

## عنوان درس: مبانی ماتریس ها و جبر خطی

۱- فرض کنید  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ . در این صورت  $A^2 - 2I$  کدام گزینه است؟

۱.  $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}$       ۲.  $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}$       ۳.  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}$       ۴.  $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$

۲- کدام گزینه درست است؟

۱.  $(cA)' = \frac{1}{c}A'$       ۲.  $(A')' = A'$       ۳.  $(AB)' = A'B'$       ۴.  $(AB)' = B'A'$

۳- دترمینان ماتریس  $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$  کدام است؟

۱. 21      ۲. -21      ۳. 0      ۴. -3

۴- فرض کنید  $A$  یک ماتریس  $3 \times 3$  با  $|A| = 4$  باشد. در این صورت  $\left| \frac{1}{2} A' A^{-1} \right|$  کدام گزینه است؟

۱. 8      ۲. 16      ۳.  $\frac{1}{2}$       ۴.  $\frac{1}{8}$

۵- معکوس ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$  کدام است؟

۱.  $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$       ۲.  $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$       ۳.  $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$       ۴.  $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

۶- بردار  $(2, -1)$  بر کدام یک از بردارهای زیر عمود است؟

۱.  $(-1, 1)$       ۲.  $(-1, -2)$       ۳.  $(-1, 2)$       ۴.  $(1, -2)$

۷- فرض کنید  $T: R^2 \rightarrow R^2$ . کدام تبدیل زیر یک تبدیل خطی است؟

۱.  $T(x, y) = (xy, 4y)$       ۲.  $T(x, y) = (x - y, y + 5)$       ۳.  $T(x, y) = (-y, -x)$       ۴.  $T(x, y) = (x, -y^2)$

۸- تبدیل خطی  $T$  توسط ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$  تعریف شده است. تصویر بردار  $X = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$  تحت  $T$  کدام گزینه است؟

۱.  $\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 12 \end{bmatrix}$       ۲.  $\begin{bmatrix} 11 \\ -3 \\ 12 \end{bmatrix}$       ۳.  $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 12 \end{bmatrix}$       ۴.  $\begin{bmatrix} 11 \\ 3 \\ 12 \end{bmatrix}$

۹- تصویر نقطه  $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$  تحت تبدیلات انعکاس نسبت به محور  $x$  ها و سپس انبساط از مضرب 2 کدام گزینه است؟

۱.  $\begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}$       ۲.  $\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$       ۳.  $\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$       ۴.  $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

۱۰- کدام یک از مجموعه بردارهای به فرم زیر یک زیرفضای  $R^3$  است؟

۱.  $(a, b, a+2)$       ۲.  $(0, 3a+5b, -b)$       ۳.  $(a-b, 3, 4a)$       ۴.  $(a, b, a+b-4)$

۱۱- رتبه ماتریس  $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$  کدام است؟

۱. 1      ۲. 2      ۳. 3      ۴. 4

۱۲- تصویر بردار  $v = (6, 7)$  روی بردار  $u = (1, 4)$  کدام است؟

۱.  $(1, 4)$       ۲.  $(2, 8)$       ۳.  $(-2, 8)$       ۴.  $(-1, 4)$

۱۳- فرض کنید  $A$  یک ماتریس متعامد باشد. کدام گزینه نادرست است؟

۱.  $A^{-1}$  یک ماتریس متعامد است.      ۲.  $|A| = \pm 1$       ۳.  $A = A'$       ۴.  $A^{-1} = A'$

۱۴- مقادیر ویژه ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$  کدام است؟

۱.  $-3, 2$       ۲.  $-3, -2$       ۳.  $3, 2$       ۴.  $3, -2$

۱۵- ماتریس متشابه ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$  کدام است؟

۱.  $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$  ۲.  $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$  ۳.  $D = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$  ۴.  $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

۱۶- اگر  $A$  و  $B$  ماتریس های متشابه باشند، آنگاه کدام گزینه نادرست است؟

۱.  $A' = B'$  ۲.  $|A| = |B|$  ۳.  $tr(A) = tr(B)$  ۴.  $rank(A) = rank(B)$

۱۷- بردار مختصات  $u = 5x^2 + 2x - 3$  نسبت به پایه  $B = \{1, x, x^2\}$  کدام است؟

۱.  $u_B = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$  ۲.  $u_B = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$  ۳.  $u_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$  ۴.  $u_B = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

۱۸- فضای برداری  $P_n$  را با ضرب داخلی  $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$  در نظر بگیرید. نرم تابع  $f(x) = 3x^2 + 1$  کدام است؟

۱.  $\sqrt{\frac{28}{5}}$  ۲.  $\sqrt{8}$  ۳.  $\sqrt{\frac{24}{5}}$  ۴.  $\sqrt{5}$

۱۹- در معادله  $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ -1 & x-2 \end{vmatrix} = 7$  ،  $x$  برابر کدام گزینه است؟

۱.  $x = -1$  یا  $x = 2$  ۲.  $x = -2$  یا  $x = -3$  ۳.  $x = -2$  یا  $x = 3$  ۴.  $x = 2$  یا  $x = 3$

۲۰- کدام مجموعه از بردارهای  $R^3$  مستقل خطی اند؟

۱.  $\{(1, 2, -1), (0, -6, -8), (0, 3, 4)\}$  ۲.  $\{(0, 0, 0), (1, 2, -3), (2, -1, 0)\}$  ۳.  $\{(3, 4, 1), (1, 1, 0), (9, 12, 3)\}$  ۴.  $\{(1, 1, 2), (0, -1, 3), (0, 0, 5)\}$

### سوالات تشریحی

۱- معکوس ماتریس زیر را در صورت وجود به دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

شماره سوال	پاسخ صحیح
<u>1</u>	<u>الف</u>
<u>2</u>	<u>د</u>
<u>3</u>	<u>ب</u>
<u>4</u>	<u>د</u>
<u>5</u>	<u>ج</u>
<u>6</u>	<u>ب</u>
<u>7</u>	<u>ج</u>
<u>8</u>	<u>ب</u>
<u>9</u>	<u>الف</u>
<u>10</u>	<u>ب</u>
<u>11</u>	<u>ج</u>
<u>12</u>	<u>ب</u>
<u>13</u>	<u>ج</u>
<u>14</u>	<u>الف</u>
<u>15</u>	<u>ب</u>
<u>16</u>	<u>الف</u>
<u>17</u>	<u>الف</u>
<u>18</u>	<u>ج</u>
<u>19</u>	<u>ج</u>
<u>20</u>	<u>د</u>

۱- اثر ماتریس  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$  کدام است؟

۱. 2      ۲. 1      ۳. 0      ۴. -2

۲- ترانهاده ماتریس  $\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -8 & 0 \end{bmatrix}$  کدام است؟

۱.  $\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$       ۲.  $\begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$       ۳.  $\begin{bmatrix} 2 & -8 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$       ۴.  $\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$

۳- کدام یک از ماتریس های زیر تحویل یافته پلکانی نیست؟

۱.  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$       ۲.  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$       ۳.  $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$       ۴.  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

۴- دترمینان ماتریس  $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ -2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$  کدام است؟

۱. 6      ۲. 7      ۳. 0      ۴. -2

۵- حاصل ضرب نقطه ای بردارهای  $u = (1, -2, 4)$  و  $v = (3, 0, 2)$  کدام است؟

۱. 11      ۲. 10      ۳. 9      ۴. 8

۶- بردار یکه بردار  $v = (2, -1, 3)$  کدام است؟

۱.  $(2, -1, 3)$       ۲.  $\frac{1}{12}(2, -1, 3)$       ۳.  $\frac{1}{\sqrt{12}}(2, -1, 3)$       ۴.  $\frac{1}{\sqrt{14}}(2, -1, 3)$

۷- کدام یک از تبدیل های زیر خطی است؟

۱.  $T : R^2 \rightarrow R^2$   
 $T(x, y) = (x - y, 3x)$   
 ۲.  $T : R^3 \rightarrow R^2$   
 $T(x, y, z) = (3x, y^2)$   
 ۳.  $T : R^3 \rightarrow R^2$   
 $T(x, y, z) = (x + y, y^4)$   
 ۴.  $T : R^3 \rightarrow R^2$   
 $T(x, y, z) = (xy, z)$

۸- ماتریس نمایشگر تبدیل خطی  $T: R^2 \rightarrow R^3$  کدام است؟  
 $T(x, y) = (x + y, 3y, 5x - 6y)$

۱.  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$  ۲.  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}$  ۳.  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$  ۴.  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$

۹- کدام بردار ترکیب خطی از بردارهای  $(1, 2, 0), (3, 1, 4), (1, 0, 3)$  است؟

۱.  $(1, 0, 3)$  ۲.  $(5, 4, 3)$  ۳.  $(5, 4, 2)$  ۴.  $(5, 0, 2)$

۱۰- کدام یک از بردارهای زیر مستقل خطی است؟

۱.  $\{(-1, 2), (2, -4)\}$  ۲.  $\{(1, 5), (0, 0)\}$  ۳.  $\{(3, 1), (9, 3)\}$  ۴.  $\{(1, 2), (3, 2)\}$

۱۱- رتبه ماتریس  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix}$  کدام است؟

۱. ۱ ۲. ۲ ۳. ۳ ۴. ۴

۱۲- تصویر بردار  $v = (6, 7)$  روی بردار  $u = (1, 4)$  کدام است؟

۱.  $(2, 8)$  ۲.  $(2, 9)$  ۳.  $(8, 2)$  ۴.  $(8, 1)$

۱۳- مقادیر ویژه ماتریس  $\begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$  کدام است؟

۱.  $\lambda = 1, -2$  ۲.  $\lambda = -1, 2$  ۳.  $\lambda = -1, 0$  ۴.  $\lambda = -1, 1$

۱۴- بردار مختصاتی  $v = (2, -5, 10)$  نسبت به پایه یکه متعامد  $B = \{(1, 0, 0), (0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}), (0, \frac{4}{5}, \frac{-3}{5})\}$  کدام است؟

۱.  $(2, 5, -10)$  ۲.  $(2, 5, 10)$  ۳.  $(2, 2, 10)$  ۴.  $(2, 2, -10)$

۱۵- هسته عملگر خطی  $T(x, y, z) = (x, y, 0)$  کدام است؟

۱.  $(x, y, 0)$  ۲.  $(x, 0, 0)$  ۳.  $(0, y, 0)$  ۴.  $(0, 0, z)$

۱۶- بردار ویژه نظیر کوچکترین مقدار ویژه ماتریس  $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  کدام است؟

۱.  $(1,1)$       ۲.  $(1,-1)$       ۳.  $(1,2)$       ۴.  $(2,1)$

۱۷- کدام یک از ماتریس های زیر متعامد است؟

۱.  $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$       ۲.  $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{-\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$       ۳.  $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{-\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$       ۴.  $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{-\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

۱۸- فاصله بین نقاط  $x = (1, -2, 3, 0)$  و  $y = (4, 0, -3, 5)$  کدام است؟

۱.  $\sqrt{74}$       ۲. 74      ۳. 84      ۴.  $\sqrt{84}$

۱۹- دو بردار ناصفر  $u$  و  $v$  بر هم عمودند اگر و تنها اگر

۱.  $v - u = 0$       ۲.  $v + u = 0$       ۳.  $uv = 0$       ۴.  $uv \neq 0$

۲۰- زاویه بین بردارهای  $u = (1, 0, 0)$  و  $v = (1, 0, 1)$  کدام است؟

۱. 45 درجه      ۲. 30 درجه      ۳. 15 درجه      ۴. 90 درجه

### سوالات تشریحی

۱.۲۰ نمره

۱- ماتریس های همسازه و الحاقی ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$  را بدست آورید.

۱.۲۰ نمره

۲- فرض کنید  $W$  مجموعه بردارهایی به فرم  $(a, a^2, b)$  باشد. نشان دهید  $W$  زیر فضای  $R^3$  نیست.

۱.۲۰ نمره

۳- نشان دهید مجموعه  $\{(1, 0, -1), (1, 1, 1), (1, 2, 4)\}$  یک پایه  $R^3$  است.

۱.۲۰ نمره

۴- نشان دهید یک تبدیل خطی یک به یک است اگر و تنها اگر هسته آن از بردار صفر تشکیل شده باشد.

۱.۲۰ نمره

۵- فضای برداری  $P_n$  را با ضرب داخلی  $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$  در نظر بگیرید. اگر  $f(x) = 5x^2 + 1$  آنگاه نرم تابع  $f(x)$  را بدست آورید.

