

## عنوان درس: نظریه مقدماتی اعداد

۱- عضو ابتدای مجموعه  $\{27 + 12n \geq 0 : n \in \mathbb{Z}\}$  کدام است؟

۱. 3      ۲. -3      ۳. -2      ۴. 2

۲- کدام یک از گزینه های زیر درست است؟

۱.  $24 \mid 2 \times 7'' + 3 \times 5'' - 5$

۲. اگر  $m, n$  و  $k$  سه عدد صحیح مثبت باشند آن گاه  $n!m!k! \mid (n+m+k-1)!$

۳. اگر  $m$  یک عدد صحیح مثبت باشد آنگاه  $3 \mid m(m+1)(m+3)$

۴. اگر  $m$  یک عدد صحیح مثبت باشد آنگاه  $3 \mid 2m^2 - 7$

۳- اگر  $\gcd(a, b) = 1$  آن گاه کدام یک از گزینه های زیر درست است؟

۱.  $\gcd(ab, a+b) = a-b$       ۲.  $\gcd(ab, a+b) = 1$

۳.  $\text{lcm}[ab, a+b] = ab$       ۴.  $\text{lcm}[ab, a+b] = a(a+b)$

۴- اگر  $a = 714$  ،  $\gcd(a, b) = 238$  و  $\text{lcm}[a, b] = 3570$  آنگاه  $b$  کدام است؟

۱. 1200      ۲. 1190      ۳. 576      ۴. 1820

۵-  $\text{lcm}[120, 168]$  برابر است با:

۱. 336      ۲. 720      ۳. 840      ۴. 2016

۶- کدام یک از معادلات زیر حلپذیر است؟

۱.  $-15x + 72y = 14$       ۲.  $2x + 3y = 12$

۳.  $15x + 21y + 6z = 4$       ۴.  $5x + 10y = 12$

۷- اگر  $a \mid b$  آنگاه حاصل  $\gcd(\text{lcm}[a^2, b^2], \gcd(a^2, b^2))$  کدام است؟

۱.  $b^2$       ۲.  $a^2$       ۳.  $\frac{a^2}{1.2}$       ۴.  $a^2b^2$

۸- قضیه اساسی حساب بیان می کند که :

۱. هر عدد صحیح بزرگتر از یک را می توان به صورت حاصل ضربی یکتا از اعداد اول نوشت.

۲. تعداد اعداد اول متنهائی است.

۳. هر عدد صحیح بزرگتر از یک حداقل یک عامل اول دارد.

۴. تعداد اعداد اول نامتنهائی است.

۹-  $E(3,28)$  برابر است با:

۱. ۱۲      ۲. ۱۳      ۳. ۱۴      ۴. ۱۵

۱۰- باقیمانده تقسیم  $2^{20} - 1$  بر عدد  $41$  برابر است با:

۱. ۰      ۲. ۱      ۳. ۴۰      ۴. ۲

۱۱- رقم یکان عدد  $9^9$  برابر است با:

۱. ۰      ۲. ۱      ۳. ۲      ۴. ۹

۱۲- برای اعداد صحیح مثبت  $m$  و  $n$  که  $\gcd(m, n) = 1$  ، باقیمانده تقسیم  $m^{\varphi(n)} + n^{\varphi(m)}$  بر  $mn$  برابر است با:

۱. ۰      ۲. ۱      ۳.  $m$       ۴.  $n$

۱۳- کدام یک از مجموعه های زیر یک دستگاه کامل مانده ها به پیمانه ۷ است؟

۱.  $\{-1, -2, -3, -4, -5, -6, -7\}$       ۲.  $\{0, 5, 10, 15, 20, 25\}$

۳.  $\{102, 107, 112, 117, 122, 127, 132\}$       ۴.  $\{8, 9, 11, 12, 13, 14, 15\}$

۱۴- جواب معادله  $7x \equiv 8^{13}$  کدام است؟

۱.  $13k - 2$       ۲.  $13k + 2$       ۳.  $13k + 3$       ۴.  $13k - 3$

۱۵- کدام گزینه در مورد معادله همنهشتی  $5x^6 + 15x^4 + 2x^2 + 4x + 1 \equiv 0^5$  درست است؟

۱. دقیقاً یک جواب به پیمانه ۵ دارد.      ۲. حداکثر یک جواب به پیمانه ۵ دارد.

۳. حداکثر سه جواب به پیمانه ۵ دارد.      ۴. حداکثر دو جواب به پیمانه ۵ دارد.

۱۶-  $ord_{32}^{451}$  برابر است با:

۱. 8      ۲. 9      ۳. 3      ۴. 6

۱۷- اگر  $n$  دارای ریشه اولیه ای باشد آنگاه  $n$  دقیقا چند ریشه اولیه دارد؟

۱.  $\varphi(n-1)$       ۲.  $\varphi(\varphi(n-1))$       ۳.  $\varphi(n)$       ۴.  $\varphi(\varphi(n))$

۱۸-  $\sigma(20)$  برابر است با:

۱. 20      ۲. 28      ۳. 40      ۴. 42

۱۹- اگر  $p$  یک عدد اول باشد، کدام یک از گزینه های زیر همواره زوج است؟

۱.  $\varphi(p)$       ۲.  $\sigma(p)$       ۳.  $\tau(p)$       ۴.  $\mu(p)$

۲۰- مقدار  $\left(\frac{1000}{71}\right)$  برابر است با:

۱. 1      ۲. 6      ۳. 2      ۴. 12

### سوالات تشریحی

۱.۲۰ نمره

۱- الف) خاصیت ارشمیدسی را بیان کنید.

ب) اگر بهای هر خروس 5 سکه، هر مرغ 3 سکه و هر سه جوجه یک سکه باشد، آنگاه چند خروس، مرغ و جوجه به تعداد کل 100، با 100 سکه می توان خرید؟

۱.۲۰ نمره

۲- الف) ثابت کنید مجموعه اعداد اول نامتناهی است.

ب) عدد  $16!$  به چند صفر ختم می شود؟

۱.۲۰ نمره

۳- الف) صورت قضیه گاوس را بنویسید.

ب) دستگاه همنهشتی زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{3} \\ x \equiv 2 \pmod{7} \\ x \equiv 1 \pmod{5} \end{cases}$$

۱.۲۰ نمره

۴- هم‌نهشتی  $x^4 + 2x + 36 \equiv 0 \pmod{875}$  را حل کنید.

۱.۲۰ نمره

۵- عدد گویای  $\frac{19}{51}$  را به صورت کسر مسلسل نمایش دهید.



شماره سوال	پاسخ صحيح
1	الف
2	الف
3	ب
4	ب
5	ج
6	ب
7	ب
8	الف
9	ب
10	الف
11	د
12	ب
13	الف
14	ج
15	د
16	الف
17	د
18	د
19	ج
20	الف

۱- اگر  $r \in Q$  و  $r^n \in Z$  آن گاه کدام گزینه درست است؟

۱.  $\sqrt[n]{r} \in Z$  .۲  $r \in R - Q$  .۳  $r \in Q - Z$  .۴  $r \in Z$

۲- اصل خوش ترتیبی بیان می کند که:

۱. مجموعه اعداد طبیعی نا شمارا است.  
۲. مجموعه اعداد طبیعی شمارای نا متناهی است.  
۳. هر زیر مجموعه غیر تهی از اعداد طبیعی دارای کوچکترین عضو است.  
۴. عدد اصلی مجموعه اعداد طبیعی از اعداد اصلی مجموعه اعداد حقیقی کوچکتر است.

۳- باقی مانده تقسیم مربع هر عدد فرد بر 8 برابر است با:

۱. -1 .۲ 0 .۳ 1 .۴ 2

۴- کدام معادله حل پذیر است؟

۱.  $x + 2y = 40$  .۲  $5x + 10y = 12$  .۳  $-3x + 6y = 2$  .۴  $15x + 21y + 6z = 4$

۵- کدام گزینه در مورد  $d = \gcd(a, b)$  درست است؟

۱. اگر  $e = ax + by$  آنگاه  $e \mid d$   
۲. اگر  $e = ax + by$  آنگاه  $d = e$   
۳. ترکیب خطی  $d = ax + by$  منحصر به فرد است .  
۴.  $d$  کوچکترین ترکیب خطی مثبت  $a$  و  $b$  با ضرایب صحیح است .

۶- کدام مجموعه حاوی بی نهایت عدد اول نیست؟

۱.  $\{n \mid n = 3k - 1, k \in N\}$  .۲  $\{n! \mid n \in N\}$   
۳.  $\{n \mid n = 6k - 1, k \in N\}$  .۴  $\{n \in N \mid n = 4k + 3, k \in N\}$

۷-  $10!$  به چند صفر ختم می شود؟

۱. 6 .۲ 4 .۳ 2 .۴ 8

۸- تجزیه متعارف  $13!$  کدام گزینه زیر است؟

۱.  $13! = 2^{10} \times 3^7 \times 5^2 \times 7 \times 11 \times 13$  .۲  $13! = 2^{10} \times 3^5 \times 5^3 \times 7 \times 11 \times 13$   
۳.  $13! = 2^{10} \times 3^5 \times 5^2 \times 7 \times 11 \times 13$  .۴  $13! = 2^{10} \times 3^5 \times 5^2 \times 7 \times 13$

۹- اگر  $p$  یک عدد فرد باشد کدام گزینه درست است؟

۱.  $2^2 \times 4^2 \times 6^2 \times \dots (p-1)^2 \equiv -1$

۲.  $2^{p!} \equiv 1$

۳.  $1^2 \times 3^2 \times 5^2 \times \dots (p-1)^2 \equiv -1$

۴.  $\left(\frac{p-1}{2}\right)!^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}}$

۱۰- کدام همنهشتی زیر برقرار است؟

۱.  $3^{46} \equiv 3$

۲.  $3^{400} \equiv 5$

۳.  $15! \equiv 1$

۴.  $(97)^{100} \equiv 17$

۱۱- کدام گزینه جواب معادله  $7x \equiv 8$  است؟

۱.  $13k + 3$

۲.  $13k + 2$

۳.  $13k - 3$

۴.  $13k - 2$

۱۲- کدام پیمانه های زیر ریشه اولیه دارند؟

۱. 64

۲. 250

۳. 24

۴. 77

۱۳- کدام گزینه همواره صحیح است؟

۱. هر عدد اول  $p$  ریشه اولیه دارد.

