲. $-2i$ ۳. 0 ۴. 2

۱۴- مقدار $\int_{|z|=1} (\bar{z})^2 dz$ کدام است؟

۱. صفر ۲. -1 ۳. 1 ۴. انتگرال موجود نیست.

۱۵- ماکسیمم قدر مطلق e^z روی $|z| \leq 1$ کدام است؟

۱. e ۲. 0 ۳. $\frac{1}{e}$ ۴. ماکسیمم ندارد

۱۶- فرض کنید $f_n(z) = \frac{1}{(1+z^2)^n}$ برای $n = 0, 1, 2, \dots$ ، و همچنین $z \neq 0$ و $1+z^2 > 1$. در این صورت مقدار

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$$

برابر است با:

۱. $\frac{1+z^2}{z^2}$ ۲. $\frac{1-z^2}{z^2}$ ۳. $\frac{z^2}{z^2+1}$ ۴. سری واگراست.

۱۷- اگر سری لوران تابعی به صورت $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{4^n}$ باشد، ناحیه همگرایی سری لوران f کدام است؟

۱. $|z| < e$ ۲. $\frac{1}{4} < |z| < e$ ۳. $e < |z| < 4$ ۴. سری لوران f همه جا همگراست.

۱۸- نقطه $z = \infty$ چه نوع نقطه ای برای تابع $f(z) = \sin z$ است؟

۱. قطب ساده ۲. تکین بیمایه ۳. تکین اساسی ۴. تکین نامنفرد

۱۹- مانده تابع $f(z) = \frac{e^z}{(1-z)^7}$ در نقطه تکین آن برابر است با:

۱. $-e$ ۲. e ۳. $-\frac{e}{6!}$ ۴. $\frac{e}{6!}$

۲۰- نقطه $z = \infty$ برای چندجمله ای درجه n ($n \geq 1$) چه نوع نقطه ای است؟

۱. عادی ۲. تکین بیمایه ۳. قطب مرتبه n ام ۴. تکین اساسی

سوالات تشریحی

۱.۴۰ نمره

۱- همه ریشه های معادله $(1+z)^6 = (1-z)^6$ را بدست آورید.

۱.۴۰ نمره

۲- هرگاه v مزدوج موزون u باشد، نشان دهید $-u$ مزدوج موزون v است.

۱.۴۰ نمره

۳- نگاره ناحیه $x^2 + (y-b)^2 \geq r^2$ را تحت $w = \frac{1}{z}$ به دست آورید.

۱.۴۰ نمره

۴- قضیه لیوویل را بیان واثبات کنید.

۱.۴۰ نمره

۵- به کمک قضیه مانده ها حاصل انتگرال های زیر را به دست آورید.

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z \cdot \sin z} \quad (\text{الف}) \quad \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^6} \quad (\text{ب})$$

ياشيخ صحيح
شماره
سواب

1	ب
2	الف
3	ب
4	ب
5	د
6	ج
7	د
8	د
9	ب
10	ج
11	الف
12	ج
13	الف
14	الف
15	الف
16	الف
17	ج
18	ج
19	ج
20	ج