شماره سوال	پاسخ صحیح
<u>1</u>	<u>الف</u>
<u>2</u>	<u>ج</u>
<u>3</u>	<u>ب</u>
<u>4</u>	<u>الف</u>
<u>5</u>	<u>الف</u>
<u>6</u>	<u>د</u>
<u>7</u>	<u>الف</u>
<u>8</u>	<u>ب</u>
<u>9</u>	<u>ج</u>
<u>10</u>	<u>د</u>
<u>11</u>	<u>ب</u>
<u>12</u>	<u>الف</u>
<u>13</u>	<u>ب</u>
<u>14</u>	<u>الف</u>
<u>15</u>	<u>د</u>
<u>16</u>	<u>ب</u>
<u>17</u>	<u>ج</u>
<u>18</u>	<u>الف</u>
<u>19</u>	<u>ج</u>
<u>20</u>	<u>الف</u>

۱- کدام یک از ماتریس های زیر به فرم پلکانی تحویل یافته است ؟

$$\begin{matrix} ۱. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} & ۲. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} & ۳. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} & ۴. \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

۲- یک دستگاه همگن از معادلات خطی که تعداد متغیرهایش ..... معادلات است دارای تعداد بسیاری جواب است ؟

۱. بیشتر از      ۲. کمتر از      ۳. برابر با      ۴. نا کمتر از

۳- با فرض  $C = AB$  که  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$  و  $B = \begin{pmatrix} -7 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  مؤلفه  $c_{23}$  از ماتریس  $C$  عبارت است از :

۱. 2      ۲. 1      ۳. -1      ۴. -2

۴- اگر  $A$  یک ماتریس  $3 \times 2$  و  $B$  یک ماتریس  $2 \times 4$  باشد تعداد ضربهای اسکالر موجود در محاسبه حاصل ضرب  $AB$  برابر است با :

۱. 12      ۲. 24      ۳. 48      ۴. 6

۵- اگر  $A$  و  $B$  ماتریس های متقارن و هم اندازه باشند آنگاه حاصل ضرب  $AB$  متقارن است اگر و تنها اگر :

۱.  $AB = -BA$       ۲.  $A^2 = I$       ۳.  $AB = BA$       ۴.  $A^2 = A$

۶- فرض کنید  $A$  و  $B$  دو ماتریس و  $c$  یک عدد اسکالر باشد کدام یک از روابط زیر برقرار نمی باشد ؟

$$۱. tr(A^2) = (tr(A))^2 \quad ۲. tr(AB) = tr(BA)$$

$$۳. c tr(A) = tr(cA) \quad ۴. tr(A) = tr(A')$$

۷- فرض کنید  $AX = B$  یک دستگاه معادلات خطی با  $n$  متغیر باشد اگر  $A^{-1}$  وجود داشته باشد آنگاه :

۱. دستگاه جواب ندارد      ۲. دستگاه بی نهایت جواب دارد  
۳. دستگاه دارای  $n$  جواب است      ۴. دستگاه دارای جواب منحصر بفرد است

۸- اگر  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$  در این صورت همسازه درایه  $a_{22}$  کدام است ؟

۱. 14      ۲. -14      ۳. 3      ۴. -3

۹- کدامیک از جایگشت های زیر زوج است ؟

۱. 132      ۲. 213      ۳. 231      ۴. 321

۱۰- اگر  $A$  ماتریسی  $3 \times 3$  باشد و  $|A| = 4$  باشد آنگاه  $|2A^2|$  برابر است با :

۱. 16      ۲. 32      ۳. 64      ۴. 128

۱۱- دترمینان ماتریس  $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  برابر است با :

۱. 0      ۲. -6      ۳. 6      ۴. 1

۱۲- کدام یک از بردار های زیر بر بردار  $(3, -1)$  عمود است ؟

۱.  $(-3, 1)$       ۲.  $(1, 3)$       ۳.  $(-3, -1)$       ۴.  $(3, -1)$

۱۳- تصویر نقطه ی  $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$  تحت دوران  $\frac{\pi}{2}$  حول مبدا کدام است ؟

۱.  $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$       ۲.  $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$       ۳.  $\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$       ۴.  $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

۱۴- کدامیک از مجموعه بردار های زیر فضای  $R^3$  را تولید می کند ؟

۱.  $\{(1, 2, 0)\}$       ۲.  $\{(0, 1, -1), (1, 2, 0)\}$   
۳.  $\{(0, 2, -2), (0, 1, -1), (1, 2, 0)\}$       ۴.  $\{(1, 1, 2), (0, 1, -1), (1, 2, 0)\}$

۱۵- بردارهای  $\{v_1, v_2, v_3\}$  پایه ای برای  $R^3$  هستند هر گاه :

۱. مستقل خطی باشند
۲. فضای  $R^3$  را تولید کنند
۳. وابسته خطی باشند و فضای  $R^3$  را تولید کنند
۴. مستقل خطی باشند و فضای  $R^3$  را تولید کنند

۱۶- رتبه ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  برابر است با :

۱. ۱
۲. ۲
۳. ۳
۴. ۴

۱۷- تصویر بردار  $v = (4, 0, 5, 8)$  روی بردار  $w = (1, 2, 0, 3)$  برابر است با :

۱.  $(4, 8, 0, 24)$
۲.  $(-4, -8, 0, -24)$
۳.  $(-2, -4, 0, -6)$
۴.  $(2, 4, 0, 6)$

۱۸- ماتریس های متشابه، دارای ..... یکسانی هستند ؟

۱. بردارهای ویژه
۲. مقادیر ویژه
۳. دترمینان
۴. وارون

۱۹- بعد هسته و برد تبدیل خطی  $T$  تعریف شده توسط ماتریس  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  برابر است با :

۱.  $\dim \ker(T) = 1, \dim \text{range}(T) = 2$
۲.  $\dim \ker(T) = 2, \dim \text{range}(T) = 1$
۳.  $\dim \ker(T) = 0, \dim \text{range}(T) = 3$
۴.  $\dim \ker(T) = 3, \dim \text{range}(T) = 0$

۲۰- زاویه بین دو بردار  $u = (2 + 3i, -1 + 5i)$  و  $v = (1 + i, -i)$  برابر است با :

۱.  $\frac{\pi}{3}$
۲.  $\frac{\pi}{4}$
۳.  $\frac{\pi}{2}$
۴.  $\frac{\pi}{6}$

### سوالات تشریحی

۱- معادله  $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 8x_2 + 11x_3 = 7 \\ x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 3 \end{cases}$  را به روش گاوس-جردن حل کنید.

۱.۲۰ نمره

۲- وارون ماتریس  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$  را بدست آورید.

۱.۲۰ نمره

۳- معادله تصویر خط  $y = 2x + 3$  را تحت انتقال  $T \left( \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$  بدست آورید.

۱.۲۰ نمره

۴- با استفاده از قضیه کیلی- هامیلتون وارون ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$  را بدست آورید.

۱.۲۰ نمره

۵- بردار مختصاتی  $v = (2, -5, 10)$  نسبت به پایه ی یک متعامد  $B = \left\{ (1, 0, 0), \left( 0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right), \left( 0, \frac{4}{5}, -\frac{3}{5} \right) \right\}$  را پیدا کنید.

شماره سوال	پاسخ صحیح
<u>1</u>	<u>ج</u>
<u>2</u>	<u>الف</u>
<u>3</u>	<u>د</u>
<u>4</u>	<u>ب</u>
<u>5</u>	<u>ج</u>
<u>6</u>	<u>الف</u>
<u>7</u>	<u>د</u>
<u>8</u>	<u>ب</u>
<u>9</u>	<u>ج</u>
<u>10</u>	<u>د</u>
<u>11</u>	<u>الف</u>
<u>12</u>	<u>ب</u>
<u>13</u>	<u>الف</u>
<u>14</u>	<u>د</u>
<u>15</u>	<u>د</u>
<u>16</u>	<u>ب</u>
<u>17</u>	<u>ج</u>
<u>18</u>	<u>ب</u>
<u>19</u>	<u>الف</u>
<u>20</u>	<u>ج</u>

۱- فرض کنید  $A$  ماتریس ضرایب یک دستگاه  $n$  معادله  $n$  مجهول باشد که دارای جواب منحصر بفرد است. کدام گزینه درست است؟

۱. یک سطر ماتریس  $A$  بعد از انجام اعمال سطری مقدماتی صفر می شود.
۲. یک ستون ماتریس  $A$  بعد از انجام اعمال سطری مقدماتی صفر می شود.
۳. قطر اصلی ماتریس  $A$  بعد از انجام اعمال سطری مقدماتی صفر می شود.
۴. ماتریس  $A$  بعد از انجام اعمال سطری مقدماتی هم ارز سطری ماتریس همانی  $I_n$  می شود.

۲- کدام یک از موارد زیر جز خواص یک ماتریس به فرم پلکانی تحویل یافته نمی باشد؟

۱. سطری که همه درایه هایش صفر است در پایین سطرهای غیر صفر قرار دارد.
۲. اولین درایه غیر صفر هر سطر غیر صفر عدد ۱ است.
۳. پیشرو ۱ هر سطر، در سمت چپ پیشرو ۱ سطر قبلی قرار می گیرد.
۴. تمام درایه های دیگر در ستونی که شامل پیشرو ۱ است، صفر هستند.

۳- یک دستگاه همگن از معادلات خطی که تعداد متغیرهایش بیشتر از تعداد معادلات است در کدام گزینه صدق می کند؟

۱. یک جواب منحصر بفرد دارد.
۲. اصلاً جواب ندارد.
۳. تعداد بی شمار جواب دارد.
۴. حداکثر به تعداد معادلات دستگاه دارای جواب است.

۴- فرض کنید  $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$  و  $C = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$  باشد. کدام گزینه درست است؟

۱.  $CA = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 25 \end{bmatrix}$
۲.  $CA = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 25 \end{bmatrix}$
۳.  $AC = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 25 \end{bmatrix}$
۴.  $CA = \begin{bmatrix} 27 \end{bmatrix}$

۵- کدام گزینه نا درست است؟

۱. جمع دو ماتریس قطری با اندازه های یکسان ماتریسی قطری است.
۲. ضرب دو ماتریس قطری با اندازه های یکسان ماتریسی قطری است.
۳. ماتریس مربعی  $A$  خودتوان است هر گاه  $A^2 = A$  باشد.
۴. ماتریس مربعی  $A$  پوچتوان است هر گاه  $A^2 = 0$  باشد.

۶- کدام یک از موارد زیر جز خواص اثر ماتریس‌های مربع هم‌اندازه نمی‌باشد؟

۱.  $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$

۲.  $tr(AB) = tr(BA)$

۳.  $tr(cA) = c^n tr(A)$

۴.  $tr(A') = tr(A)$

۷- کدام گزینه نادرست است؟

۱. اگر  $A$  ماتریس قطری باشد، آنگاه  $A' = A$  است.

۲. اگر  $A$  ماتریس مربعی باشد، آنگاه  $A - A'$  ماتریس متقارن است.

۳. جمع دو ماتریس پادمتقارن هم‌اندازه یک ماتریس پادمتقارن است.

۴. اگر  $A$  ماتریسی خودتوان باشد، آنگاه  $A'$  نیز خودتوان است.

۸- مقدار دترمینان  $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ -2 & -4 & 10 \end{vmatrix}$  برابر کدام گزینه است؟

۱. ۸

۲. ۱۰

۳. ۱۲

۴. ۱۴

۹- فرض کنید  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ . همسازهای  $C_{21}$  و  $C_{32}$  برابر کدام گزینه است؟

۱.  $C_{21} = -6, C_{32} = -1$

۲.  $C_{21} = 3, C_{32} = 4$

۳.  $C_{21} = 2, C_{32} = 5$

۴.  $C_{21} = 6, C_{32} = 1$

۱۰- زاویه بین دو بردار  $u = (1,0,0)$  و  $v = (1,0,1)$  در فضای  $R^3$  برابر کدام است؟

۱.  $\frac{\pi}{3}$

۲.  $\frac{\pi}{4}$

۳.  $\frac{\pi}{6}$

۴.  $\frac{\pi}{2}$

۱۱- فرض کنید  $T_1(X) = A_1 X$  و  $T_2(X) = A_2 X$  تبدیلات خطی باشند و نیز  $T = T_2 \circ T_1$  باشد. تصویر بردار  $X$  تحت  $T$  برابر کدام گزینه است؟

$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

۱.  $\begin{bmatrix} 12 \\ 8 \end{bmatrix}$

۲.  $\begin{bmatrix} -10 \\ 23 \end{bmatrix}$

۳.  $\begin{bmatrix} -23 \\ 4 \end{bmatrix}$

۴.  $\begin{bmatrix} -8 \\ -12 \end{bmatrix}$

۱۲- تصویر نقطه  $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$  تحت دوران  $\frac{\pi}{2}$  حول مبدا مختصات برابر کدام گزینه است؟

۱.  $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$  ۲.  $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$  ۳.  $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$  ۴.  $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

۱۳- فرض کنید  $W$  مجموعه بردارهای به فرم  $(a, a^2, b)$  باشد. کدام حکم درست است؟

۱.  $W$  زیرفضای یک بعدی  $R^3$  است. ۲.  $W$  زیرفضای دو بعدی  $R^3$  است.  
۳.  $W$  زیرفضای سه بعدی  $R^3$  است. ۴.  $W$  زیرفضای  $R^3$  نیست.