۲. اعداد طبیعی  $1, 2, 3, 4$  ریشه اولیه دارند.

۳. اگر  $m = 2^\alpha$  و  $\alpha \geq 3$ ، آنگاه  $m$  ریشه اولیه دارد.

۴. هر ریشه اولیه فرد از  $p^\alpha$  یک ریشه اولیه برای  $2p^\alpha$  ( $\alpha \geq 1$ ) است.

۱۴- معادله همنهشتی  $3x^2 - 2x + 1 \equiv 0$  چند جواب دارد؟

۱. حداقل 3 جواب نا همنهشت به پیمانه 5

۲. حداکثر 3 جواب نا همنهشت به پیمانه 5

۳. حداقل 3 جواب همنهشت به پیمانه 5

۴. حداکثر 3 جواب همنهشت به پیمانه 5

۱۵- اگر  $p$  یک عدد اول باشد، کدام گزینه همواره زوج است؟

۱.  $\tau(p)$

۲.  $\mu(p)$

۳.  $\sigma(p)$

۴.  $\phi(p)$

۱۶- برای هر عدد طبیعی  $n$ ، مقدار عبارت  $\sum_{d|n} \frac{1}{d}$  برابر است با:

۱.  $n$

۲.  $\sigma(n)$

۳.  $\frac{\tau(n)}{n}$

۴.  $\frac{\sigma(n)}{n}$

۱۷- کدام گزینه یک مانده درجه دوم به پیمانه داده شده است؟

۱. 2 به پیمانه 13      ۲. 3 به پیمانه 13      ۳. 5 به پیمانه 43      ۴. 6 به پیمانه 11

۱۸- کدام معادله حل پذیر است؟

۱.  $x^2 \equiv 7 \pmod{2^4 \times 5^2 \times 7^3}$       ۲.  $x^2 \equiv 3 \pmod{8575}$       ۳.  $x^2 \equiv 5 \pmod{1102}$       ۴.  $x^2 \equiv 3 \pmod{16875}$

۱۹- کدام گزاره همواره صحیح است؟

۱. مقدار هر کسر مسلسل ساده نامتناهی یک عدد گنگ است.  
۲. مقدار هر کسر مسلسل یک عدد گنگ است.  
۳. هر عدد گویا را می توان به صورت یک کسر مسلسل ساده نامتناهی نوشت.  
۴. هر عدد گنگ را می توان به صورت یک کسر مسلسل ساده نامتناهی نوشت.

۲۰- کسر مسلسل متناهی  $[2; 1, 1, 3, 3, 1]$  معرف کدام کسر است؟

۱.  $\frac{77}{30}$       ۲.  $\frac{75}{30}$       ۳.  $\frac{73}{30}$       ۴.  $\frac{71}{30}$

### سوالات تشریحی

- ۱- ثابت کنید، اگر  $a, b$  اعداد صحیح مثبت باشند، آن گاه یک عدد صحیح مثبت  $n$  وجود دارد که  $na > b$ .  
(خاصیت ارشمیدسی)
- ۲- فرض کنید  $d$  یک مقسوم علیه مشترک  $a, b$  باشد، در این صورت  $\gcd(a, b) = d$  اگر و فقط اگر  $\gcd(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1$ .
- ۳- ثابت کنید مجموعه اعداد اول نامتناهی است.
- ۴- فرض کنید در مجموعه  $A = \{a_0, \dots, a_{n-1}\}$  هیچ دو عضو متمایز آن به پیمانه  $n$  همنهشت نباشند، در این صورت نشان دهید  $A$  یک دستگاه کامل مانده ها به پیمانه  $n$  است.
- ۵- همنهشتی  $x^4 + 2x + 36 \equiv 0 \pmod{875}$  را حل کنید.

سوال	پاسخ صحیح
1	د
2	ج
3	ج
4	الف
5	د
6	ب
7	ج
8	ج
9	ب
10	د
11	الف
12	ب
13	د
14	ب
15	الف
16	د
17	ب
18	ج
19	الف
20	الف

۱- فرض کنید که  $m$  یک عدد صحیح باشد در این صورت  $m^3$  به کدام صورت زیر است؟

۱.  $7k$  یا  $7k \pm 1$       ۲.  $5k$  یا  $5k \pm 1$       ۳.  $3k$  یا  $3k \pm 1$       ۴.  $8k$  یا  $8k \pm 1$

۲- فرض کنید که  $m$  و  $n$  دو عدد صحیح باشند و  $11 \mid 2n - 3m$  در این صورت

۱.  $11 \mid m - 6n$       ۲.  $11 \mid 7n - 5n$       ۳.  $11 \mid 5n - 3n$       ۴.  $119m - 2n$

۳- فرض کنید که  $m$  یک عدد صحیح باشد در این صورت  $\gcd(9m + 4, 2m + 1)$  کدام گزینه است؟

۱. ۱      ۲. ۲      ۳. ۳      ۴. ۴

۴-  $\gcd(13576, 4014)$  کدام است؟

۱. ۱      ۲. ۲      ۳. ۵      ۴. ۹

۵-  $\text{lcm}[-20, 10, 35]$  برابر است با

۱. ۳۵      ۲. ۷۰      ۳. ۱۴۰      ۴. ۲۸۰

۶- کدام معادله حل پذیر است؟

۱.  $5x + 10y = 12$       ۲.  $-3x + 6y = 2$       ۳.  $15x + 21y + 6z = 4$       ۴.  $x + 2y = 40$

۷- اگر  $a = bq + r$ ، آن گاه کدام گزینه درست است؟

۱.  $\gcd(a, b) = \gcd(q, b)$       ۲.  $\gcd(a, b) = \gcd(r, b)$   
۳.  $\gcd(a, b) = \gcd(r, a)$       ۴.  $\gcd(a, b) = r$

۸- فرض کنید  $p \neq 3$  عددی اول باشد در این صورت

۱.  $p^2 + 2$  نیز عددی اول است.      ۲.  $p^2 + 2$  عددی مرکب است.  
۳.  $8p^2 + 1$  عددی اول است.      ۴.  $8p^2 - 1$  عددی اول است.

۹- بزرگترین توان عدد ۳ در  $28!$  کدام است؟

۱. ۹      ۲. ۱۳      ۳. ۱۷      ۴. ۲۱

۱۰- عدد ۶۸۵ که در مبنای ۱۰ داده شده است با کدام یک از اعداد در مبنای ۷ برابر است؟

۱. ۱۶۶۶      ۲. ۸۶۵      ۳. ۱۲۳۱      ۴. ۱۲۳۰

۱۱- رقم یکان عدد  $9^9$  برابر است با

۱. ۱      ۲. ۳      ۳. ۷      ۴. ۹

۱۲- باقی مانده ی تقسیم عدد  $1^7 + 2^7 + \dots + 6^7$  کدام است؟

۱. صفر      ۲. ۲      ۳. ۵      ۴. ۶

۱۳-  $ord_{13}^{125}$  برابر با کدام گزینه است؟

۱. ۱      ۲. ۲      ۳. ۳      ۴. ۴

۱۴- کدام مجموعه کلیه ی ریشه های اولیه به پیمانه ۱۱ است.

۱.  $\{2,6,7,8\}$       ۲.  $\{2,5,7,9\}$       ۳.  $\{2,5,6,9\}$       ۴.  $\{2,5,6,8\}$

۱۵-  $\varphi(540)$  برابر است با

۱. ۱۸۰      ۲. ۱۲۰      ۳. ۱۴۴      ۴. ۱۷۹

۱۶-  $\sigma(300)$  برابر است با

۱. ۱۸      ۲. ۶۶      ۳. ۸۶۸      ۴. ۱۸۲۰

۱۷- زوج متحابه عدد ۲۹۲۴ کدام است؟

۱. ۲۶۲۰      ۲. ۲۸۴      ۳. ۲۲۰      ۴. ۱۲۱۰

۱۸- مقدار  $\left(\frac{1000}{71}\right)$  برابر است با

۱. ۱      ۲. ۲      ۳. ۶      ۴. ۱۲

۱۹- نمایش کسرمسلسل کسر  $\frac{19}{51}$  کدام است؟

۱.  $[0;2,1,2,6]$       ۲.  $[0;2,6,2,1]$       ۳.  $[0;1,6,2,1]$       ۴.  $[0;6,2,2,1]$

۲۰- کدام گزینه درست است؟

۱. مقدار هر کسر مسلسل یک عدد گنگ است.

۲. هر عدد گویا را می‌توان به صورت یک کسر مسلسل ساده نامتناهی نوشت.

۳. هر عدد گنگ را می‌توان به صورت یک کسر مسلسل ساده متناهی نوشت.

۴. مقدار هر کسر مسلسل ساده نامتناهی یک عدد گنگ است.

### سوالات تشریحی

۱- اگر بهای هر خروس ۵ سکه، هر مرغ ۳ سکه و هر سه جوجه یک سکه باشد آن‌گاه چند خروس، مرغ و جوجه به تعداد کل ۱۰۰، می‌توان با ۱۰۰ سکه خرید؟

۲- ثابت کنید که مجموعه اعداد اول نامتناهی است.

۳- هم‌نهشتی خطی  $18x \equiv 30 \pmod{42}$  را حل کنید.

۴- الف) صورت قضیه‌ی گاوس را بنویسید.  
ب) صورت قضیه‌ی ویلسن را بنویسید.

۵- هم‌نهشتی  $x^4 + 2x + 36 \equiv 0 \pmod{875}$  زیر را حل کنید.