۱۴- کدام یک از زیرمجموعه‌های داده شده از بردارهای فضای  $R^2$  مستقل خطی هستند؟

۱.  $\{(-1, 2), (2, -4)\}$  ۲.  $\{(1, 2), (2, 3)\}$  ۳.  $\{(3, 1), (9, 3)\}$  ۴.  $\{(1, 5), (0, 0)\}$

۱۵- فرض کنید  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix}$ . رتبه سطری ماتریس  $A$  برابر کدام گزینه است؟

۱.  $rank(A) = 1$  ۲.  $rank(A) = 2$  ۳.  $rank(A) = 3$  ۴.  $rank(A) = 0$

۱۶- تصویر بردار  $v = (6, 7)$  روی بردار  $u = (1, 4)$  کدام است؟

۱.  $proj_u v = (12, 14)$  ۲.  $proj_u v = (3, 12)$  ۳.  $proj_u v = (2, 8)$  ۴.  $proj_u v = (3, 6)$

۱۷- مقادیر ویژه ماتریس  $A = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$  برابر کدام گزینه است؟

۱.  $\lambda = 1, 3$  ۲.  $\lambda = -1, 2$  ۳.  $\lambda = -2, 3$  ۴.  $\lambda = -1, 1$

۱۸- فرض کنید  $A$  و  $B$  ماتریس‌های متشابه باشند. کدام حکم نادرست است؟

۱.  $|A| = |B|$  ۲.  $rank(A) = rank(B)$   
۳.  $tr(A) = tr(B)$  ۴.  $A'$  و  $B'$  لزوماً متشابه نیستند.

۱۹- مقادیر ویژه‌ی هر ماتریس متقارن حقیقی کدام مجموعه است؟

۱. فقط می‌توانند اعداد صحیح باشند. ۲. فقط می‌توانند اعداد گویا باشند.  
۳. فقط می‌توانند اعداد حقیقی باشند. ۴. فقط می‌توانند اعداد مختلط باشند.

۲۰- فضای ضرب داخلی چندجمله‌ای‌ها با ضرب داخلی  $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$  تعریف شده است. کسینوس زاویه بین توابع  $f(x) = 5x^2$  و  $g(x) = 3x$  کدام است؟

۱.  $\cos \theta = \frac{\sqrt{13}}{2}$       ۲.  $\cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{4}$       ۳.  $\cos \theta = \frac{\sqrt{14}}{3}$       ۴.  $\cos \theta = \frac{\sqrt{15}}{4}$

### سوالات تشریحی

۱- دستگاه معادلات زیر را با استفاده از اعمال سطری مقدماتی حل کنید:

۱.۲۰ نمره

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 18 \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -8 \end{cases}$$

۲- معکوس ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$  را به دست آورید. (روش حذفی گاوس-جردن یا ماتریس همسازها)

۱.۲۰ نمره

۳- تبدیل انتقال و تبدیل آفین را تعریف کنید و برای هر یک مثال بزنید.

۱.۲۰ نمره

۴- مجموعه  $\{(1,2,0,3), (4,0,5,8), (8,1,5,6)\}$  در  $R^4$  مستقل خطی است. این بردارها یک پایه برای زیرفضای سه بعدی  $V$  از  $R^4$  تشکیل می‌دهند. یک پایه یکه متعامد برای  $V$  بسازید.

۱.۲۰ نمره

۵- ثابت کنید تبدیل خطی  $T: R^n \rightarrow R^m$  با ضابطه  $T(X) = AX$  یک‌به‌یک است اگر و تنها اگر ماتریس  $A$  نامنفرد باشد.

۱.۲۰ نمره

تدريج صحيح

تدريج

1	4
2	3
3	3
4	4
5	4
6	3
7	2
8	3
9	1
10	2
11	3
12	3
13	4
14	2
15	2
16	3
17	2
18	4
19	3
20	4

۱- تصویر بردار  $X = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$  تحت تبدیل خطی که توسط ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$  تعریف شده است کدام گزینه است؟

۱.  $\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$       ۲.  $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}$       ۳.  $\begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$       ۴.  $\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}$

۲- کدام گزینه صحیح نیست؟

۱.  $tr(AB) = tr(A) tr(B)$       ۲.  $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$   
۳.  $tr(cA) = c tr(A)$       ۴.  $tr(A) = tr(A^t)$

۳- کدام ماتریس فرم تحویل یافته پلکانی است؟

۱.  $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$       ۲.  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$       ۳.  $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$       ۴.  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

۴- فرض کنید  $A$  یک ماتریس متعامد باشد، آنگاه کدام گزینه همواره صحیح است؟

۱.  $A = A^{-1}$       ۲.  $|A| = 1$   
۳. بردارهای ستونی  $A$  تشکیل یک مجموعه یکه متعامد می دهند.  
۴. بردارهای سطری  $A$  تشکیل یک مجموعه یکه متعامد می دهند.

۵- کدام گزینه همواره صحیح است؟

۱. تمام ماتریس های نرمال متقارن هستند.  
۲.  $A + A^t$  یک ماتریس پادمتقارن است.  
۳. اگر  $AA^t = 0$ ، آنگاه  $A = 0$   
۴.  $(zA)^* = z A^*$  که  $z$  یک عدد مختلط است.

۶- فرض کنید  $A$  یک ماتریس مربعی منفرد و  $B$  یک ماتریس مربعی هم اندازه  $A$  باشد، آنگاه کدام گزینه همواره صحیح است؟

۱.  $|A| \neq 0$       ۲.  $|AB| = 0$       ۳.  $|A+B| = |A| + |B|$       ۴.  $AB = I_n$

۷- فرض کنید  $A$  یک ماتریس  $n \times n$  معکوس پذیر و  $C$  یک اسکالر ناصفر باشد. کدام گزینه همواره صحیح است؟

۱.  $|cA| = c|A|$  ۲.  $A(\text{adj}(A))$  ماتریس صفر است.

۳. اگر  $A^t = A^{-1}$ ، آنگاه  $|A| = 1$  ۴. اگر  $A = A^{-1}$ ، آنگاه  $|cA| = \pm c^n$

۸- کدام گزینه نادرست است؟

۱.  $(A^{-1})^{-1} = A$  ۲.  $(cA)^{-1} = cA^{-1}$  ۳.  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$  ۴.  $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

۹- تصویر بردار  $v = (6, 7)$  روی بردار  $u = (1, 4)$  کدام است؟

۱.  $(2, 8)$  ۲.  $(1, 8)$  ۳.  $(2, 6)$  ۴.  $(2, 6)$

۱۰- هرگاه ماتریس  $A$ ،  $n \times n$  دارای  $\text{rank}(A) = n$  باشد، آنگاه کدام گزینه صحیح است؟

۱.  $A$  وارون ناپذیر است

۲. دستگاه  $AX = B$  دارای  $n$  جواب متمایز است.

۳.  $A$  با  $I_n$  هم ارز سطری است

۴.  $A$  منفرد است

۱۱- کدام گزینه یک پایه برای فضای تولید شده توسط بردارهای  $(1, 2, 3, 4), (-1, -1, -4, -2), (3, 4, 11, 8)$  است؟

۱.  $(1, 0, 1, 2), (0, 1, 0, 5)$  ۲.  $(0, 1, -1, 2), (1, 0, 5, 0)$

۳.  $(0, 1, -1, 2), (-1, 0, 5, 0)$  ۴.  $(0, -1, 1, 2), (1, 0, 5, 0)$

۱۲- رتبه ماتریس  $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  کدام است؟

۱. ۱ ۲. ۲ ۳. ۳ ۴. ۴

۱۳- کدام گزینه زیر صحیح است؟

۱. مجموعه  $\{(1, -2, 3), (-2, 4, 1), (-4, 8, 9)\}$  در  $R^3$  مستقل خطی است.

۲. مجموعه  $\{(0, 1, 0), (-1, 0, 0)\}$  فضای  $R^3$  را تولید می کند.

۳. مجموعه  $\{(0, 0, 0), (1, 1, -2), (2, 3, 5)\}$  در  $R^3$  مستقل خطی است.

۴. مجموعه  $\{(1, 0, -1), (1, 1, 1), (1, 2, 4)\}$  یک پایه برای  $R^3$  است.

۱۴- کدام مجموعه زیر یک زیرفضای  $R^3$  است؟

۱.  $W = \{(a^2, b^2, c^2) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$

۲.  $W = \{(a, b, a+3) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

۳.  $W = \{(a, 2a, 3a+5b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

۴.  $W = \{(a, b, 2) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

۱۵- ماتریس قطری متشابه با ماتریس  $A = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$  کدام است؟

۱.  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

۲.  $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

۳.  $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

۴.  $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

۱۶- مقادیر ویژه ماتریس زیر کدام گزینه است؟

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 4 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

۱.  $2, \frac{3}{2}, 1$

۲.  $4, \frac{-1}{3}, 1$

۳.  $1, 4, \frac{-1}{5}$

۴.  $1, \frac{3}{2}, \frac{-1}{3}$

۱۷- چند جمله ای مشخصه ی  $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 & -9 \\ 1 & 4 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$  کدام گزینه است؟

۱.  $(\lambda^2 + 6\lambda - 3)(\lambda^2 - 9\lambda + 28)$       ۲.  $(\lambda^2 - 6\lambda + 3)(\lambda^2 + 9\lambda - 28)$

۳.  $(\lambda^2 - 6\lambda - 3)(\lambda^2 - 9\lambda + 28)$       ۴.  $(\lambda^2 - 6\lambda + 3)(\lambda^2 - 9\lambda + 28)$

۱۸- کدام تابع زیر یک تبدیل خطی است؟

۱.  $T: R^2 \rightarrow R^3$  با ضابطه  $T(x, y) = (x^2, x + y)$       ۲.  $T: R^2 \rightarrow R^2$  با ضابطه  $T(x, y) = (x, 2 + y)$

۳.  $T: R^2 \rightarrow R^3$  با ضابطه  $T(x, y) = (x, x - y)$       ۴.  $T: R^2 \rightarrow R^2$  با ضابطه  $T(x, y) = (x, xy)$

۱۹- تبدیل خطی  $T: R^n \rightarrow R^m$  با ضابطه  $T(X) = AX$  یک به یک است اگر و فقط اگر

۱. ماتریس منفرد است      ۲.  $Ker(T) = \{0\}$       ۳.  $range(T) = m$       ۴.  $Ker(T) = n$

۲۰- فرض کنید  $P_n$  فضای برداری چندجمله های از درجه نابیشتر از  $n$  و  $f, g$  دو عضو در  $P_n$  باشد. ضرب داخلی

در  $P_n$  را به صورت  $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$  تعریف می کنیم. آنگاه نرم تابع  $f(x) = x^2 + 2$  کدام است؟

۱.  $\frac{83}{15}$       ۲.  $\frac{81}{15}$       ۳.  $\frac{71}{15}$       ۴.  $\frac{73}{15}$

### سوالات تشریحی

۱.۲۰ نمره

۱- معکوس ماتریس زیر را در صورت وجود بیابید.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

۱.۲۰ نمره

۲- فرض کنید  $A$  و  $B$  دو ماتریس سطری معادل باشند. در این صورت  $A$  و  $B$  دارای یک فضای سطری

هستند و  $rank(A) = rank(B)$

۱.۲۰ نمره

۳- الف) نشان دهید ماتریس  $A = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$  قطری شدنی است.

ب) ماتریس قطری  $D$  متشابه با  $A$  را پیدا کنید.

ج) تبدیل تشابهی را که  $A$  را قطری می سازد به دست آورید.

۱.۲۰ نمره

۴- هسته و برد تبدیل خطی توصیف شده توسط ماتریس زیر را تعیین کنید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

۱.۲۰ نمره

۵- رتبه ماتریس زیر را پیدا کنید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

نمبر سوال	جواب صحیح
1	ج
2	الف
3	ج
4	د
5	ج
6	ب
7	د
8	ب
9	الف
10	ج
11	ب
12	ج
13	د
14	ج
15	د
16	ب
17	د
18	ج
19	ب
20	الف

۱- کدام یک از ماتریس های زیر به فرم پلکانی تحویل یافته است؟

$$\begin{array}{ll}
 ۱. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & ۲. \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \\
 ۳. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} & ۴. \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

۲- چه صورت دستگاه معادلات خطی همگن دارای تعداد بسیاری جواب است؟

۱. تعداد متغیر ها برابر تعداد معادلات باشد

۲. تعداد متغیر ها کمتر از تعداد معادلات باشد

۳. تعداد متغیر ها بیشتر از تعداد معادلات باشد

۴. در صورتی که بتوان ماتریس ضرایب را به ماتریس پلکانی تحویل یافته در آورد

۳- اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$  باشد آنگاه  $A^4$  کدام است

$$\begin{array}{ll}
 ۱. A = \begin{bmatrix} 11 & -19 \\ -5 & 6 \end{bmatrix} & ۲. A = \begin{bmatrix} 11 & 10 \\ -5 & 6 \end{bmatrix} \\
 ۳. A = \begin{bmatrix} 11 & -19 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} & ۴. A = \begin{bmatrix} -11 & -10 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

۴- اگر  $A = \begin{bmatrix} 2+3i & 1-4i \\ 6 & 7i \end{bmatrix}$  باشد آنگاه  $A^*$  کدام است

$$\begin{array}{ll}
 ۱. A^* = \begin{bmatrix} 2-3i & 1+4i \\ 6 & 7i \end{bmatrix} & ۲. A^* = \begin{bmatrix} 2+3i & 1-4i \\ 6 & -7i \end{bmatrix} \\
 ۳. A^* = \begin{bmatrix} 2+3i & 1-4i \\ -6 & -7i \end{bmatrix} & ۴. A^* = \begin{bmatrix} 2-3i & 6 \\ 1+4i & -7i \end{bmatrix}
 \end{array}$$

۵- کدام یک از ماتریس های زیر معکوس دارد؟

$$\begin{array}{ll}
 ۱. \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix} & ۲. \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 ۳. \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} & ۴. \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & -4 \\ 4 & 3 & 2 & -8 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

۶- دترمینان ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$  کدام است

۱۴ .۴

۱۳ .۳

۱۲ .۲

۱۱ .۱

۷- کدام ماتریس  $M_{33}$  کهاد  $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$  کدام است

۸ .۴

۷ .۳

۶ .۲

۵ .۱

۸- اگر ماتریس مربعی  $A$  معکوس پذیر نباشد، آنگاه  $A(adj(A))$  چگونه ماتریسی است

۴ . ماتریس صفر

۳ . ماتریس نامتقارن

۲ . ماتریس متقارن

۱ . ماتریس هرمیتی

۹- تصویر نقطه  $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$  تحت دوران  $\frac{\pi}{2}$  حول مبدا کدام است

۴ .  $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

۳ .  $\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$

۲ .  $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

۱ .  $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

۱۰- ماتریس استاندارد  $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x + y \\ 3y \end{bmatrix}$  کدام است

۴ .  $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

۳ .  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

۲ .  $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

۱ .  $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

۱۱- اگر  $V$  یک فضای برداری باشد، کدام یک از موارد زیر غلط است؟

۱. اگر  $V_1$  و  $V_2$  زیر فضاهای  $V$  باشند، آنگاه  $V_1 \cup V_2$  نیز زیر فضا است.

۲. اگر  $V_1$  و  $V_2$  زیر فضاهای  $V$  باشند، آنگاه  $V_1 \cap V_2$  نیز زیر فضا است

۳. اگر  $V_1$  و  $V_2$  زیر فضاهای  $V$  باشند، آنگاه  $V_1 + V_2$  نیز زیر فضا است

۴. اگر  $V_1$  زیر فضای  $V_2$  و  $V_2$  زیر فضای  $V$  باشد آنگاه  $V_1$  نیز زیر فضای  $V$  است

۱۲- درجه صورت بردارهای  $(x, y, z)$ ،  $(2, 1, 3)$  و  $(1, 2, 3)$  مستقل خطی اند

۴ .  $x + y - z = 0$

۳ .  $x + y - z \neq 0$

۲ .  $2x + y - z = 0$

۱ .  $x + 2y + z \neq 0$

۱۳- فرض کنید  $V$  فضای برداری چند جمله ای های زوج و  $W$  فضای برداری چند جمله ای های فرد روی میدان  $F$  باشند. اگر عدد کاردینال یک پایه برای  $V$  و  $W$  را به ترتیب  $\dim V$  و  $\dim W$  نشان دهیم کدام رابطه برقرار است.

- ۱.  $\dim V = \dim W$
- ۲.  $\dim V < \dim W$
- ۳.  $\dim V > \dim W$
- ۴. اگر ابعاد متناهی باشند آنگاه  $\dim V = \dim W$

۱۴- رتبه ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix}$  کدام است

- ۱. ۱
- ۲. ۲
- ۳. ۳
- ۴. ۴

۱۵- کدام یک مقدار ویژه ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$  است؟

- ۱. ۱
- ۲. ۲
- ۳. ۳
- ۴. ۴

۱۶- چند جمله ای مشخصه ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$  کدام است

- ۱.  $-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4$
- ۲.  $-\lambda^3 - 5\lambda^2 - 8\lambda + 4$
- ۳.  $-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda - 4$
- ۴.  $-\lambda^3 - 5\lambda^2 - 8\lambda - 4$

۱۷- بردار ویژه ی نظیر کوچکترین مقدار ویژه ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  کدام است

- ۱.  $(1,1)$
- ۲.  $(1,-1)$
- ۳.  $(1,2)$
- ۴.  $(2,1)$

۱۸- اگر تبدیل خطی  $T : R^5 \rightarrow R^5$  تعریف شده به صورت  $T(a,b,c,d,e) = (a+b+c, 2a+3b, a-4b, 0, c-d, 2c+d)$  باشد، در این صورت رتبه  $T$  کدام است

- ۱. ۱
- ۲. ۲
- ۳. ۳
- ۴. ۴

۱۹- بردار مختصات  $u = 5x^2 + x - 3$  نسبت به پایه  $B = \{x^2, x, 1\}$  کدام است

۱.  $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$  ۲.  $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$  ۳.  $\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$  ۴.  $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

۲۰- مقدار  $\|u\|$  برای بردار  $u = (2 + 3i, -1 + 5i)$  کدام است

۱.  $\sqrt{39}$  ۲.  $\sqrt{40}$  ۳.  $\sqrt{41}$  ۴.  $\sqrt{42}$

### سوالات تشریحی

۱- اگر  $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -10 & 6 \end{bmatrix}$  آنگاه ماتریس  $A$  را بیابید

۱.۲۰ نمره

۲- دستگاه معادلات زیر را به روش کرامر حل کنید

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + 3z = 5 \\ 4x + 5y + z = 3 \end{cases}$$

۱.۲۰ نمره

۳- نشان دهید ماتریس زیر متعامد است

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

۱.۲۰ نمره

۴- مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$  را به دست آورید

۱.۲۰ نمره

۵- بعدهای هسته و برد تبدیل خطی  $T$  تعریف شده توسط ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  را بیابید

۱.۲۰ نمره

نمبر سوال	ياسخ صحيح
1	الف
2	ج
3	ب
4	د
5	ب
6	د
7	ب
8	د
9	ب
10	الف
11	الف
12	ج
13	الف
14	ب
15	ج
16	الف
17	ب
18	الف
19	ج
20	الف

۱- کدامیک از ماتریس های زیر به صورت فرم پلکانی تحویل یافته است؟

$$\begin{array}{llll}
 ۱. \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & ۲. \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} & ۳. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} & ۴. \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

۲- فرض کنید  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 0 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$  باشد در این صورت ماتریس حاصل ضرب  $AB$  برابر کدام است؟

$$\begin{array}{llll}
 ۱. \begin{bmatrix} 16 & -6 & 2 \\ 10 & 0 & 2 \end{bmatrix} & ۲. \begin{bmatrix} 16 & 10 \\ -6 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} & ۳. \begin{bmatrix} 1 & -7 & -3 \\ 5 & 0 & -10 \end{bmatrix} & ۴. \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -7 & 0 \\ -3 & -10 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

۳- اگر  $A$  یک ماتریس مربعی باشد در این صورت  $A - A^T$  همواره در کدام گزینه صدق می کند؟

۱. متقارن است. ۲. پادمتقارن است. ۳. همانی است. ۴. وارونپذیر است.

۴- فرض کنید که  $A$  و  $B$  دو ماتریس مربعی هم اندازه روی اعداد مختلط و  $z$  یک عدد مختلط باشد در این صورت کدام گزینه در خصوص ترانپوزاده مزدوج نادرست است؟

$$\begin{array}{llll}
 ۱. (A+B)^* = A^* + B^* & ۲. (AB)^* = B^* A^* & ۳. (zA)^* = zA^* & ۴. (A^*)^* = A
 \end{array}$$

۵- فرض کنید  $\begin{bmatrix} 2x & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$  باشد. در این صورت مقدار  $x$  برابر کدام است؟

۱. ۱ ۲. ۲ ۳. ۳ ۴. ۴

۶- همسازهی درایه  $a_{12}$  در ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$  برابر کدام است؟

۱. ۶ ۲. -۶ ۳. ۸ ۴. -۸

۷- مقدار دترمینان  $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -6 & -2 \end{vmatrix}$  کدام گزینه است؟

۱. ۶ ۲. ۸ ۳. ۱۰ ۴. ۷

۸- به ازای کدام مقادیر  $\lambda$  دستگاه معادله زیر دارای جواب غیربدیهی است؟

$$\begin{cases} (\lambda + 2)x_1 + (\lambda + 4)x_2 = 0 \\ 2x_1 + (\lambda + 1)x_2 = 0 \end{cases}$$

۱.  $\lambda = 1, 2$

۲.  $\lambda = 2, 3$

۳.  $\lambda = -1, -2$

۴.  $\lambda = -3, 2$

۹- زاویه بین دو بردار  $u = (1, 0, 0)$  و  $v = (1, 0, 1)$  در  $R^3$  کدام است؟

۱. 30

۲. 45

۳. 60

۴. 90

۱۰- کدام یک از نگاشت های زیر عملگر خطی است؟

۱.  $T: R^2 \rightarrow R^2$  با  $T(x, y) = (2x, x - y)$

۲.  $T: R^3 \rightarrow R^2$  با  $T(x, y, z) = (3x, y^2)$

۳.  $T: R^3 \rightarrow R^2$  با  $T(x, y, z) = (x + 1, y)$

۴.  $T: R^3 \rightarrow R^2$  با  $T(x, y, z) = (\ln x, z)$

۱۱- معادله ی تصویر خط  $y = 2x + 3$  تحت انتقال  $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$  کدام گزینه است؟

۱.  $y = -x$

۲.  $y = -2x$

۳.  $y = x$

۴.  $y = 2x$

۱۲- کدام یک از مجموعه بردارهای به فرم داده شده زیر، زیرفضایی از  $R^3$  هستند؟

۱.  $(a, b, a + 3)$

۲.  $(a, 4a, -3a)$

۳.  $(a, b, 2)$

۴.  $(a, b, 4a - 1)$

۱۳- کدام یک از مجموعه های زیر مستقل خطی است؟

۱.  $\{(1, 2), (5, 10)\}$

۲.  $\{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$

۳.  $\{(1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9)\}$

۴.  $\{(1, 2), (5, 8)\}$

۱۴- رتبه ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix}$  برابر کدام گزینه است؟

۱. 0

۲. 1

۳. 2

۴. 3

۱۵- تصویر بردار  $v = (6, 7)$  بر روی بردار  $u = (1, 4)$  برابر کدام گزینه است؟

۱. (1, 4)

۲. (2, 8)

۳. (3, 5)

۴. (4, 8)

۱۶- فرض کنید  $A$  یک ماتریس مربع باشد. کدام گزینه نادرست است؟

۱.  $A$  وارونپذیر است اگر و فقط اگر  $|A| \neq 0$

۲. معادله مشخصه  $A$  عبارت است از  $\det(A - I_n \lambda) = 0$

۳. دستگاه همگن  $AX = 0$  دارای فقط جواب بدیهی  $X = 0$  است اگر و فقط اگر  $|A| = 0$ .

۴.  $A$  وارونپذیر است اگر و فقط اگر  $A$  نامنفرد باشد.

۱۷- فرض کنید  $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$  باشد. مقادیر ویژه ماتریس  $3A^2$  کدام است؟

۱. ۱۲ و ۱۲ و ۲۷      ۲. ۹ و ۴ و ۴      ۳. ۵ و ۱۰ و ۱۵      ۴. ۶ و ۹ و ۱۲

۱۸- بردار مختصات  $v = (2, -5, 10)$  نسبت به پایه‌ی  $B = \{(1, 0, 0), (0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}), (0, \frac{4}{5}, \frac{-3}{5})\}$  در فضای  $R^3$  کدام است؟

۱.  $(2, 5, -10)$       ۲.  $(-2, 5, -10)$       ۳.  $(2, 5, 10)$       ۴.  $(-2, -5, -10)$

۱۹- فضای ضرب داخلی چندجمله‌ای‌ها با ضرب داخلی  $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f \cdot g dx$  را در نظر بگیرید. در این صورت کسینوس

زاویه بین توابع  $f(x) = 5x^2$  و  $g(x) = 3x$  برابر کدام گزینه است؟

۱.  $\frac{\sqrt{11}}{4}$       ۲.  $\frac{\sqrt{13}}{4}$       ۳.  $\frac{\sqrt{15}}{4}$       ۴.  $\frac{\sqrt{17}}{4}$

۲۰- فضای ضرب داخلی چندجمله‌ای‌ها با ضرب داخلی  $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f \cdot g dx$  را در نظر بگیرید. در این صورت فاصله بین

توابع  $f(x) = x^2$  و  $g(x) = x^2 - 3x + 5$  برابر کدام گزینه است؟

۱.  $\sqrt{11}$       ۲.  $\sqrt{15}$       ۳.  $\sqrt{13}$       ۴.  $\frac{\sqrt{19}}{10}$

### سوالات تشریحی

۱- معکوس ماتریس زیر را با استفاده از روش الحاقی بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

۲- نشان دهید که  $f(x) = x^2 + 1$  و  $g(x) = 3x - 1$  و  $h(x) = -4x + 1$  یک پایه برای فضای چندجمله ایهای درجه دوم  $P_2$  است.

۳- ثابت کنید ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$  قطری شدنی نیست.

۴- فرض کنید  $T : U \rightarrow V$  یک نگاشت خطی باشد در این صورت نشان دهید  
 $\dim \text{Ker}(T) + \dim \text{range}(T) = \dim(\text{domain}(T))$

۵- هسته و برد عملگر خطی  $T(x, y, z) = (x, y, 0)$  را مشخص کنید.