باسمہ صحیح

نمبر  
سوال

1	الف
2	ب
3	الف
4	ب
5	ج
6	د
7	ب
8	ب
9	ب
10	الف
11	د
12	الف
13	د
14	ج
15	ج
16	ج
17	الف
18	الف
19	الف
20	د

۱- اصل خوش ترتیبی بیان می کند که:

۱. مجموعه اعداد طبیعی ناشمارا است.
۲. مجموعه اعداد طبیعی شمارای نامتناهی است.
۳. مجموعه اعداد طبیعی دارای کوچکترین کران بالا است.
۴. هر زیر مجموعه ناتهی از اعداد طبیعی، دارای عضو ابتدا است.

۲- باقی مانده مربع هر عدد صحیح  $a$  بر 4 برابر است با:

۱. 1 یا 2
۲. 0 یا 2
۳. 0 یا 1
۴. 0

۳- کدام گزاره همواره درست است؟

۱. بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد صحیح  $a$  و  $b$ ، منحصر به فرد نیست.
۲. فرض کنید  $a$  و  $b$  و  $c$  اعداد صحیح باشند. در این صورت  $\gcd(a, b) = 1$  و  $\gcd(a, c) = 1$  اگر فقط اگر  $\gcd(a, bc) = 1$ .

۳.  $\gcd(a, b) \neq \gcd(b, a)$

۴.  $\gcd(a, 1) = a$

۴- حاصل  $\text{lcm}[-20, 10, -35]$  کدام است؟

۱. 70
۲. 140
۳. -70
۴. -140

۵- کدام معادله زیر حل پذیر است؟

۱.  $5x + 10y = 12$

۲.  $15x + 21y + 6z = 4$

۳.  $x + 2y = 40$

۴.  $-3x + 6y = 2$

۶- کدام گزینه همواره درست است؟

۱. فرض کنید  $a$  یک عدد صحیح و  $p$  یک عدد اول باشد. در این صورت  $p|a$  یا  $\gcd(a, p) = a$ .

۲. تجزیه هر عدد صحیح مثبت بزرگتر از 1 به حاصل ضرب عوامل اول یکتا نیست.

۳. مجموعه اعداد اول متناهی است.

۴. هر عدد صحیح بزرگتر از 1 حداقل یک عامل اول دارد.

۷- بزرگترین توان عدد اول 3 در  $28!$  کدام است؟

۱. 13
۲. 15
۳. 11
۴. 9

۸- عدد  $80!$  به چند صفر ختم می شود؟

۱. 3
۲. 19
۳. 17
۴. 15

۹- رقم یکان عدد  $9^9$  کدام گزینه زیر است؟

۱. 1      ۲. 8      ۳. 9      ۴. 7

۱۰- عکس حسابی 12 به پیمانه 25 کدام گزینه زیر است؟

۱. 6      ۲. 9      ۳. 17      ۴. 23

۱۱- کسر مسلسل متناظر با عدد گویای  $\frac{77}{30}$  کدام گزینه است؟

۱.  $[2;1,2,2,4]$       ۲.  $[2;1,2,4,4]$       ۳.  $[2;1,2,3,4]$       ۴.  $[2;1,2,2,3]$

۱۲- جواب معادله همنهشتی  $x \equiv 485^{25} \pmod{214}$  کدام گزینه زیر است؟

۱.  $x \equiv 10^{25}$       ۲.  $x \equiv 1^{25}$       ۳.  $x \equiv 11^{25}$       ۴.  $x \equiv 0^{25}$

۱۳- کدام یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

۱. فرض کنید  $a$  یک عدد صحیح ناصفر و  $p$  یک عدد اول باشد. در این صورت  $a^p \equiv a$ .

۲. فرض کنید  $p$  یک عدد اول باشد. در این صورت  $\varphi(p) = p - 1$ .

۳. فرض کنید  $m$  و  $n$  اعداد صحیح باشند. در این صورت  $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ .

۴. اگر  $(n-1)! \equiv -1 \pmod{n}$ ، آن‌گاه  $n$  یک عدد اول است.

۱۴- اگر  $p$  یک عدد اول فرد باشد، کدام گزینه درست است؟

۱.  $2^2 \times 4^2 \times 6^2 \times \dots \times (p-1)^2 \equiv -1 \pmod{p}$       ۲.  $1 \times 3^2 \times 5^2 \times \dots \times (p-1)^2 \equiv -1 \pmod{p}$

۳.  $2^{p!} \equiv 1 \pmod{p}$       ۴.  $(\frac{p-1}{2}!)^p \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod{p}$

۱۵- اگر  $p$  یک عدد اول و  $d \mid p-1$ ، آن‌گاه همنهشتی  $x^d - 1 \equiv 0 \pmod{p}$  دارای چند جواب است؟

۱. نمی‌تواند جواب داشته باشد.      ۲. دارای یک جواب است.

۳. دقیقاً دو جواب دارد.      ۴. بی‌نهایت جواب دارد.

۱۶- مرتبه 3 به پیمانه 11 کدام گزینه زیر است؟

۱. 5      ۲. 3      ۳. 8      ۴. 2

۱۷- کدام گزینه همواره صحیح است؟

۱. هر عدد اول  $P$  ریشه اولیه ندارد.

۲. اعداد طبیعی  $1, 2, 3, 4$  ریشه اولیه دارند.

۳. اگر  $n$  دارای ریشه اولیه‌ای باشد، آن‌گاه  $n$  دقیقاً  $\varphi(\varphi(n))$  تا ریشه اولیه دارد.

۴. اگر  $k > 2$ ، آن‌گاه  $2^k$  دارای ریشه اولیه است.

۱۸- مقدار  $\varphi(200)$  کدام گزینه زیر است؟

۱. ۱۴۴      ۲. ۸۰      ۳. ۱۲۲      ۴. ۱۰۰

۱۹- کدام معادله همنشتی زیر حل پذیر نیست؟

۱.  $x^2 \equiv -38 \pmod{13}$       ۲.  $x^2 \equiv -4 \pmod{17}$       ۳.  $x^2 \equiv 68 \pmod{19}$       ۴.  $x^2 \equiv 102 \pmod{143}$

۲۰- فرض کنید  $P$  یک عدد اول باشد. کدام گزینه در حالت کلی درست نیست؟

۱.  $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right)$       ۲.  $\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)$       ۳.  $\left(\frac{1}{p}\right) = 1$       ۴.  $\left(\frac{a^2}{p}\right) = 1$

### سوالات تشریحی

۱- فرض کنید  $d$  یک مقسوم علیه مشترک  $a, b$  باشد. در این صورت  $\gcd(a, b) = d$  اگر و فقط اگر  $\gcd\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$ .

۲- فرض کنید  $P$  یک عدد اول و  $r$  عدد صحیح باشد که  $1 \leq r < P$ . در این صورت نشان دهید  $P \nmid \binom{P}{r}$ .

۳- (قضیه اویلر) فرض کنید  $n$  یک عدد صحیح مثبت و  $a$  یک عدد صحیح باشد به طوری که  $\gcd(a, n) = 1$ . در این صورت  $a^{\varphi(n)} \equiv 1$ .

۴- تمام ریشه های اولیه  $p = 17$  را بیابید.

۵- نشان دهید معادله همنهشتی  $x^2 \equiv -38 \pmod{13}$  حل پذیر است.

شماره سوال	پاسخ صحیح
1	د
2	ج
3	ب
4	ب
5	ج
6	د
7	الف
8	ب
9	ج
10	د
11	ج
12	الف
13	ج
14	ج
15	ج
16	الف
17	ج
18	ب
19	ب
20	الف

۱- کدام گزینه اصل خوش ترتیبی را بیان می‌کند؟

۱. هر زیر مجموعه ناتهی از اعداد صحیح مثبت، دارای عضو ابتداست.
۲. هر زیر مجموعه ناتهی از اعداد صحیح مثبت، از بالا کراندار است.
۳. هر زیر مجموعه ناتهی از اعداد صحیح مثبت، از پایین کراندار است.
۴. هر زیر مجموعه از اعداد صحیح مثبت که یکدار و استقرای باشد با آن برابر است.

۲- کدام گزینه همواره درست است؟

۱. اگر  $\gcd(a, b) = 1$ ، آن‌گاه  $\gcd(a, bc) = 1$ .
۲. اگر  $a | bc$ ، آن‌گاه  $a | c$ .
۳. اگر  $\gcd(a, b) = 1$  و  $c | a$ ، آن‌گاه  $\gcd(b, c) = 1$ .
۴. اگر  $\gcd(a, b) = |a|$ ، آن‌گاه  $a | b$ .

۳- عدد صحیح  $a$  که در معادله  $\gcd(a, 8)lcm[a, 8] = 128$  صدق می‌کند کدام است؟

۱.  $\pm 16$
۲.  $\pm 8$
۳.  $\pm 32$
۴.  $\pm 6$

۴- به ازای چه مقداری از عدد صحیح  $c$ ،  $10 < c < 20$ ، معادله سیاله  $c = 84x + 99y$  حل پذیر است؟

۱.  $11, 10$
۲.  $15, 12$
۳.  $18, 12$
۴.  $20, 18$

۵- عدد  $80!$  به چند صفر ختم می‌شود؟

۱. ۳
۲. ۱۷
۳. ۲۱
۴. ۱۹

۶- باقی مانده تقسیم  $5^{100}$  بر ۴ کدام گزینه است؟

۱. 1
۲. 0
۳. 2
۴. 3

۷- کدام گزینه در خصوص همنهشتی خطی  $4x \equiv 2 \pmod{-7}$  درست است؟

۱. این معادله جواب ندارد.  
۲. دارای جواب منحصر به فرد  $x \equiv 2$  است.  
۳. دارای جواب منحصر به فرد  $x \equiv 3$  است.  
۴. دارای جواب منحصر به فرد  $x \equiv 1$  است.

۸- کدام گزینه همواره درست است؟

۱. 2 عکس حسابی 2 به پیمانه 3 است.  
۲. 5 عکس حسابی 5 به پیمانه 19 است.  
۳. 3 عکس حسابی 16- به پیمانه 7 است.  
۴. 6 عکس حسابی 4 به پیمانه 22 است.