ياشيخ صحيح  
شماره  
سواب

1	الف
2	د
3	ب
4	ج
5	ب
6	ج
7	د
8	د
9	ب
10	الف
11	د
12	ب
13	د
14	ج
15	ب
16	ج
17	الف
18	الف
19	ج
20	ج

۱- اگر  $B, A$  دو ماتریس قطری  $n \times n$  باشند و  $C$  یک اسکالر باشد آن گاه کدام گزینه درست است؟

۱.  $A + B$  معکوسپذیر است.  
۲.  $C.A$  پادمتقارن است.  
۳.  $A.B$  قطری است.  
۴.  $A.B$  ماتریس واحد است.

۲- ترانهاده مزدوج ماتریس  $\begin{bmatrix} 2+3i & 1-4i \\ 6 & 7i \end{bmatrix}$  کدام است؟

۱.  $\begin{bmatrix} 2+3i & 6 \\ 1-4i & 7i \end{bmatrix}$  .۱  
۲.  $\begin{bmatrix} 2-3i & 1+4i \\ 6 & -7i \end{bmatrix}$  .۲  
۳.  $\begin{bmatrix} 2-3i & 6 \\ 1+4i & -7i \end{bmatrix}$  .۳  
۴.  $\begin{bmatrix} 2-3i & 6 \\ 1-4i & 7i \end{bmatrix}$  .۴

۳- اگر  $B, A$  دو ماتریس معکوس پذیر و  $C$  یک اسکالر باشد آن گاه کدام گزینه درست است؟

۱.  $(c.A)^{-1} = c.A^{-1}$  .۱  
۲.  $(A.B)^{-1} = A^{-1}.B^{-1}$  .۲  
۳.  $(A')^{-1} = \frac{1}{A'}$  .۳  
۴.  $(A')^{-1} = (A^{-1})'$  .۴

۴- حاصل دترمینان ماتریس  $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  کدام است؟

۱. 2 .۱  
۲. -2 .۲  
۳. 1 .۳  
۴. -1 .۴

۵- اگر  $A$  ماتریسی مربعی باشد و  $k$  برابر سطر دوم را به سطر سوم اضافه کنیم و سطر اول را قرینه کنیم تا ماتریس  $B$  بدست آید آن گاه حاصل دترمینان  $B$  کدام است؟

۱.  $-|A|$  .۱  
۲.  $-k|A|$  .۲  
۳.  $k|A|$  .۳  
۴.  $|A|$  .۴

۶- اگر  $A$  ماتریسی  $2 \times 2$  و معکوس پذیر و  $\det(A) = 3$  باشد آن گاه حاصل  $\det\left(\frac{1}{9} A' A^{-1}\right)$  برابر است با:

۱.  $\frac{1}{9}$  .۱  
۲.  $-\frac{1}{9}$  .۲  
۳.  $\frac{1}{81}$  .۳  
۴.  $-\frac{1}{81}$  .۴

۷- در معادله ی  $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & x & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$  مقدار  $x$  کدام است؟

۱. 0 .۱  
۲. -1 .۲  
۳. 2 .۳  
۴. -2 .۴

۸- ماتریس تبدیل خطی  $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-z \\ y+x \\ z-y \end{pmatrix}$  کدام است؟

۱.  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  ۲.  $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$  ۳.  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$  ۴.  $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

۹- فرض کنید فضای برداری تمام ماتریس های  $2 \times 2$  با درآیه های حقیقی  $M_{2 \times 2}$  باشد. کدام مورد زیر فضای  $M_{2 \times 2}$  است؟

۱.  $\left\{ \begin{bmatrix} a & 1 \\ b & c \end{bmatrix} : a, b, c \in R \right\}$  ۲.  $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{bmatrix} : a, b \in R \right\}$  ۳.  $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & c \end{bmatrix} : a, b, c \in R \right\}$  ۴.  $\left\{ \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{bmatrix} : a, b \in R \right\}$

۱۰- اگر  $v_1 = (0, 1)$  و  $v_2 = (1, -1)$  و  $(3, 5) = c_1 v_1 + c_2 v_2$  آن گاه مقدار  $c_1 + c_2$  برابر است با:

۱. ۱۱ ۲. ۸ ۳. ۳ ۴. ۵

۱۱- اگر  $P_4$  فضای برداری چند جمله ایهای از درجه حداکثر ۴ باشد آن گاه بعد این فضا برابر است با:

۱. ۲ ۲. ۴ ۳. ۳ ۴.  $+\infty$

۱۲- اگر  $B$  یک پایه برای فضای برداری  $V$  با ۱۰ بردار باشد و زیر مجموعه  $M$  از  $V$  مستقل خطی باشد آن گاه در مورد تعداد بردارهای  $M$  چه می توان گفت؟

۱. حداکثر ۵ بردار دارد ۲. بیش از ۱۰ بردار دارد ۳. ۱۰ بردار دارد ۴. حداکثر ۱۰ بردار دارد.

۱۳- فرم پلکانی تحویل یافته ماتریس  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$  کدام است؟

۱.  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  ۲.  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  ۳.  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  ۴.  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

-۱۴

فرم تحویل شده ماتریس افزوده ی یک دستگاه سه معادله و سه مجهول بصورت  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$  است. کدام گزینه

در مورد جواب این دستگاه درست است؟

۱. دستگاه فقط یک جواب دارد
۲. دستگاه جواب غیر بدیهی دارد
۳. دستگاه جواب ندارد
۴. دستگاه بی شمار جواب دارد

-۱۵

اگر  $C, B, A$  سه ماتریس  $3 \times 3$  و  $AB = C$  و  $a(2) = (1 \ -1 \ x)$  سطر دوم  $A$  و  $b(3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  ستون سوم  $B$  و

$c_{23} = 5$  آن گاه مقدار  $x$  کدام است؟

۱. -3
۲. 3
۳. 1
۴. -1

-۱۶ در یک دستگاه معادلات خطی غیر همگن با پنج معادله و سه مجهول کدام گزینه در مورد ماتریس تحویل یافته ی افزوده ی دستگاه درست است؟

۱. حداکثر یک سطر کامل صفر دارد
۲. سطر کامل صفر ندارد
۳. حداقل دو سطر کامل صفر دارد
۴. حداقل سه سطر کامل صفر دارد

-۱۷

اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$  آن گاه مجموع مقادیر ویژه ی  $A$  برابر است با:

۱. 2
۲. 3
۳. 5
۴. 6

-۱۸ در خصوص مقادیر ویژه ماتریس های متقارن کدام گزینه درست است؟

۱. حقیقی و متمایزند
۲. چند گانگی مقادیر ویژه برابر 1 است
۳. مقدار ویژه مختلط هم دارد
۴. فضا های ویژه ی آن متعامدند

-۱۹ اگر تبدیل خطی  $T: R^n \rightarrow R^m$  با ضابطه ی  $T(X) = AX$  یک به یک باشد آن گاه کدام گزینه **نادرست** است؟

۱.  $A$  معکوس پذیر است
۲.  $\det(A) \neq 0$
۳. رتبه ی  $A$  برابر  $n$  است
۴.  $A$  متقارن است.

۲۰- اگر  $T: R^2 \rightarrow R^2$  یک تبدیل خطی با ماتریس  $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  باشد آن گاه  $T(x, y)$  برابر است با:

۱.  $(-x+2y, x+y)$     ۲.  $(x+2y, x-y)$     ۳.  $(x, -y)$     ۴.  $(-x, y)$

### سوالات تشریحی

۱.۲۰ نمره

۱- اگر  $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  آن گاه حاصل  $\det(A')$  را بدست آورید.

۱.۲۰ نمره

۲- فرض کنید  $U$  فضای برداری تولید شده توسط توابع  $f(x) = x+1$  و  $g(x) = 2x^2 - 2x + 3$  باشد. نشان دهید تابع  $h(x) = 6x^2 - 10x + 5$  در  $U$  قرار دارد.

۱.۲۰ نمره

۳- آیا مجموعه ی  $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right\}$  یک پایه برای فضای برداری  $M_{2 \times 2}$  است؟ چرا؟

۱.۲۰ نمره

۴- ماتریس متقارن  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$  را بطور متعامد قطری کنید.

۱.۲۰ نمره

۵- تبدیل خطی  $T: R^3 \rightarrow R^2$  با ضابطه ی  $T(x, y, z) = (x-y, x+z)$  را در نظر بگیرید. مجموعه ی همه ی بردارهایی که توسط  $T$  به بردار  $(1, 4)$  تصویر می شوند را پیدا و رسم کنید. آیا این مجموعه زیر فضای  $R^3$  است؟ چرا؟

نمبر رد سواب	باسخ صحیح
1	ج
2	ج
3	د
4	الف
5	الف
6	ج
7	د
8	ج
9	ج
10	الف
11	ب
12	د
13	ج
14	ج
15	ب
16	ج
17	د
18	د
19	د
20	الف

۱- کدامیک از ماتریس های زیر هرمیتی است؟

۱.  $\begin{bmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 3 \end{bmatrix}$

۲.  $\begin{bmatrix} i & 2 \\ 2 & -i \end{bmatrix}$

۳.  $\begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1+i & 3 \end{bmatrix}$

۴.  $\begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ i & -1 \end{bmatrix}$

۲- اگر  $A$  یک ماتریس مربعی باشد کدامیک از ماتریس های زیر همواره متقارن است؟

۱.  $A - A'$

۲.  $A' - A$

۳.  $A + A'$

۴.  $A^2$

۳- معکوس ماتریس  $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$  کدامست؟

۱.  $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

۲.  $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$

۳.  $\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

۴.  $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

۴- دترمینان ماتریس  $A$  کدام است؟

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

۱. 40

۲. 60

۳. 80

۴. 100

۵- به ازای چه مقداری از  $\lambda$  دستگاه زیر دارای جواب غیربدیهی است؟

$$\begin{cases} (\lambda - 3)x_1 - 8x_2 = 0 \\ 2x_1 + (\lambda + 5)x_2 = 0 \end{cases}$$

۱. -1

۲. 0

۳. 1

۴. 2

۶- زاویه بین دو بردار  $(1, \sqrt{3})$  و  $(2, 0)$  کدام است؟

۱.  $\frac{\pi}{6}$

۲.  $\frac{\pi}{4}$

۳.  $\frac{\pi}{3}$

۴.  $\frac{\pi}{2}$

۷- کدامیک از نگاشت های زیر خطی است؟

۱.  $T(x, y) = (x + y, \sin y)$

۲.  $T(x, y) = (x + y, x - y)$

۳.  $T(x, y) = (x^2, y)$

۴.  $T(x, y) = (xy, 2)$

۸- تصویر نقطه  $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$  تحت دنباله‌هایی از نگاشت‌های انعکاس نسبت به محور  $x$  ها و سپس دوران به اندازه  $\frac{\pi}{2}$  کدام است؟

۱.  $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$       ۲.  $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$       ۳.  $\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$       ۴.  $\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$

۹- وارون یک دوران به اندازه زاویه  $\theta$ ، دوران به اندازه کدامیک از زاویه‌های زیر است؟

۱.  $\pi + \theta$       ۲.  $\frac{\pi}{2} + \theta$       ۳.  $\frac{\pi}{2} - \theta$       ۴.  $-\theta$

۱۰- کدامیک از بردارهای زیر در  $R^2$  مستقل خطی است؟

۱.  $\{(1,2), (3,6)\}$       ۲.  $\{(0,0), (7,8)\}$   
۳.  $\{(1,2), (2,3)\}$       ۴.  $\{(1,2), (3,4), (5,6)\}$

۱۱- به ازای چه مقدار از  $a$  مجموعه  $\{(1,2,3), (a,5,6), (7,8,9)\}$  وابسته خطی است؟

۱. ۲      ۲. ۴      ۳. ۶      ۴. ۸

۱۲- رتبه ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix}$  کدام است؟

۱. ۰      ۲. ۱      ۳. ۲      ۴. ۳

۱۳- تصویر بردار  $v = (6,7)$  روی بردار  $u = (1,4)$  کدام است؟

۱.  $(2,8)$       ۲.  $(5,4)$       ۳.  $(3,9)$       ۴.  $(7,6)$

۱۴- مجموع ریشه‌های معادله  $\det(xI - A) = 0$  در ماتریس داده شده زیر کدام است؟

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

۱. ۳      ۲. ۴      ۳. ۵      ۴. ۶

۱۵- کدامیک از ماتریس های زیر قطری شدنی متعامد است؟

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ .۴	$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ .۳	$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ .۲	$\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$ .۱
---------------------------------------------------	---------------------------------------------------	---------------------------------------------------	---------------------------------------------------

۱۶- تبدیل خطی  $T: R^3 \rightarrow R^2$  تعریف شده به صورت زیر به روی بردارهای پایه  $R^3$  را در نظر بگیرید. در این صورت  $T(1, -2, 3)$  کدامست؟

$$T(0, 0, 1) = (3, 0) \text{ و } T(0, 1, 0) = (2, 1) \text{ و } T(1, 0, 0) = (3, -1)$$

$(-5, 6)$ .۴	$(3, 7)$ .۳	$(8, -3)$ .۲	$(-4, 7)$ .۱
--------------	-------------	--------------	--------------

۱۷- اگر  $T(x, y, z) = (x, 2x, y - z)$  باشد در این صورت  $\dim \text{Ker} T$  کدامست؟

۳ .۴	۲ .۳	۱ .۲	۰ .۱
------	------	------	------

۱۸- بردارهای  $u = (2 + 3i, -1 + 5i)$  و  $v = (1 + i, -i)$  را در  $C^2$  در نظر بگیرید.  $d(u, v)$  کدام است؟

$\sqrt{48}$ .۴	$\sqrt{42}$ .۳	$\sqrt{40}$ .۲	$\sqrt{32}$ .۱
----------------	----------------	----------------	----------------

۱۹- حاصلضرب نقطه ای  $f(x) = 2x + 1$  و  $g(x) = 3x - 2$  با توجه به ضرب داخلی  $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f \cdot g dx$  کدامست؟

$\frac{1}{3}$ .۴	$\frac{-1}{3}$ .۳	$\frac{1}{2}$ .۲	$\frac{-1}{2}$ .۱
------------------	-------------------	------------------	-------------------

۲۰- کسینوس زاویه بین توابع  $f(x) = x^2$  و  $g(x) = 3x$  با توجه به ضرب داخلی  $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f \cdot g dx$  کدامست؟

$\frac{\sqrt{15}}{4}$ .۴	$\frac{\sqrt{13}}{4}$ .۳	$\frac{\sqrt{11}}{4}$ .۲	$\frac{\sqrt{7}}{4}$ .۱
--------------------------	--------------------------	--------------------------	-------------------------

قائمة تصنيف  
سواء

1	الف
2	ج
3	د
4	الف
5	الف
6	ج
7	ب
8	الف
9	د
10	ج
11	ب
12	ج
13	الف
14	ج
15	الف
16	ب
17	ب
18	ج
19	الف
20	د

۱- اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 0 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$  باشد در این صورت ماتریس  $AB$  کدامست؟

۱.  $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -7 & 0 \\ -3 & -10 \end{bmatrix}$  ۲.  $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

۳.  $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

۴. قابل ضرب کردن نیست.

۲- اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$  باشد در این صورت  $A^4$  کدامست؟

۱.  $\begin{bmatrix} -17 & 11 \\ 12 & 9 \end{bmatrix}$  ۲.  $\begin{bmatrix} 13 & 5 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$  ۳.  $\begin{bmatrix} 11 & -10 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$  ۴.  $\begin{bmatrix} 15 & -4 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}$

۳- ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  یک ماتریس ..... است

۱. خودتوان است. ۲. پوچ توان است. ۳. معکوس پذیر است. ۴. متقارن است.

۴- اگر  $A$  یک ماتریس مربعی باشد در این صورت کدامیک از ماتریس های زیر همواره متقارن است؟

۱.  $A - A^t$  ۲.  $A^2$  ۳.  $A + A^t$  ۴.  $A + I$

۵- ترانهاده مزدوج ماتریس  $\begin{bmatrix} 2-3i & 5i \\ 2 & 5-4i \end{bmatrix}$  کدام است؟

۱.  $\begin{bmatrix} 2+3i & 2 \\ -5i & 5+4i \end{bmatrix}$  ۲.  $\begin{bmatrix} 2-3i & 2 \\ 5i & 5-4i \end{bmatrix}$  ۳.  $\begin{bmatrix} 5-4i & 5i \\ 2 & 2-3i \end{bmatrix}$  ۴.  $\begin{bmatrix} 5+4i & 2 \\ -5i & 2+3i \end{bmatrix}$

۶- اگر  $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ -1 & x-2 \end{vmatrix} = 7$  باشد در این صورت  $x$  کدامست؟

۱. ۱ ۲. ۲ ۳. ۳ ۴. ۴

۷- دترمینان ماتریس زیر کدامست؟

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & 4 \\ 6 & -6 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

۱. -2      ۲. -1      ۳. 0      ۴. 1

۸- حاصل ضرب نقطه ای بردارهای  $u = (1, -2, 4)$  و  $v = (3, 0, 2)$  کدامست؟

۱. 11      ۲. 13      ۳. 15      ۴. 17

۹- زاویه بین بردارهای  $u = (1, 0, 0)$  و  $v = (1, 0, 1)$  در  $R^3$  کدام است؟

۱. 30 درجه      ۲. 45 درجه      ۳. 60 درجه      ۴. 90 درجه

۱۰- کدامیک از نگاشت های زیر خطی است؟

۱.  $T(x, y) = (x - y, 3x)$       ۲.  $T(x, y, z) = (xy, 3z)$

۳.  $T(x, y) = (x + 1, y - 1)$       ۴.  $T(x, y) = (\sin x, \ln y)$

۱۱- تصویر نقطه  $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$  تحت دوران  $\frac{\pi}{2}$  حول مبدا کدامست؟

۱.  $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$       ۲.  $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$       ۳.  $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$       ۴.  $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

۱۲- مجموعه همه بردارهای  $(a, b, c)$  در کدامیک از حالات زیر یک زیرفضای  $R^3$  است؟

۱.  $a + b + c = 1$       ۲.  $a = b + c$       ۳.  $ab = 5$       ۴.  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$

۱۳- کدامیک از مجموعه بردارهای زیر  $R^2$  را تولید می کند؟

۱.  $\{(1, 2), (2, 4)\}$       ۲.  $\{(1, 1), (-2, 6)\}$       ۳.  $\{(6, 2), (2, 3), (4, 1)\}$       ۴.  $\{(1, 1)\}$

۱۴- رتبه ماتریس زیر کدامست؟

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۴ . 4

۳ . 3

۲ . 2

۱ . 1

۱۵- مجموع مقادیر ویژه ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$  کدامست؟

۴ . 7

۳ . 5

۲ . 4

۱ . 3

۱۶- حدود  $m$  چقدر باشد تا ماتریس  $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ m & 3 \end{bmatrix}$  راستای همه بردارهای صفحه را تغییر دهد؟

۴ .  $m > 2$

۳ .  $m < 2$

۲ .  $m > 1$

۱ .  $m < 1$

۱۷- بردار ویژه نظیر کوچکترین مقدار ویژه ماتریس  $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  کدامست؟

۴ . (2,1)

۳ . (1,2)

۲ . (1,-1)

۱ . (1,1)

۱۸- بعد هسته عملگر خطی  $T(x, y, z) = (x, y, 0)$  کدامست؟

۴ . 3

۳ . 2

۲ . 1

۱ . 0

۱۹- مختصات  $5x^2 + x - 3$  در ارتباط با پایه استاندارد  $B = \{x^2, x, 1\}$  کدامست؟

۴ .  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}$

۳ .  $\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$

۲ .  $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$

۱ .  $\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

۲۰- ضرب نقطه ای چندجمله ای ها در  $P_n$  را با ضرب داخلی  $\langle f, g \rangle = \int_0^1 fg dx$  تعریف می کنیم. کسینوس زاویه بین

$f(x) = x^2$  و  $g(x) = 3x$  کدامست؟

۴ .  $\frac{\sqrt{7}}{9}$

۳ .  $\frac{\sqrt{10}}{7}$

۲ .  $\frac{\sqrt{13}}{6}$

۱ .  $\frac{\sqrt{15}}{4}$

## سوالات تشریحی

۱.۲۰ نمره

۱- نشان دهید مجموعه  $\{(1,0,-1), (1,1,1), (1,2,4)\}$  یک پایه  $R^3$  است.

۱.۲۰ نمره

۲- مجموعه بردارهای  $\{(1,2,0,3), (4,0,5,8), (8,1,5,6)\}$  یک پایه برای یک زیر فضای سه بعدی مانند  $V$  از  $R^4$  تشکیل می دهند. یک پایه یکه متعامد برای  $V$  بسازید.

۱.۲۰ نمره

۳- نشان دهید ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$  قطری پذیر نیست.

۱.۲۰ نمره

۴- نشان دهید نگاشت خطی  $T$  یک به یک است اگر و تنها اگر هسته آن بردار صفر باشد.

۱.۲۰ نمره

۵- معکوس ماتریس زیر را در صورت وجود بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 7 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

نمبر سوال	ياسخ صحيح
1	الف
2	ج
3	ب
4	ج
5	الف
6	ج
7	ج
8	الف
9	ب
10	الف
11	ج
12	ب
13	ب
14	ج
15	د
16	د
17	ب
18	ب
19	ج
20	الف

۱- یک دستگاه همگن از معادلات خطی که تعداد متغیرهایش بیشتر از تعداد معادلات است در کدام گزینه صدق می‌کند؟

۱. فقط یک جواب دارد.
۲. تعداد بسیاری جواب دارد.
۳. حداکثر به تعداد متغیرهایش جواب دارد.
۴. دارای جواب نیست.

۲- کدام گزینه نادرست است؟

۱. تمام جریاناتی که به یک اتصال وارد می‌شوند می‌بایست از آن خارج شوند.
۲. مجموع عبارات در هر جهت در اطراف یک مسیر بسته مساوی با ولتاژ کل در مسیر در آن جهت نیست.
۳. در فرم پلکانی تحویل یافته یک ماتریس، سطر صفر در پایین سطرهای دیگر قرار دارد.
۴. در فرم پلکانی تحویل یافته یک ماتریس، هر ستون حداکثر یک درایه ۱ دارد.

۳- کدام گزینه در مورد جمع و ضرب ماتریس‌ها نادرست است؟

۱. عمل ضرب روی عمل جمع توزیع پذیر است.
۲. عمل ضرب شرکت پذیر است.
۳. عمل ضرب جابجایی است.
۴. عمل جمع شرکت پذیر است.

۴- فرض کنید  $A$  و  $B$  ماتریس‌های متقارن و هم‌اندازه باشند. یک شرط لازم و کافی برای آن که  $AB$  متقارن باشد کدام گزینه است؟

۱.  $A^2 = A$  و  $B^2 = B$
۲.  $AB = BA$
۳.  $A' = A$
۴.  $B' = B$

۵- کدام گزینه درست است؟

۱.  $tr(A') = tr(A)$
۲.  $(AB)' = A'B'$
۳.  $tr(AB) = tr(A) + tr(B)$
۴.  $tr(A^2) = -tr(A)$

۶- معکوس ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$  کدام گزینه است؟

۱.  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$  ۲.  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$  ۳.  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$  ۴.  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

۷- در یک گراف جهت‌دار بزرگترین فاصله‌ی میان راس‌ها را چه می‌نامند؟

۱. محیط گراف ۲. بزرگی گراف ۳. اندازه‌ی گراف ۴. قطر گراف

۸- دترمینان ماتریس  $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ -2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$  برابر کدام است؟

۱. ۲ ۲. ۴ ۳. ۶ ۴. ۸

۹- فرض کنید  $AX = B$  یک دستگاه با  $n$  معادله‌ی خطی و  $n$  مجهول باشد. کدام گزینه نادرست است؟

۱. اگر  $|A| \neq 0$  باشد، آن‌گاه دستگاه فقط یک جواب منحصر بفرد دارد.  
۲. اگر  $|A| \neq 0$  باشد، آن‌گاه دستگاه دارای جواب یکتای  $X = A^{-1}B$  است.  
۳. اگر  $|A| = 0$  باشد، آن‌گاه دستگاه یا جواب ندارد و یا بی‌نهایت جواب دارد.  
۴. اگر  $B = 0$  باشد، آن‌گاه دستگاه دارای حداقل یک جواب است.

۱۰- زاویه‌ی بین دو بردار  $u = (1, 0, 0)$  و  $v = (1, 0, 1)$  در  $R^3$  کدام است؟

۱.  $\frac{\pi}{8}$  ۲.  $\frac{\pi}{4}$  ۳.  $\frac{\pi}{6}$  ۴.  $\frac{\pi}{12}$

۱۱- فرض کنید  $T_1(X) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} X$  و  $T_2(X) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} X$  و نیز  $T = T_2 \circ T_1$  باشد. تصویر

بردار  $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$  تحت  $T$  کدام است؟

۱.  $\begin{bmatrix} 17 \\ 6 \end{bmatrix}$  ۲.  $\begin{bmatrix} -23 \\ 4 \end{bmatrix}$  ۳.  $\begin{bmatrix} 35 \\ -16 \end{bmatrix}$  ۴.  $\begin{bmatrix} 13 \\ -4 \end{bmatrix}$

۱۲- کدام گزینه نادرست است؟

۱. هر زیرفضا از یک فضای برداری شامل بردار صفر است.
۲. مجموعه‌ی بردارهای به فرم  $(a, a, a+2)$  یک زیرفضای  $R^3$  نیست.
۳. مجموعه‌ی بردارهای به فرم  $(a, 0, 0)$  یک زیرفضای  $R^3$  است.
۴. مجموعه‌ی بردارهای به فرم  $(a, a^2, b)$  یک زیرفضای  $R^3$  است.

۱۳- کدام گزینه در مورد مجموعه‌ی بردارهای  $\{(1, 2, 3), (-2, 1, 1), (8, 6, 10)\}$  در  $R^3$  صحیح است؟

۱. مستقل خطی است.
۲. یک پایه برای  $R^3$  است.
۳. وابسته خطی است.
۴. یک پایه برای زیرفضای از بعد 3 از فضای برداری  $R^3$  است.