۹- کدام پیمانه زیر ریشه اولیه دارند؟

۱. 64  
۲. 77  
۳. 32  
۴. 250

۱۰- اگر  $ord_{10} 3 = 4$ ، آنگاه  $ord_{10} 3^6$  کدام گزینه است؟

۱. 6  
۲. 5  
۳. 4  
۴. 2

۱۱- کدام گزینه همواره درست است؟

۱. عدد مثبت  $n$  کامل است اگر  $\tau(n)$  زوج باشد.  
۲. اگر  $\tau(n)$  فرد باشد، آنگاه  $n$  مربع کامل است.  
۳. اگر  $n$  یک عدد اول باشد، آنگاه  $\tau(n) = 1$ .  
۴. اگر  $\tau(n) = 2$ ، آنگاه  $n$  مربع کامل است.

۱۲- رقم یکان هر عدد تام زوج  $n$  کدام گزینه است؟

۱. 6  
۲. 8  
۳. 6 یا 8  
۴. 4

۱۳- کدام تابع زیر همواره معکوس پذیر است؟

۱.  $\tau(n)$   
۲.  $\sigma(n)$   
۳.  $\varphi(n)$   
۴.  $\mu(n)$

۱۴- زوج متحابه عدد 2924 کدام گزینه است؟

۱. 284  
۲. 220  
۳. 2620  
۴. 1210



۱۵- اگر  $p = ۱۳$ ، آنگاه  $\sum_{a=1}^{۱۲} \left(\frac{a}{p}\right)$  برابر کدام گزینه است؟

۱. ۱      ۲. ۲      ۳. ۰      ۴. -۲

۱۶- فرض کنید  $p$  یک عدد اول باشد. کدام گزینه در حالت کلی درست نیست.

۱.  $\left(\frac{a^2}{p}\right) = ۱$       ۲.  $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right)$       ۳.  $\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)$       ۴.  $\left(\frac{b^2}{p}\right) = ۱$

۱۷- با توجه به نماد لژاندر، کدام گزینه همواره درست است؟

۱.  $\left(\frac{۳}{۵}\right) = \left(\frac{۳}{۱۱}\right)$       ۲.  $\left(\frac{۵}{۱۳}\right) = \left(\frac{۵}{۷}\right)$       ۳.  $\left(\frac{۳}{۱۳}\right) = \left(\frac{۳}{۷}\right)$       ۴.  $\left(\frac{۵}{۷}\right) = \left(\frac{۳}{۱۱}\right)$

۱۸- کسر مسلسل متناظر با عدد گویای  $\frac{۱۹}{۵۱}$  کدام گزینه است؟

۱.  $[۰, ۲, ۱, ۲, ۶]$       ۲.  $[۰, ۱, ۲, ۲, ۴]$       ۳.  $[۰, ۲, ۲, ۱, ۶]$       ۴.  $[۰, ۲, ۱, ۲, ۴]$

۱۹- کسر مسلسل نامتناهی  $[۱, ۱, ۱, ۱, \dots]$  معرف کدام کسر است؟

۱.  $\frac{۱ + \sqrt{۵}}{۲}$       ۲.  $\frac{\sqrt{۵} - ۱}{۲}$       ۳.  $\frac{۱ + \sqrt{۳}}{۲}$       ۴.  $\frac{\sqrt{۳} - ۱}{۲}$

۲۰- کدام گزینه همواره درست است؟

۱.  $[a_0, a_1, a_2, \dots] = \frac{1}{a_0} + [a_1, a_2, \dots]$

۲. نخستین عدد صحیح در نماد  $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$  وقتی صفر است که مقدار کسر مثبت ولی بزرگتر از یک باشد.

۳. هر عدد گنگ را می توان به صورت کسر مسلسل متناهی نوشت.

۴.  $[a_0, a_1, a_2, \dots] = a_0 + \frac{1}{[a_1, a_2, \dots]}$



## سوالات تشریحی

۱.۲۰ نمره

۱- فرض کنید  $p$  یک عدد اول و  $r$  عدد صحیح باشد که  $1 \leq r < p$ . در این صورت نشان دهید

$$p \mid \binom{p}{r}$$

۱.۲۰ نمره

۲- فرض کنید  $n$  یک عدد صحیح مثبت و  $a$  یک عدد صحیح باشد به طوری که  $\gcd(a, n) = 1$ . در این

صورت  $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$  (تابع اویلر است).

۱.۲۰ نمره

۳- کلیه ریشه‌های اولیه به پیمانه 25 را به دست آورید.

۱.۲۰ نمره

۴- حل پذیری همنهشتی  $x^{143} \equiv 102 \pmod{2}$  را بررسی کنید.

۱.۲۰ نمره

۵- معادله سیاله  $24x + 18y = 114$  را حل کنید.

نمبر سوال	باسخ صحيح
1	الف
2	ج
3	الف
4	ج
5	د
6	الف
7	ب
8	الف
9	د
10	د
11	ب
12	ج
13	د
14	ج
15	ج
16	ب
17	ب
18	الف
19	الف
20	د

۱- کدام یک از گزاره‌های زیر نادرست است؟

۱. برای هر  $n \in \mathbb{Z}$ ،  $n|0$  .  
۲. برای هر  $n \in \mathbb{Z}$ ،  $0|n$  .  
۳.  $1|n$  .  
۴.  $-1|n$  .

۲- کدام گزاره زیر درست است؟

۱. اگر  $a|b$  و  $c|d$ ، آن‌گاه  $a+c|b+d$  .  
۲. اگر  $a|b+c$ ، آن‌گاه  $a|b$  یا  $a|c$  .  
۳. اگر  $a|b+c$ ، آن‌گاه  $b|a$  یا  $c|a$  .  
۴. اگر  $a|b$  و  $c|d$ ، آن‌گاه  $ac|bd$  .

۳- باقیمانده تقسیم مربع هر عدد فرد بر 8 برابر است با

۱. 0 .  
۲. 1 .  
۳. 3 .  
۴. 5 .

۴- بزرگترین مقسوم علیه مشترک اعداد 30 و -72 کدام است؟ (  $d = (30, -72) = ?$  )

۱. 5 .  
۲. 2 .  
۳. 6 .  
۴. 10 .

۵- کدام گزاره زیر درست است؟

۱. برای هر عدد طبیعی  $a$ ،  $[a, a+1, a+2] \neq a(a+1)(a+2) = 1$  .  
۲. برای هر سه عدد طبیعی  $a$ ،  $b$  و  $c$ ،  $[ab, ac, bc](a, b, c) = abc$  .  
۳. برای هر سه عدد طبیعی  $a$ ،  $b$  و  $c$ ،  $[a^n, b^n, c^n] = [a, b, c]^n$  .  
۴. برای هر عدد طبیعی  $a$ ،  $[a, a^2, a^3](a, a^2, a^3) = a^4$  .

۶- فرض کنید  $a, b, n$  اعداد طبیعی و  $p$  یک عدد اول باشد. کدام یک از گزاره‌های زیر صحیح است؟

۱.  $E_p(ab) = E_p(a).E_p(b)$  .  
۲.  $E_p\left(\frac{a}{b}\right) = E_p(a) + E_p(b)$  .  
۳.  $E_p(n!) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{n}{p^k} \right]$  .  
۴.  $E_p(a^k) = E_p(a), k \in \mathbb{N}$  .

۷- فرض کنید  $m \in \mathbb{N}$  و  $a, b, c$  اعداد صحیح باشند. کدام یک از گزاره‌های زیر نادرست است؟

۱. اگر  $a \equiv b \pmod{m}$  و  $c \in \mathbb{N}$ ، آن‌گاه  $ac \equiv bc \pmod{mc}$ .

۲. اگر  $a \equiv b \pmod{m}$  و  $d = (a, m)$ ، آن‌گاه  $\frac{a}{d} \equiv \frac{b}{d} \pmod{\frac{m}{d}}$ .

۳. اگر  $ac \equiv bc \pmod{m}$ ، آن‌گاه  $a \equiv b \pmod{m}$ .

۴. اگر  $a \equiv b \pmod{m}$ ، آن‌گاه  $(a, m) = (b, m)$ .

۸- کدام یک از مجموعه‌های زیر یک دستگاه کامل مانده‌ها به هنگ 6 است؟

۱.  $\{15, 6, 9, 17, -3, 7\}$  ۲.  $\{-18, 7, 14, -3, -14, 17\}$

۳.  $\{-9, 14, 5, 3, 18, 28\}$  ۴.  $\{2, 3, 4, 6, 7\}$

۹- مقدار  $\varphi(675)$  کدام گزینه زیر می‌باشد؟

۱. 240 ۲. 120 ۳. 360 ۴. 2

۱۰- کدام یک از معادلات همنهشتی زیر جواب ندارد؟

۱.  $3x \equiv 1 \pmod{4}$  ۲.  $5x \equiv 2 \pmod{3}$  ۳.  $2x \equiv 3 \pmod{4}$  ۴.  $3x \equiv 6 \pmod{15}$

۱۱- باقیمانده  $(97)^{100}$  بر 19 کدام است؟

۱. 17 ۲. 27 ۳. 11 ۴. 1

۱۲- کدام یک از دستگاه‌های همنهشتی زیر حل‌پذیر است؟

۱.  $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{6} \\ x \equiv 3 \pmod{9} \end{cases}$  ۲.  $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 1 \pmod{4} \end{cases}$  ۳.  $\begin{cases} x \equiv -1 \pmod{4} \\ x \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}$  ۴.  $\begin{cases} 2x \equiv 1 \pmod{4} \\ 3x \equiv 2 \pmod{5} \end{cases}$

۱۳- معادله همنهشتی  $3x^3 - 2x + 1 \equiv 0$  حداکثر چند جواب ناهمنهشت به هنگ 5 دارد؟

۱. 2 ۲. 1 ۳. 3 ۴. هیچ جوابی ندارد.