۱۴- کدام گزینه نادرست است؟

۱. زیرفضاهای یک بعدی  $R^3$  خط‌هایی هستند که از مبدا می‌گذرند.
۲. زیرفضاهای دو بعدی  $R^3$  صفحه‌هایی هستند که موازی صفحه‌ی  $XY$  باشند.
۳. مبدا مختصات یک زیرفضای  $R^3$  است.
۴. زیرفضاهای دو بعدی  $R^3$  صفحه‌هایی هستند که از مبدا می‌گذرند.

۱۵- رتبه‌ی ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  برابر کدام است؟

۱. 1      ۲. 2      ۳. 3      ۴. 4

۱۶- تصویر بردار  $u = (6, 7)$  روی بردار  $v = (1, 4)$  کدام گزینه است؟

۱.  $2\sqrt{2}(1, 4)$       ۲.  $\frac{34}{85}(6, 7)$       ۳.  $(18, 21)$       ۴.  $(2, 8)$

۱۷- ماتریس قطری مشابه با ماتریس  $A = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$  کدام است؟

۱.  $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$       ۲.  $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$       ۳.  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$       ۴.  $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

۱۸- بردار مختصات  $u = (4, 5)$  نسبت به پایه‌ی  $B = \{(2, 1), (-1, 1)\}$  از  $R^2$  کدام است؟

۱.  $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$       ۲.  $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$       ۳.  $\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$       ۴.  $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

۱۹- پایه‌های  $B = \{(1, 2), (3, -1)\}$  و  $B' = \{(1, 0), (0, 1)\}$  از  $R^2$  را در نظر بگیرید. اگر  $u$  برداری باشد به طوری

که  $u_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$  آن‌گاه  $u_{B'}$  کدام است؟

۱.  $\begin{bmatrix} 7 \\ 17 \end{bmatrix}$       ۲.  $\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix}$       ۳.  $\begin{bmatrix} 15 \\ 2 \end{bmatrix}$       ۴.  $\begin{bmatrix} -5 \\ 4 \end{bmatrix}$

۲۰- فضای ضرب داخلی چندجمله‌ای‌ها را در نظر بگیرید. کسینوس زاویه بین توابع  $f(x) = 5x^2$  و  $g(x) = 3x$  کدام است؟

۴.  $\frac{\sqrt{15}}{4}$

۳.  $\frac{3}{5}$

۲.  $\frac{2\sqrt{3}}{7}$

۱.  $\frac{\sqrt{13}}{6}$

### سوالات تشریحی

۱.۲۰ نمره

۱- دستگاه معادلات 
$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 7 \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 = 7 \end{cases}$$
 را به روش حذفی گاوس-جردن حل کنید.

۱.۲۰ نمره

۲- با استفاده از قاعده کرامر دستگاه معادلات زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = -5 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \end{cases}$$

۱.۲۰ نمره

۳- فاصله نقطه‌ی  $x = (4, 1, -7)$  در  $R^3$  را از زیرفضای  $W$  متشکل از بردارهایی به فرم  $(a, b, b)$  را پیدا کنید.

۱.۲۰ نمره

۴- با استفاده از قضیه‌ی کیلی - هامیلتون وارون ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$  را پیدا کنید.

۱.۲۰ نمره

۵- هسته و برد عملگر خطی  $T(x, y, z) = (x, y, 0)$  را بیابید.

نمبر سوال	جواب صحیح
۱	ب
۲	ب
۳	ج
۴	ب
۵	الف
۶	ج
۷	د
۸	ج
۹	ج
۱۰	ب
۱۱	ب
۱۲	د
۱۳	ج
۱۴	ب
۱۵	ج
۱۶	د
۱۷	ب
۱۸	الف
۱۹	ج
۲۰	د

۱- کدامیک از ماتریسهای زیر یک زیر ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$  است؟

۱.  $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$  ۲.  $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$  ۳.  $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$  ۴.  $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

۲- هرگاه تحویل یافته ماتریس افزوده یک دستگاه معادلات به صورت زیر باشد در این صورت ...

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۱. دستگاه بی نهایت جواب دارد. ۲. دستگاه جواب منحصر به فرد دارد.

۳. دستگاه جواب ندارد. ۴. تمام مجهولات برابر با صفر هستند.

۳- با فرض  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix}$  مولفه سطر دو و ستون دو ماتریس  $AB$  کدام است؟

۱. 19 ۲. 2 ۳. 0 ۴. 10

۴- تعداد ضربهای لازم برای محاسبه  $A_{m \times r} B_{r \times n}$  کدام است؟

۱.  $mr - rn$  ۲.  $mr^2n$  ۳.  $mn$  ۴.  $mrn$

۵- کدامیک از موارد زیر برای ماتریسها صحیح است؟

۱.  $AB = AC$  نتیجه می دهد  $B = C$ .

۲.  $AB = 0$  نتیجه می دهد  $A = 0$  یا  $B = 0$ .

۳.  $A + B = 0$  نتیجه می دهد  $A = 0$  و  $B = 0$ .

۴. هرگاه  $A + B$  و  $AB$  قابل تعریف باشند در این صورت  $A$  و  $B$  مربعی اند.

۶- هرگاه ماتریسهای  $A$  و  $B$  متقارن و هم مرتبه باشند در این صورت  $AB$  متقارن است اگر و تنها اگر ...

۱.  $A = B$       ۲.  $AB = BA$       ۳.  $A^2 = B^2$       ۴.  $A' = B'$

۷- کدامیک جز ویژگی های معکوس ماتریسها نیست؟

۱.  $(A^{-1})^{-1} = A$       ۲.  $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$       ۳.  $(A^{-1})' = (A')^{-1}$       ۴.  $(A^{-1})^n = (A^n)^{-1}$

۸- مقدار دترمینان ماتریس  $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ -2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$  کدام است؟

۱. 4      ۲. 5      ۳. 6      ۴. 7

۹- هرگاه  $|A_{2 \times 2}| = 5$  در این صورت  $|3A|$  کدام است؟

۱. 5      ۲. 15      ۳. 45      ۴. 125

۱۰- هرگاه  $\vec{u} = (1, -2, 4)$  و  $\vec{v} = (3, 0, 2)$  حاصل  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  برابر با چند است؟

۱. 8      ۲. 9      ۳. 12      ۴. 11

۱۱- کدامیک از بردارهای زیر بر  $(5, -1)$  عمود است؟

۱.  $(5, 1)$       ۲.  $(1, 5)$       ۳.  $(-1, 5)$       ۴.  $(1, -5)$

۱۲- تصویر نقطه  $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$  تحت دوران  $\frac{\pi}{2}$  چند است؟

۱.  $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$       ۲.  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$       ۳.  $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$       ۴.  $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

۱۳- کدامیک در خصوص تبدیل خطی نامنفرد  $T: R^2 \rightarrow R^2$  صحیح نیست؟

۱. خط را به خط می نگارد.

۲. پاره خط را به خط می نگارد.

۳. پاره خط را به پاره خط می نگارد.

۴. خطوط گذرنده از مبدا را به خطوط گذرنده از مبدا می نگارد.

۱۴- کدامیک از مجموعه های زیر یک زیر فضای  $R^2$  است؟

۱.  $W = \{(a^2, b) \mid a, b \in R\}$

۲.  $W = \{(0, b) \mid b \in R\}$

۳.  $W = \{(b+1, b) \mid b \in R\}$

۴.  $W = \{(1, b) \mid b \in R\}$

۱۵- کدامیک از مجموعه های زیر یک پایه برای  $R^2$  است؟

۱.  $\{(1, 2), (2, 1)\}$

۲.  $\{(1, 2), (2, 4)\}$

۳.  $\{(1, 2), (0, 0)\}$

۴.  $\{(1, 1), (3, 3)\}$

۱۶- کدامیک از موارد زیر در خصوص دستگاه معادلات خطی با  $m$  معادله و  $n$  مجهول صحیح است؟

۱. هرگاه رتبه ماتریس افزوده و ماتریس ضرایب با هم برابر و مساوی با  $n$  باشد دستگاه جواب منحصر بفرد دارد.

۲. هرگاه رتبه ماتریس افزوده و ماتریس ضرایب با هم برابر و مساوی با  $m$  باشد دستگاه جواب منحصر بفرد دارد.

۳. هرگاه رتبه ماتریس افزوده از ماتریس ضرایب بیشتر باشد دستگاه جواب منحصر بفرد دارد.

۴. هرگاه رتبه ماتریس افزوده از ماتریس ضرایب بیشتر باشد دستگاه بی نهایت جواب دارد.

۱۷- هرگاه بردار  $v = (7, -5, 10)$  را به صورت ترکیب خطی بردارهای یکه متعامد

$u_3 = (0, \frac{4}{5}, \frac{-3}{5}), u_2 = (0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}), u_1 = (1, 0, 0)$  بنویسیم، ضریب بردار  $u_2$  کدام است؟

۱. 10

۲. 7

۳. 5

۴. 2

۱۸- کدامیک از ویژگی های ماتریسهای متعامد است؟

۱.  $A^{-1} = A^t$

۲.  $A^{-1} = A$

۳.  $A^t = A$

۴.  $A^2 = A$

۱۹- معادله مشخصه ماتریس  $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$  کدام است؟

۱.  $x^2 - 3x - 2 = 0$     ۲.  $x^2 - 3x + 2 = 0$     ۳.  $x^2 - x - 2 = 0$     ۴.  $x^2 - x + 2 = 0$

۲۰- هسته عملگر خطی  $T(x, y, z) = (x, y, 0)$  کدام است؟

۱.  $\{(0, y, 0)\}$     ۲.  $\{(x, 0, 0)\}$     ۳.  $\{(0, 0, z)\}$     ۴.  $\{(0, 0, 0)\}$

### سوالات تشریحی

۱.۴۰ نمره

۱- دستگاه معادلات زیر را به روش حذفی گاوس جردن حل کنید.

$$\begin{cases} 2x - 4y + 12z - 10t = 58 \\ -x + 2y - 3z + 2t = -14 \\ 2x - 4y + 9z - 6t = 44 \end{cases}$$

۱.۴۰ نمره

۲- دترمینان ماتریس زیر را به روش حذفی گاوس بدست آورید.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -2 & -5 & 4 \\ 4 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

۱.۴۰ نمره

۳- تصویر مربع واحد را تحت تبدیل خطی  $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$  بدست آورید.

۱.۴۰ نمره

۴- نشان دهید مجموعه  $\{(1, 0, -1), (1, 1, 1), (1, 2, 4)\}$  یک پایه برای  $R^3$  است.

۱.۴۰ نمره

۵- ماتریس متقارن  $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$  را به طور متعامد قطری کنید.

پاسخ صحیح

شماره  
سوال

1	ج
2	ب
3	ج
4	د
5	د
6	ب
7	ب
8	ج
9	ج
10	د
11	ب
12	د
13	ب
14	ب
15	الف
16	الف
17	ج
18	الف
19	ب
20	ج

۱- جواب دستگاه زیر کدام است؟

$$\begin{cases} 4x_1 + 8x_2 - 12x_3 = 44 \\ 3x_1 + 6x_2 - 8x_3 = 32 \\ -2x_1 - x_2 = -7 \end{cases}$$

۱.  $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -3$

۲.  $x_1 = -2, x_2 = 3, x_3 = 1$

۳.  $x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 1$

۴.  $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = -1$

۲- یک دستگاه همگن از معادلات خطی که تعداد متغیرهایش بیشتر از معادلات است چند جواب دارد؟

۱. فقط یک جواب دارد.

۲. جواب ندارد.

۳. تعداد بسیاری جواب دارد.

۴. دقیقاً به تعداد متغیرهایش جواب دارد.

۳- فرض کنید که  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix}$ . حاصل ضرب  $AB$  برابر کدام است؟

۱.  $\begin{bmatrix} 14 & 6 & -2 \\ -10 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

۲.  $\begin{bmatrix} 14 & -6 & -2 \\ 15 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

۳.  $\begin{bmatrix} 14 & -6 & 19 \\ 10 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

۴.  $\begin{bmatrix} 14 & -6 & 2 \\ 18 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

۴- عبارت ماتریسی زیر برابر کدام گزینه است؟

$$A(A + 2B) + 3B(2A - B) - A^2 + 7B^2 - 5AB$$

۱.  $3AB - 6BA + 2A^2$

۲.  $-3AB + 6BA + 4B^2$

۳.  $6AB + 3BA + 7B^2$

۴.  $3AB - 6BA + 8A^2$

۵- فرض کنید  $A$  و  $B$  دو ماتریس و  $C$  یک اسکالر باشد. کدام گزینه نادرست است؟

۱.  $(A + B)^T = B^T + A^T$

۲.  $(AB)^T = A^T B^T$

۳.  $(cA)^T = cA^T$

۴.  $(A^T)^T = A$

۶- فرض کنید  $A$  و  $B$  دو ماتریس با درایه‌های مختلط و  $z$  یک عدد مختلط باشد. کدام گزینه نادرست است؟

۱.  $(A + B)^* = A^* + B^*$

۲.  $(zA)^* = zA^*$

۳.  $(AB)^* = B^* A^*$

۴.  $(A^*)^* = A$

۷- دترمینان ماتریس  $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ -2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$  برابر کدام گزینه است؟

۱. 10      ۲. 8      ۳. 6      ۴. 4

۸- فرض کنید  $A$  ماتریسی  $2 \times 2$  با  $|A| = 4$  باشد. دترمینان ماتریس  $B = 5A'A^{-1}$  برابر کدام گزینه است؟

۱. 5      ۲. 10      ۳. 20      ۴. 25

۹- فرض کنید  $B$  یک ماتریس  $4 \times 6$  باشد. دامنه و هم‌دامنه تبدیل خطی که توسط  $B$  تعریف می‌شود کدام است؟

۱. دامنه آن  $R^6$  و هم‌دامنه آن  $R^4$  است.  
 ۲. دامنه آن  $R^2$  و هم‌دامنه آن  $R^3$  است.  
 ۳. دامنه آن  $R^3$  و هم‌دامنه آن  $R^2$  است.  
 ۴. دامنه آن  $R^4$  و هم‌دامنه آن  $R^6$  است.