۱۴- مرتبه 2 به هنگ 11 برابر است با:

۱. 6 ۲. 4 ۳. 10 ۴. 8

۱۵- کدام یک از گزاره‌های زیر نادرست است؟

۱. اگر  $(a, m) = 1$ ، آن‌گاه برای هر  $n \in \mathbb{N}$  داریم:  $ord_m^{a^n} = \frac{ord_m^a}{(u, ord_m^a)}$

۲. اگر  $(a, m) = 1$  و  $a^*$  یک عکس حسابی به هنگ  $m$  باشد، آن‌گاه  $ord_p^{a^*} = ord_p^a$

۳. اگر  $(a, m) = (a, n) = 1$ ، آن‌گاه  $ord_{[m, n]}^a = (ord_m^a, ord_n^a)$

۴. فرض کنید  $m \in \mathbb{N}$  و  $a, b$  اعداد صحیح متناهی با  $m$  باشند. اگر  $a \equiv b \pmod{m}$ ، آن‌گاه  $ord_m^a = ord_m^b$

۱۶- کدام یک از معادلات همنهشتی زیر حل‌ناپذیر است؟

۱.  $x^5 \equiv 1 \pmod{17}$     ۲.  $x^6 \equiv 9 \pmod{10}$     ۳.  $x^2 \equiv 3 \pmod{11}$     ۴.  $x^{10} \equiv 5 \pmod{13}$

۱۷- فرض کنید که  $a$  و  $b$  اعداد طبیعی باشند که  $(a, b) = d$  و  $[a, b] = m$ . کدام یک از گزاره‌های زیر صحیح می‌باشد؟

۱.  $\psi(a)\psi(b) = \psi(ab) \frac{\psi(d)}{d}$     ۲.  $\psi(a)\psi(b) = \psi(a) - \psi(b)$

۳.  $\psi(a)\psi(b) = \psi(m)\psi(d) - \psi(ab)$     ۴.  $\psi(ab) = \psi(a) + \psi(b)$

۱۸- فرض کنید  $p$  یک عدد اول فرد است و  $(a, p) = 1$ . در این صورت کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟

۱.  $a^{\frac{p}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$  یک نامانده درجه دوم به هنگ  $p$  است اگر و فقط اگر  $p$  است

۲.  $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$  یک مانده درجه دوم به هنگ  $p$  است اگر و فقط اگر  $p$  است

۳.  $a^{\frac{p}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$  یک نامانده درجه دوم به هنگ  $p$  است اگر و فقط اگر  $p$  است

۴.  $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$  یک مانده درجه دوم به هنگ  $p$  است اگر و فقط اگر  $p$  است

۱۹- اگر  $p$  عدد اول فردی باشد، آن‌گاه

۱.  $\sum_{a=1}^{p-1} \left(\frac{a}{p}\right) = 0$     ۲.  $\sum_{a=1}^{p-1} \left(\frac{a}{p}\right) = 1$     ۳.  $\sum_{a=1}^{p-1} \left(\frac{a}{p}\right) = -1$     ۴.  $\sum_{a=1}^{p-1} \left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^p$

۲۰- مقدار کسر مسلسل ساده نامتناهی  $\alpha = \langle 1, 2, 2, 2, 2, \dots \rangle$  کدام است؟

۴. 2

۳.  $\sqrt{2}$

۲.  $1 - \sqrt{2}$

۱.  $1 + \sqrt{2}$

### سوالات تشریحی

۱.۲۰ نمره

۱- اگر  $a$  و  $b$  دو عدد صحیح غیر صفر باشند، آن گاه نشان دهید که  $[a, b] = \frac{|ab|}{(a, b)}$ .

۱.۲۰ نمره

۲- نشان دهید که عدد صحیح  $a$  به هنگ  $m$  عکس حسابی دارد اگر و فقط اگر  $(a, m) = 1$ .

۱.۲۰ نمره

۳- نشان دهید که اگر برای عدد طبیعی  $m > 1$ ،  $(m-1)! \equiv -1 \pmod{m}$ ، آن گاه  $m$  یک عدد اول است.  
(عکس قضیه ویلسن)

۱.۲۰ نمره

۴- جواب های معادله همنهشتی  $x^2 \equiv 13 \pmod{36}$  را بیابید.

۱.۲۰ نمره

۵- ثابت کنید تابع موبیوس ضربی است. به عبارتی نشان دهید که برای اعداد طبیعی  $n, m$  که  $(m, n) = 1$  داریم  $\mu(mn) = \mu(m)\mu(n)$ .

۱- باقیمانده تقسیم مربع هر عدد فرد بر 8 برابر است با

۱. 1      ۲. 3      ۳. 5      ۴. 7

۲- اگر  $a$  و  $m$  و  $n$  اعداد طبیعی و  $(m, n) = d$  باشند آنگاه مقدار  $(a^m - 1, a^n - 1)$  برابر است با

۱. 1      ۲.  $(a, d)$       ۳.  $a^d - 1$       ۴.  $d$

۳- کدام گزینه یک عدد اول است؟

۱. 247      ۲. 209      ۳. 231      ۴. 241

۴- مقدار  $E_7(100!)$  کدام گزینه است؟

۱. 14      ۲. 15      ۳. 16      ۴. 17

۵- باقیمانده تقسیم عدد  $2^{47}$  بر 7 کدام گزینه است؟

۱. 1      ۲. 2      ۳. 3      ۴. 4

۶- کدام عدد بر 11 بخش پذیر است؟

۱. 17352      ۲. 17357      ۳. 17358      ۴. 17353

۷- تعداد اعدادی که از 36 کوچکتر و نسبت به آن اول باشد کدام گزینه است؟

۱. 10      ۲. 11      ۳. 12      ۴. 13

۸- کدام گزینه برای هر عدد طبیعی  $n$  درست است؟

۱.  $\varphi(n^2) = n\varphi(n)$       ۲.  $\varphi(2n) = \varphi(n)$       ۳.  $\varphi(3n) = 2\varphi(n)$       ۴.  $\varphi(3n) = 3\varphi(n)$

۹- کدام گزینه عکس حسابی 1001 به هنگ 8 می باشد؟

۱. 3      ۲. 9      ۳. 5      ۴. 7

۱۰- جواب معادله همنهشتی  $12x \equiv 4 \pmod{13}$  کدام گزینه است؟

۱.  $\overline{1}$       ۲.  $\overline{9}$       ۳.  $\overline{5}$       ۴.  $\overline{3}$

۱۱- باقیمانده تقسیم عدد  $15!$  بر 17 کدام گزینه است؟

۱. 1      ۲. 3      ۳. 5      ۴. 7



۱۲- کدام دستگاه همنهشتی حلپذیر است؟

$\begin{cases} 3x \equiv 1 \pmod{4} \\ 5x \equiv 4 \pmod{6} \end{cases}$ .۴	$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 1 \pmod{4} \end{cases}$ .۳	$\begin{cases} 2x \equiv 1 \pmod{4} \\ 3x \equiv 4 \pmod{6} \end{cases}$ .۲	$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{6} \\ x \equiv 3 \pmod{9} \end{cases}$ .۱
---	---	---	---

۱۳- مقدار  $ord_4^{3^{10}}$  کدام گزینه است؟

۱. 7      ۲. 3      ۳. 2      ۴. 1

۱۴-  $ind_2^3$  به هنگ 13 کدام گزینه است؟

۱. 1      ۲. 2      ۳. 3      ۴. 4

۱۵- مجموع مقسوم علیه‌های مثبت عدد 121 کدام گزینه است؟

۱. 131      ۲. 132      ۳. 133      ۴. 134

۱۶- رقم یکان هر عدد تام زوج کدام اعداد می‌باشند؟

۱. 2 یا 6      ۲. 6 یا 8      ۳. 2 یا 8      ۴. 4 یا 6

۱۷- کدام گزینه یک مانده درجه دوم به هنگ 13 می‌باشد؟

۱. 6      ۲. 7      ۳. 4      ۴. 2

۱۸- کدام گزینه در مفهوم نماد لژاندر درست است؟

$\left(\frac{-2}{17}\right) = -\left(\frac{2}{17}\right)$ .۱	$\left(\frac{8}{19}\right) = \left(\frac{4}{19}\right) + \left(\frac{2}{19}\right)$ .۲	$\left(\frac{4}{19}\right) = 1$ .۳	$\left(\frac{-1}{17}\right) = -1$ .۴
--	--	------------------------------------	--------------------------------------

۱۹- همگرای سوم کسر مسلسل ساده متناهی  $\langle 1, 2, 1, 1, 3, 5 \rangle$  کدام گزینه است؟

۱.  $\frac{7}{3}$       ۲.  $\frac{4}{3}$       ۳.  $\frac{5}{7}$       ۴.  $\frac{7}{5}$

۲۰- کدام کسر مسلسل ساده نامتناهی با عدد اصم  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  برابر است؟

۱.  $\langle 1, 1, 1, \dots \rangle$       ۲.  $\langle 1, 2, 1, 2, \dots \rangle$       ۳.  $\langle 1, 2, 2, 2, \dots \rangle$       ۴.  $\langle 1, 1, 2, 1, 2, 1, \dots \rangle$

### سوالات تشریحی

۱- ثابت کنید بینهایت عدد اول وجود دارد.



۲- دستگاه همنهشتی زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x \equiv 5 \pmod{6} \\ x \equiv 7 \pmod{10} \end{cases}$$

۱.۲۰ نمره

۳- ثابت کنید عدد صحیح  $a$  به هنگ  $m$  عکس حسابی دارد اگر و تنها اگر  $(a, m) = 1$

۱.۲۰ نمره

۴- با استفاده از محک اوایلر ثابت کنید معادله همنهشتی زیر حل پذیر است و سپس آن را حل کنید.

$$x^2 \equiv 5 \pmod{19}$$

۱.۲۰ نمره

۵- عدد  $-\frac{99}{43}$  را به کسر مسلسل ساده متناهی بسط دهید.

باسمہ صحیح

نمبر رد  
سواب

1	الف
2	ج
3	د
4	ج
5	د
6	ج
7	ج
8	الف
9	ب
10	ب
11	الف
12	ج
13	د
14	د
15	ج
16	ب
17	ج
18	ج
19	د
20	الف

۱- کدام یک از گزینه های زیر درست است؟

۱. اگر  $a_1 a_2 \dots a_n | b$  آن گاه به ازای هر  $1 \leq i \leq n$  داریم  $a_i | b$ .

۲. اگر  $a | b_1 b_2 \dots b_n$  آن گاه به ازای حداقل یک  $1 \leq i \leq n$  داریم  $a | b_i$ .

۳. اگر  $a_1 + a_2 + \dots + a_n | b$  آن گاه به ازای حداقل یک  $1 \leq i \leq n$  داریم  $a_i | b$ .

۴. اگر  $a | b$  و  $c | d$  آن گاه  $a + c | b + d$ .

۲- اگر  $x$  یک عدد صحیح زوج و  $y$  یک عدد صحیح فرد باشد آن گاه کدام گزینه در رابطه با  $y$  و  $x$  نادرست است؟

۱.  $y$  را می توان به شکل  $2k + 1$  نوشت که در آن  $k$  عددی صحیح است.

۲.  $y$  را می توان به شکل  $4k + 1$  یا  $4k + 3$  نوشت که در آن  $k$  عددی صحیح است.

۳.  $x$  را می توان به شکل  $k$  یا  $6k + 2$  یا  $6k + 4$  نوشت که در آن  $k$  عددی صحیح است.

۴.  $x$  را می توان به شکل  $8k + 2$  یا  $8k + 4$  نوشت که در آن  $k$  عددی صحیح است.

۳- کدام یک از گزینه های زیر نمی تواند رقم یکان مربع یک عدد صحیح باشد؟

۱. 3      ۲. 0      ۳. 1      ۴. 6

۴-  $(12378, 3054)$  برابر است با؛

۱. 2      ۲. 6      ۳. 9      ۴. 8

۵- تعداد اعداد اول به صورت  $4k + 3$  برابر است با؛

۱. 43 عدد      ۲. 13 عدد      ۳. 14 عدد      ۴. بی نهایت عدد

۶- اگر  $(a, b) = 1$  آن گاه  $(2a + b, a + 2b)$  برابر است با؛

۱. 3 یا 5      ۲. 1 یا 3      ۳. 5 یا 9      ۴. 1 یا 5

۷-  $E_3(5!)$  برابر است با؛

۱. 1      ۲. 2      ۳. 3      ۴. 0

۸- باقیمانده تقسیم  $3^{200}$  بر 11 برابر است با؛

۱. 10      ۲. 1      ۳. 8      ۴. 2

۹- با فرض این که  $a = a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + \dots + a_n 10^n$  که در آن  $0 \leq a_i \leq 9$  و  $0 \leq i \leq n$  آن گاه کدام یک از گزینه های زیر درست است؟

۱.  $a$  بر 4 بخش پذیر است اگر فقط اگر  $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n \equiv 0 \pmod{3}$

۲.  $a$  بر 5 بخش پذیر است اگر فقط اگر  $a_0 + 2a_1 \equiv 0 \pmod{4}$

۳.  $a$  بر 8 بخش پذیر است اگر فقط اگر  $a_0 + 2a_1 + 4a_2 \equiv 0 \pmod{8}$

۴.  $a$  بر 5 بخش پذیر است اگر فقط اگر  $a_0 + 5a_1 \equiv 0 \pmod{5}$

۱۰- اگر  $\phi$  نشان دهنده تابع اویلر باشد آن گاه  $\phi(25)$  برابر است با:

۱. 20      ۲. 24      ۳. 25      ۴. 1

۱۱- مقدار جواب های معادله همنهشتی  $5x \equiv 2 \pmod{3}$  برابر است با

۱. 0      ۲. 1      ۳. 2      ۴. جواب ندارد.

۱۲- تعداد جواب های معادله همنهشتی  $x + y + z + w \equiv 1 \pmod{5}$  برابر است با

۱. 5      ۲. 25      ۳. 125      ۴. 625

۱۳- مرتبه 5 به هنگ 14 برابر است با

۱. 2      ۲. 3      ۳. 6      ۴. 13

۱۴- کدام یک از دستگاه های زیر حل پذیر نیست؟

۱.  $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 1 \pmod{4} \end{cases}$       ۲.  $\begin{cases} 3x \equiv 1 \pmod{4} \\ 5x \equiv 4 \pmod{6} \end{cases}$       ۳.  $\begin{cases} 3x \equiv 1 \pmod{10} \\ 4x \equiv 2 \pmod{7} \end{cases}$       ۴.  $\begin{cases} 8x \equiv 4 \pmod{14} \\ 5x \equiv 3 \pmod{11} \end{cases}$

۱۵- کدام هنگ زیر ریشه اولیه دارند؟

۱. 8      ۲. 12      ۳. 15      ۴. 18

۱۶-  $\sigma_2(25)$  برابر است با:

۱. 651      ۲. 5561      ۳. 1300      ۴. 3100

۱۷- کدام یک از اعداد زیر تام است؟

۱. 18      ۲. 10      ۳. 28      ۴. 220

۱۸- کدام یک از معادلات همنهشتی زیر حل پذیر است؟

۱.  $x^2 \equiv 3 \pmod{13}$     ۲.  $x^2 \equiv 5 \pmod{13}$     ۳.  $x^2 \equiv -6 \pmod{13}$     ۴.  $x^2 \equiv -7 \pmod{13}$

۱۹- مقادیر  $\left(\frac{-38}{13}\right)$  و  $\left(\frac{19}{23}\right)$  به ترتیب برابرند با؛

۱. 1 و 1    ۲. -1 و -1    ۳. 1 و -1    ۴. -1 و 1

۲۰- کسر مسلسل ساده  $\langle 2, 1, 1, 3, 3, 1 \rangle$  برابر است با؛

۱.  $\frac{30}{77}$     ۲.  $\frac{77}{30}$     ۳.  $\frac{528}{313}$     ۴.  $\frac{313}{528}$

### سوالات تشریحی

- ۱- معادله سیاله  $4x + 6y + 9z = 7$  را حل کنید. ۱.۲۰ نمره
- ۲- لم گاوس را بیان و آن را اثبات کنید. ۱.۲۰ نمره
- ۳- معادله همنهشتی  $x^3 - 4x^2 + 4x \equiv 0 \pmod{9}$  را حل کنید. ۱.۲۰ نمره
- ۴- ثابت کنید که تابع موبیوس، ضربی است. ۱.۲۰ نمره
- ۵- ثابت کنید که هر کسر مسلسل ساده نامتناهی یک عدد اصم است. ۱.۲۰ نمره

باسخ صحيح  
شماره  
سواب

1	الف
2	د
3	الف
4	ب
5	د
6	ب
7	الف
8	ب
9	ج
10	الف
11	ب
12	د
13	ج
14	ب
15	د
16	الف
17	ج
18	الف
19	ج
20	ب

۱- عضو ابتدای مجموعه  $A = \{-93 - 11n \geq 0 : n \in \mathbb{Z}\}$  کدام است؟

۱. 4      ۲. 5      ۳. 6      ۴. 7

۲- فرض کنید که  $p$  یک عدد اول و  $a$  و  $b$  اعداد صحیح باشند. لم اقلیدس بیان می کند که

۱. اگر  $plab$  آنگاه  $pla$ .      ۲. اگر  $plab$  آنگاه  $plb$ .

۳. اگر  $plab$  آنگاه  $pla$  یا  $plb$ .      ۴. اگر  $plab$  آنگاه  $pla$  و  $plb$ .

۳- کدام یک از اعداد زیر نمی تواند رقم یکان مربع یک عدد صحیح باشد.

۱. 6      ۲. 5      ۳. 4      ۴. 3

۴- کدام یک از هم نهشتی های زیر برقرار است؟

۱.  $791 \equiv 27 \pmod{11}$       ۲.  $-930 \equiv 4 \pmod{463}$

۳.  $-25 \equiv -47 \pmod{11}$       ۴.  $721 \equiv -4 \pmod{7}$

۵- تعداد عناصر مجموعه  $\{1 \leq a \leq 10 : (a, 10) = 1\}$  برابر کدام گزینه است؟

۱. 6      ۲. 4      ۳. 2      ۴. 1

۶- کدام یک از دستگاه های زیر دارای جواب نیست؟

۱. $\begin{cases} 3x \equiv 4 \pmod{5} \\ 2x \equiv 3 \pmod{10} \end{cases}$	۲. $\begin{cases} 3x \equiv 1 \pmod{10} \\ 4x \equiv 2 \pmod{7} \end{cases}$	۳. $\begin{cases} 2x \equiv 3 \pmod{5} \\ 3x \equiv -1 \pmod{4} \end{cases}$	۴. $\begin{cases} 8x \equiv 4 \pmod{14} \\ 5x \equiv 3 \pmod{11} \end{cases}$
--	--	--	---

۷- اگر  $\text{ord}_4^3 = 2$  باشد آنگاه  $\text{ord}_4^{3^{10}}$  کدام است؟

۱. 1      ۲. 2      ۳. 4      ۴. 6

۸- کدام یک از هنگ های زیر ریشه اولیه دارد؟

۱. 8      ۲. 12      ۳. 15      ۴. 25

۹- کدام یک از معادلات هم نهشتی زیر حل پذیر نیست؟

۱.  $x^2 \equiv 4 \pmod{11}$       ۲.  $x^2 \equiv 3 \pmod{14}$       ۳.  $x^5 \equiv 6 \pmod{13}$       ۴.  $x^4 \equiv 3 \pmod{10}$

۱۰- حاصل  $\sum_{n=1}^{10} \tau(n)$  کدام است؟

۱. 10      ۲. 17      ۳. 24      ۴. 27

۱۱- کدام یک از توابع زیر ضربی نیستند؟

۱.  $\tau^2(n)$

۲.  $\sigma^2(n)$

۳.  $f(n) = n^2 + 1$

۴.  $l(n) = \frac{1}{n^3}$

۱۲- کدام یک از احکام زیر درست نیست؟

۱. تابع فی اوایلر یک تابع حسابی ضربی است.