۱۰- تصویر نقطه  $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$  تحت دنباله‌ای از تبدیلات که عبارت از اعمال انعکاس نسبت به محور  $x$  ها سپس دوران به اندازه  $\frac{\pi}{2}$  و بعد انبساط از مضرب 3 می‌باشند، کدام است؟

۱.  $\begin{bmatrix} 2 \\ 15 \end{bmatrix}$       ۲.  $\begin{bmatrix} 2 \\ 10 \end{bmatrix}$       ۳.  $\begin{bmatrix} 3 \\ 17 \end{bmatrix}$       ۴.  $\begin{bmatrix} 3 \\ 12 \end{bmatrix}$

۱۱- کدام یک از مجموعه‌های زیر وابسته خطی در  $R^3$  هستند؟

۱.  $\{(1, 0, 5), (3, -1, 4), (3, -2, 2)\}$       ۲.  $\{(1, 2, 3), (-2, 1, 1), (8, 6, 10)\}$   
 ۳.  $\{(1, 0, 0), (0, 0, 4), (0, -2, 0)\}$       ۴.  $\{(2, 5, 4), (-1, -1, 0), (1, 2, 3)\}$

۱۲- رتبه ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix}$  برابر کدام است؟

۱. صفر      ۲. 1      ۳. 2      ۴. 3

۱۳- تصویر بردار  $v = (6, 7)$  روی بردار  $u = (1, 4)$  کدام است؟

۱. (3, 9)      ۲. (4, 10)      ۳. (2, 8)      ۴. (5, 15)

۱۴- ماتریس قطری متشابه با  $A = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$  کدام است؟

۱.  $\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$  ۲.  $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$  ۳.  $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$  ۴.  $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

۱۵- بردار ویژه نظیر کوچک‌ترین مقدار ویژه ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  کدام است؟

۱.  $(1, 1)$  ۲.  $(1, -1)$  ۳.  $(1, 2)$  ۴.  $(2, 1)$

۱۶- بردار مختصات  $u = (4, 5)$  نسبت به پایه  $\{(2, 1), (-1, 1)\}$  کدام است؟

۱.  $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$  ۲.  $\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$  ۳.  $\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$  ۴.  $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

۱۷- کسینوس زاویه بین توابع  $f(x) = 5x^2$  و  $g(x) = 3x$  برابر کدام است؟

۱.  $\frac{\sqrt{7}}{3}$  ۲.  $\frac{\sqrt{5}}{2}$  ۳.  $\frac{\sqrt{15}}{4}$  ۴.  $\frac{3\sqrt{5}}{8}$

۱۸- پایه‌های  $B = \{(1, 2), (3, -1)\}$  و  $B' = \{(1, 0), (0, 1)\}$  از  $R^2$  را در نظر بگیرید. اگر  $u$  برداری باشد به‌طوری‌که

$u_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$  آن‌گاه  $u_{B'}$  کدام است؟

۱.  $u_{B'} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$  ۲.  $u_{B'} = \begin{bmatrix} 15 \\ 2 \end{bmatrix}$  ۳.  $u_{B'} = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix}$  ۴.  $u_{B'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$

۱۹- به‌طور هندسی هسته عملگر خطی  $T(x, y, z) = (x, y, 0)$  کدام است؟

۱. مجموعه همه بردارهایی که روی محور  $x$  ها قرار دارند.
۲. مجموعه همه بردارهایی که روی محور  $y$  ها قرار دارند.
۳. مجموعه همه بردارهایی که روی محور  $z$  ها قرار دارند.
۴. مجموعه همه بردارهایی که در صفحه  $x + y = 0$  قرار دارند.

۲۰- کدام گزینه زیرفضای  $R^3$  نیست؟

۱. مبدا مختصات

۲. صفحه  $x + y + 2z = 5$

۳. صفحه  $x + y + z = 0$

۴. خطهایی که از مبدا مختصات می‌گذرند.

### سوالات تشریحی

۱- دستگاه معادلات زیر را به روش گاوس-جردن حل کنید.

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 7 \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 = 7 \end{cases}$$

۲- با استفاده از ماتریس همسازها وارون ماتریس زیر را در صورت وجود پیدا کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

۳- فرض کنید  $U$  فضای برداری تولید شده توسط توابع  $f(x) = x + 1$  و  $g(x) = 2x^2 - 2x + 3$  باشد. نشان دهید که تابع  $h(x) = 6x^2 - 10x + 5$  در  $U$  قرار دارد.

۴- فاصله نقطه  $x = (4, 1, -7)$  در  $R^3$  را از زیرفضای  $W$  متشکل از بردارهایی به فرم  $(a, b, b)$  را پیدا کنید.

۵- فضای ضرب داخلی چندجمله‌ای‌ها  $P_n$  را با ضرب داخلی  $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$  در نظر بگیرید. کدام یک از توابع  $g(x) = x^2 - 3x + 5$  و  $h(x) = x^2 + 4$  به تابع  $f(x) = x^2$  نزدیک‌تر است؟

شماره سوال	پاسخ صحیح
1	د
2	ع
3	ع
4	ب
5	ب
6	ب
7	ع
8	د
9	الف
10	د
11	ب
12	ع
13	ع
14	د
15	ب
16	د
17	ع
18	ب
19	ع
20	ب

۱- کدام یک ماتریس های زیر به فرم پلکانی تحویل یافته است؟

$$\begin{array}{ll} ۱. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & ۲. \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \\ ۳. \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} & ۴. \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

۲- در چه صورت دستگاه معادلات خطی همگن دارای تعداد بسیاری جواب است؟

۱. تعداد متغیر ها برابر تعداد معادلات باشد

۲. تعداد متغیر ها کمتر از تعداد معادلات باشد

۳. تعداد متغیر ها بیشتر از تعداد معادلات باشد

۴. هیچ کدام

۳- با در نظر گرفتن ماتریس های  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} -7 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  و  $C = AB$ ، مولفه ی  $c_{23}$  از  $C$  کدام است؟

۱. 2      ۲. -2      ۳. 3      ۴. -3

۴- اگر  $A$  یک ماتریس  $5 \times 6$  و  $B$  یک ماتریس  $6 \times 7$  باشد، اندازه ی ماتریس حاصل ضرب  $AB$  چقدر است؟

۱.  $5 \times 6$       ۲.  $6 \times 7$       ۳.  $7 \times 6$       ۴.  $5 \times 7$

۵- اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$  باشد آنگاه  $A^4$  کدام است؟

$$\begin{array}{ll} ۱. A = \begin{bmatrix} 11 & -19 \\ -5 & 6 \end{bmatrix} & ۲. A = \begin{bmatrix} -11 & 19 \\ -5 & 6 \end{bmatrix} \\ ۳. A = \begin{bmatrix} 11 & -19 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} & ۴. A = \begin{bmatrix} -11 & -19 \\ -5 & -6 \end{bmatrix} \end{array}$$

۶- اثر ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 6 \\ 7 & 3 & 0 \end{bmatrix}$  کدام است؟

۱. 1      ۲. -1      ۳. 2      ۴. -2

۷- اگر  $A = \begin{bmatrix} 2+3i & 1-4i \\ 6 & 7i \end{bmatrix}$  باشد آنگاه  $A^*$  کدام است؟

۱.  $A^* = \begin{bmatrix} 2-3i & 1+4i \\ 6 & 7i \end{bmatrix}$       ۲.  $A^* = \begin{bmatrix} 2+3i & 1-4i \\ 6 & -7i \end{bmatrix}$

۳.  $A^* = \begin{bmatrix} 2+3i & 1-4i \\ -6 & -7i \end{bmatrix}$       ۴.  $A^* = \begin{bmatrix} 2-3i & 6 \\ 1+4i & -7i \end{bmatrix}$

۸- برای حل یک دستگاه  $n$  معادله و  $n$  مجهولی روش ماتریس معکوس چه تعداد عمل جمع لازم است؟

۱.  $-n^3 - n^2$       ۲.  $n^3 - n^2$       ۳.  $n^3 + n^2$       ۴.  $-n^3 + n^2$

۹- دترمینان ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$  کدام است؟

۱. 30      ۲. -30      ۳. 40      ۴. -40

۱۰- اگر  $A$  ماتریسی  $2 \times 2$  با  $|A| = 4$  باشد دترمینان  $|5A^{-1}|$  کدام است؟

۱. 22      ۲. 23      ۳. 24      ۴. 25

۱۱- کدام یک از گزینه های زیر نادرست است؟

۱. اگر ماتریس  $A$  معکوس پذیر باشد آنگاه  $|A||A^{-1}|=1$

۲. اگر  $A=A^{-1}$ ، آنگاه  $|A|=\pm 1$

۳. هر ماتریس مثلثی متقارن یک ماتریس غیر قطری است

۴. اگر  $A'=A^{-1}$ ، آنگاه  $|A|=\pm 1$

۱۲- نرم بردار  $u=(3,0,1,4)$  در  $R^4$  کدام است؟

۱.  $\sqrt{26}$

۲.  $\sqrt{27}$

۳.  $\sqrt{28}$

۴.  $\sqrt{29}$

۱۳- تصویر نقطه  $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$  تحت دوران  $\frac{\pi}{2}$  حول مبدا کدام است؟

۱.  $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

۲.  $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

۳.  $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

۴.  $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$

۱۴- ماتریس استاندارد  $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 2x+y \\ 3y \end{bmatrix}$  کدام است؟

۱.  $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

۲.  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

۳.  $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

۴.  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

۱۵- کدام یک از موارد زیر نادرست است؟

۱. اجتماع دو زیر فضا ممکن است زیر فضا نباشد

۲. اجتماع دو زیر فضا یک زیر فضا است

۳. اشتراک دو زیر فضا یک زیر فضا است

۴. اشتراک هر تعداد از زیر فضاهای یک زیر فضای، زیر فضا است

۱۶- رتبه ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix}$  کدام است؟

۱. ۱      ۲. ۲      ۳. ۳      ۴. هیچکدام

۱۷- تصویر بردار  $v = (6, 7)$  روی بردار  $u = (1, 4)$  کدام است؟

۱.  $(-1, 8)$       ۲.  $(1, 8)$       ۳.  $(-2, 8)$       ۴.  $(2, 8)$

۱۸- فاصله نقطه  $x = (4, 1, -7)$  در  $R^3$  را از زیر فضای  $W$  متشکل از بردارهای به فرم  $(a, b, b)$  کدام است؟

۱.  $\sqrt{30}$       ۲.  $\sqrt{31}$       ۳.  $\sqrt{32}$       ۴.  $\sqrt{33}$

۱۹- مقادیر ویژه حقیقی ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  کدام است؟

۱. ۱      ۲. -۱      ۳. صفر      ۴. هیچکدام

۲۰- اگر  $T: V \rightarrow W$  یک تبدیل خطی فضاهای برداری متناهی البعد بوده  $\dim V = 6$  و  $\dim W = 4$  بعد هسته ای  $T$  مساوی 2 باشد آنگاه

۱.  $T$  خود توان است .۲  $\dim T(V) = 2$

۳.  $T$  پوشاست .۴ رتبه  $T$  مساوی 3 است

### سوالات تشریحی

۱- با استفاده از قاعده ی کرامر دستگاه سه معادله سه مجهول را حل کنید.

۱.۴۰ نمره

$$x_1 + 3x_2 + x_3 = -2$$

$$2x_1 + 5x_2 + x_3 = -5$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$$

۲- یک پایه یکه متعامد برای زیر فضای  $R^4$  که به وسیله  $(1, 2, 3, -1)$ ،  $(2, 0, -1, 1)$  و  $(3, 2, 0, 1)$  تولید می شود را بسازید

۱.۴۰ نمره

۳- پایه ای از فضاهای ویژه ی ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$  را به دست آورید.

۱.۴۰ نمره

۴- هسته و برد نگاشت خطی  $T(x, y, z) = (x, 2x, y - z)$  از  $R^3 \rightarrow R^3$  را تعیین کنید.

۱.۴۰ نمره

۵- شبه معکوس ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$  را به دست آورید.

۱.۴۰ نمره

شماره سوال	پاسخ صحیح
1	الف
2	ج
3	ب
4	د
5	الف
6	ب
7	د
8	ب
9	ج
10	د
11	ج
12	الف
13	ج
14	الف
15	ب
16	ب
17	د
18	ج
19	د
20	د