۲. ضرب پیچشی دو تابع حسابی خاصیت جابجایی دارد.

۳. تابع موبیوس تابع ضربی نیست.

۴. اگر تابع غیر صفر  $f$  و ضرب پیچشی  $f * g$  هر دو ضربی باشند آنگاه  $g$  هم ضربی است.

۱۳- زوج متحابه عدد 2924 کدام است؟

۱. 284

۲. 220

۳. 2620

۴. 1210

۱۴- اگر  $n$  عددی تام باشد، آنگاه  $\sum_{d|n} \frac{1}{d}$  برابر است با

۱. 1

۲. 2

۳.  $n$

۴.  $2n$

۱۵- فرض کنید  $p$  عدد اول فرد باشد، آنگاه کدام گزینه صحیح است؟

۱.  $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^p$

۲.  $\left(-\frac{1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$

۳.  $\left(-\frac{1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p+1}{2}}$

۴.  $\left(-\frac{1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{2}}$

۱۶- کسر مسلسل نامتناهی  $\langle -2, 3, 1, 2, 1, 2, \dots \rangle$  معرف کدام کسر زیر است؟

۱.  $\sqrt{2}$

۲.  $-\sqrt{2}$

۳.  $\sqrt{3}$

۴.  $-\sqrt{3}$

۱۷- بسط به صورت کسر مسلسل ساده نامتناهی متناوب عدد اصم درجه دوم  $\frac{3+\sqrt{3}}{4}$  کدام است؟

۱.  $\langle 3, \overline{6} \rangle$

۲.  $\langle \overline{1}, 2 \rangle$

۳.  $\langle \overline{1} \rangle$

۴.  $\langle 1, 5, \overline{2, 6} \rangle$

۱۸- کدام یک از اعداد زیر اصم درجه دوم نیست؟

۱.  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

۲.  $3 - \sqrt{3}$

۳.  $3\sqrt{4}$

۴.  $\frac{3}{1+\sqrt{5}}$



۱۹- بسط به صورت کسر مسلسل ساده نامتناهی کدام یک از اعداد زیر متناوب محض نیست؟

۴.  $\frac{3}{2} + \sqrt{6}$

۳.  $\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$

۲.  $\frac{1+\sqrt{2}}{5}$

۱.  $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

۲۰- کدام یک از عبارات زیر صحیح است؟

۱. مقدار هر کسر مسلسل ساده نامتناهی یک عدد اصم است.

۲. هر عدد گویا را می توان به صورت یک کسر مسلسل ساده نامتناهی نوشت.

۳. هر عدد اصم را می توان به صورت یک کسر مسلسل ساده متناهی نوشت.

۴. مقدار هر کسر مسلسل یک عدد اصم است.

### سوالات تشریحی

۱.۲۰ نمره

۱- اگر  $a$  و  $b$  دو عدد صحیح باشند، آنگاه نشان دهید که  $[a, b] = \frac{|ab|}{(a, b)}$ .

۱.۲۰ نمره

۲- ثابت کنید برای هر عدد طبیعی  $m \geq 2$  عدد  $2^{2^m}$  به رقم 6 ختم می شود.

۱.۲۰ نمره

۳- نشان دهید برای هر عدد طبیعی  $n$  داریم  $\varphi(n) | n!$ .

۱.۲۰ نمره

۴- اگر  $m, n \geq 3$  اعداد صحیح باشند به طوری که  $(m, n) = 1$  آنگاه نشان دهید که به هنگ  $mn$  ریشه اولیه ای وجود ندارد.

۱.۲۰ نمره

۵- اگر  $2^k - 1$  عددی اول باشد آنگاه نشان دهید که  $2^{k-1}(2^k - 1)$  یک عدد تام زوج است.

شماره سوال	پاسخ صحیح
۱	ج
۲	ج
۳	د
۴	ج
۵	ب
۶	الف
۷	الف
۸	د
۹	ب
۱۰	د
۱۱	ج
۱۲	ج
۱۳	ج
۱۴	ب
۱۵	ب
۱۶	د
۱۷	د
۱۸	الف
۱۹	الف
۲۰	الف

۱- عضو ابتدای مجموعه  $\{-93-11n \geq 0 : n \in \mathbb{Z}\}$  کدام است؟

۴. 7

۳. 6

۲. 5

۱. 4

۲- کدام یک از هم نهشتی های زیر برقرار نیست؟

۲.  $-25 \equiv -47 \pmod{11}$

۱.  $721 \equiv -21 \pmod{7}$

۴.  $100^3 \equiv 3 \pmod{6}$

۳.  $4 \equiv -930 \pmod{463}$

۳- اگر  $a = bq + r$  باشد، آنگاه کدام گزینه صحیح است؟

۴.  $(a, b) = [r, b]$

۳.  $[a, b] = [r, b]$

۲.  $(a, b) = (r, b)$

۱.  $[a, b] = (r, b)$

۴- کدام گزینه صحیح است؟

۱. اگر  $n_1, \dots, n_k$  اعداد طبیعی و  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$  باشد، آنگاه  $\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$  همواره عددی طبیعی نیست.

۲. هر عدد طبیعی بزرگ تر از یک را می توان به صورت حاصل ضربی از اعداد اول نوشت.

۳. تعداد اعداد اول به صورت  $4k + 3$  متناهی است.

۴. هر عدد صحیح فرد به صورت  $4k + 3$  است.

۵- فرض کنید برای عدد طبیعی  $n$  و عدد اول  $p$  نماد  $E_p(n)$  بزرگترین عدد نامنفی  $\alpha$  باشد که  $p^\alpha \mid n$ . در این صورت اگر

$m$  و  $n$  اعداد طبیعی باشند آنگاه کدام یک از گزینه های زیر صحیح است؟

۲.  $E_p(nm) = E_p(n).E_p(m)$

۱.  $E_p(nm) = E_p(n) + E_p(m)$

۴.  $E_p\left(\frac{n}{m}\right) = E_p(n) - E_p(m)$

۳.  $E_p\left(\frac{n}{m}\right) = E_p(n) \div E_p(m)$

۶- کدام یک از گزینه های زیر صحیح است؟

۲.  $4^{720} \equiv 4 \pmod{21}$

۱.  $2^{100} \equiv 1 \pmod{15}$

۴.  $10^{200} \equiv 20 \pmod{27}$

۳.  $3^{200} \equiv 15 \pmod{35}$

۷- تعداد عناصر مجموعه  $\{1 \leq a \leq 343 : (a, 343) = 1\}$  برابر کدام یک از گزینه های زیر است؟

۴. 294

۳. 194

۲. 156

۱. 394

۸- اگر  $\varphi: N \rightarrow N$  تابع اویلر باشد، آنگاه کدام یک از گزینه های زیر برقرار نیست؟

۱. برای هر عدد طبیعی  $n$  و  $m$  داریم  $\varphi(n+m) = \varphi(n) + \varphi(m)$ .

۲. اگر  $n$  عددی فرد باشد، آنگاه  $\varphi(2n) = \varphi(n)$ .

۳. اگر  $n$  عددی زوج باشد، آنگاه  $\varphi(2n) = 2\varphi(n)$ .

۴. عدد طبیعی  $n \geq 2$  اول است اگر و تنها اگر  $\varphi(n) = n-1$ .

۹- مرتبه عدد 3 به هنگ 11 کدام گزینه است؟

۱. 3      ۲. 5      ۳. 7      ۴. 11

۱۰- کدام یک از هنگ های زیر ریشه اولیه دارد؟

۱. 8      ۲. 12      ۳. 15      ۴. 18

۱۱- کدام یک از معادلات هم نهشتی زیر حل پذیر نیست؟

۱.  $x^2 \equiv 4 \pmod{11}$       ۲.  $x^2 \equiv 3 \pmod{14}$       ۳.  $x^5 \equiv 6 \pmod{13}$       ۴.  $x^4 \equiv 3 \pmod{10}$

۱۲- مرتبه  $3^6$  در پایه 10 کدام است؟

۱. 1      ۲. 2      ۳. 3      ۴. 6

۱۳- کدام یک از توابع زیر ضربی نیست؟

۱.  $f(n) = n^2 + 1$       ۲.  $l(n) = \frac{1}{n^3}$       ۳.  $\sigma^2(n)$       ۴.  $\tau^2(n)$

۱۴- زوج متحابه عدد 2924 کدام است؟

۱. 220      ۲. 2620      ۳. 1210      ۴. 284

۱۵- حاصل  $\sum_{n=1}^{10} \tau(n)$  کدام است؟

۱. 10      ۲. 17      ۳. 24      ۴. 27

۱۶- کسر مسلسل نامتناهی  $\langle -2, 3, 1, 2, 1, 2, \dots \rangle$  معرف کدام عدد زیر است؟

۱.  $\sqrt{2}$       ۲.  $\sqrt{3}$       ۳.  $-\sqrt{2}$       ۴.  $-\sqrt{3}$

۱۷- بسط به صورت کسر مسلسل ساده نامتناهی متناوب عدد اصم درجه دوم  $\frac{3+\sqrt{3}}{4}$  کدام است؟

۱.  $\langle 3, \overline{6} \rangle$  ۲.  $\langle \overline{1}, 2 \rangle$  ۳.  $\langle 1, 5, \overline{2, 6} \rangle$  ۴.  $\langle \overline{1} \rangle$

۱۸- بسط به صورت کسر مسلسل ساده نامتناهی کدام یک از اعداد اصم زیر متناوب محض نیست؟

۱.  $\frac{3}{2} + \sqrt{6}$  ۲.  $\frac{1+\sqrt{2}}{5}$  ۳.  $\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$  ۴.  $\frac{1+\sqrt{2}}{3}$

۱۹- کدام گزاره همواره برقرار است؟

۱. هر عدد گویا را می توان به صورت یک کسر مسلسل ساده نامتناهی نوشت.  
۲. هر عدد اصم را می توان به صورت یک کسر مسلسل ساده متناهی نوشت.  
۳. مقدار هر کسر مسلسل ساده نامتناهی یک عدد اصم است.  
۴. مقدار هر کسر مسلسل یک عدد اصم است.

۲۰- اگر  $\alpha$  یک عدد حقیقی اصم بزرگ تر از یک و  $\alpha = \langle a_0, a_1, a_2, \dots \rangle$  باشد، آنگاه

۱.  $\frac{1}{\alpha} = \langle a_0, a_1, a_2, \dots \rangle$  ۲.  $\frac{1}{\alpha} = \langle a_2, a_3, a_4, \dots \rangle$   
۳.  $\frac{1}{\alpha} = \langle 0, a_1, a_2, a_3, \dots \rangle$  ۴.  $\frac{1}{\alpha} = \langle 0, a_0, a_1, a_2, \dots \rangle$

### سوالات تشریحی

۱.۲۰ نمره

۱- اگر  $a, b$  دو عدد صحیح غیر صفر باشند، آنگاه نشان دهید که  $[a, b] = \frac{|ab|}{(a, b)}$

۱.۲۰ نمره

۲- معادله همنهشتی زیر را حل کنید.

$$x^2 + x + 3 \equiv 0 \pmod{135}$$

۱.۲۰ نمره

۳- اگر عدد طبیعی  $m$  دارای ریشه اولیه باشد، آنگاه نشان دهید که دقیقاً  $\varphi(\varphi(m))$  ریشه اولیه ناهمنهشت به هنگ  $m$  وجود دارد.

۱.۲۰ نمره

۴- فرض کنید  $n$  یک عدد طبیعی فرد باشد. نشان دهید  $2^{n!} \equiv 1 \pmod{n}$

۱.۲۰ نمره

۵- نشان دهید مقدار هر کسر ساده مسلسل نامتناهی یک عدد اصم است.

پاسخ صحیح

شماره  
سوال

۱	ج
۲	ج
۳	ب
۴	ب
۵	الف
۶	الف
۷	د
۸	الف
۹	ب
۱۰	د
۱۱	ب
۱۲	ب
۱۳	الف
۱۴	ب
۱۵	د
۱۶	د
۱۷	ج
۱۸	د
۱۹	ج
۲۰	د

۱- کدام یک از هم نهشتی های زیر برقرار است؟

۱.  $791 \equiv 27 \pmod{11}$  ۲.  $-930 \equiv 4 \pmod{463}$

۳.  $-25 \equiv -47 \pmod{11}$  ۴.  $721 \equiv -4 \pmod{7}$

۲- فرض کنیم  $p$  یک عدد اول و  $a, b$  اعداد صحیح و  $n$  یک عدد طبیعی باشد. در این صورت کدام گزینه نادرست است؟

۱. اگر  $p^n \mid a^n$  آنگاه  $p \mid a^n$  ۲. اگر  $p \mid a^n$  آنگاه  $p^n \mid a^n$

۳. اگر  $a \mid p^n$  و  $|a| \neq 1$  آنگاه  $p \mid a$  ۴. اگر  $p \mid ab$  آنگاه  $p \mid a$  و  $p \mid b$

۳- اگر  $n$  یک عدد فرد و  $\varphi$  تابع اویلر باشد آنگاه

۱.  $\varphi(2n) = \varphi(n)$  ۲.  $\varphi(2n) = 2\varphi(n)$  ۳.  $\varphi(2n^2) = 2\varphi(n)$  ۴.  $\varphi(2n^2) = 2\varphi(n^2)$

۴- کدام یک از گزینه های زیر صحیح است؟

۱.  $2^{100} \equiv 1 \pmod{15}$  ۲.  $4^{720} \equiv 4 \pmod{21}$

۳.  $3^{200} \equiv 15 \pmod{35}$  ۴.  $10^{200} \equiv 20 \pmod{27}$

۵- کدام یک از دستگاههای زیر دارای جواب نیست؟

۱.  $\begin{cases} 3x \equiv 4 \pmod{5} \\ 2x \equiv 3 \pmod{10} \end{cases}$  ۲.  $\begin{cases} 2x \equiv 3 \pmod{5} \\ 3x \equiv -1 \pmod{4} \end{cases}$  ۳.  $\begin{cases} 3x \equiv 1 \pmod{10} \\ 4x \equiv 2 \pmod{7} \end{cases}$  ۴.  $\begin{cases} 8x \equiv 4 \pmod{14} \\ 5x \equiv 3 \pmod{11} \end{cases}$

۶- مرتبه 5- به هنگ 18 کدام است؟

۱. 2 ۲. 5 ۳. 7 ۴. 3

۷- اگر  $(a, m) = 1$  و  $a^*$  یک عکس حسابی  $a$  به هنگ  $m$  باشد، آنگاه

۱.  $\text{ord}_p(a) = \text{ord}_p(a^*)$  ۲.  $\text{ord}_p(a^*) = \frac{1}{\text{ord}_p(a)}$

۳.  $\text{ord}_p(a^*) = -\text{ord}_p(a)$  ۴.  $\text{ord}_p(a^*) = p \cdot \text{ord}_p(a)$

۸- اگر  $\text{ord}_{10}(3) = 4$  آنگاه  $\text{ord}_{10}(3^6)$  کدام است؟

۱. 4 ۲. 6 ۳. 3 ۴. 2

۹- کدام یک از هنگ های زیر ریشه اولیه دارد؟

۱. 8 ۲. 12 ۳. 15 ۴. 25



۱۰- حاصل  $\sum_{n=1}^{10} \tau(n)$  کدام است؟

۴. 17

۳. 10

۲. 27

۱. 24

۱۱- کدام یک از توابع زیر ضربی نیستند؟

۴.  $g(n) = \frac{1}{n^3}$

۳.  $f(n) = n^2 + 1$

۲.  $\sigma^2(n)$

۱.  $\tau^2(n)$

۱۲- کدام یک از احکام زیر درست نیست؟

۱. تابع فی اویلر یک تابع حسابی ضربی است.

۲. ضرب پیچشی دو تابع حسابی خاصیت جابجایی دارد.

۳. اگر تابع غیر صفر  $f$  و ضرب پیچشی  $f * g$  هردو ضربی باشند آنگاه  $g$  نیز ضربی است.

۴.  $\sum_{n=1}^m \mu(n) \left[ \frac{m}{n} \right] = 0$

۱۳- زوج متحابه عدد 2924 کدام است؟

۴. 1210

۳. 2620

۲. 220

۱. 284

۱۴- کدام یک از معادلات همنهشتی زیر حل پذیر است؟

۲.  $x^2 \equiv 3 \pmod{17}$

۱.  $x^2 \equiv -7 \pmod{17}$

۴.  $x^2 \equiv 2 \pmod{19}$

۳.  $x^2 \equiv -100 \pmod{17}$

۱۵- کدام یک از احکام زیر درست نیست؟

۱. برای هر عدد طبیعی  $n$  عدد  $n^2$  تام است.

۲. اگر  $P$  عددی اول باشد، آنگاه  $P$  و  $P^2$  نمی توانند با یک عدد طبیعی دیگر تشکیل یک زوج متحابه دهند.

۳. اگر  $m$  و  $n$  دو عدد متحابه باشند بطوری که  $n > m$  آنگاه  $n$  ناقص و  $m$  زاید است.

۴. اگر  $m$  زوج و  $n$  فرد باشد بطوری که تشکیل یک زوج متحابه بدهند آنگاه  $n$  یک مربع کامل است.

۱۶- کسر مسلسل نامتناهی  $\langle 1, 2, 2, 2, \dots \rangle$  معرف کدام کسر زیر است؟

۴.  $1 - \sqrt{3}$

۳.  $1 + \sqrt{3}$

۲.  $1 + \sqrt{2}$

۱.  $\sqrt{2}$

۱۷- اگر  $\alpha > 1$  یک عدد حقیقی اصم باشد و  $\alpha = \langle a_0, a_1, a_2, \dots \rangle$  آنگاه

۱.  $\frac{1}{\alpha} = \langle a_0, a_1, a_2, \dots \rangle$
۲.  $\frac{1}{\alpha} = \langle a_2, a_3, a_4, \dots \rangle$
۳.  $\frac{1}{\alpha} = \langle 0, a_0, a_1, a_2, \dots \rangle$
۴.  $\frac{1}{\alpha} = \langle 0, a_1, a_2, \dots \rangle$

۱۸- بسط به صورت کسر مسلسل ساده نامتناهی متناوب عدد اصم درجه دوم  $\sqrt{10}$  کدام است؟

۱.  $\langle 3, \bar{6} \rangle$
۲.  $\langle 6, \bar{3} \rangle$
۳.  $\langle 3, 3, \bar{6} \rangle$
۴.  $\langle 6, 6, \bar{3} \rangle$

۱۹- کدام یک از اعداد زیر اصم درجه دوم نیست؟

۱.  $3 - \sqrt{3}$
۲.  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$
۳.  $\frac{3}{1 + \sqrt{5}}$
۴.  $3\sqrt{4}$

۲۰- بسط به صورت کسر مسلسل ساده نامتناهی کدام یک از اعداد اصم زیر متناوب محض نیست؟

۱.  $\frac{3}{2} + \sqrt{6}$
۲.  $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$
۳.  $\frac{1 + \sqrt{2}}{5}$
۴.  $\frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}$

### سوالات تشریحی

۱- ابتدا نشان دهید که هر عدد طبیعی همنهشت مجموع ارقامش به هنگ 9 است و با استفاده از آن اعدادی را که بر 9 بخش پذیر هستند را تعیین کنید.

۱.۴۰ نمره

۲- معادله هم نهشتی  $x^2 + x + 3 \equiv 0 \pmod{135}$  را حل کنید.

۱.۴۰ نمره

۳- اگر  $m, n > 2$  اعداد صحیح باشند بطوری که  $(m, n) = 1$  آنگاه به هنگ  $mn$  ریشه اولیه ای وجود ندارد.

۱.۴۰ نمره

۴- فرض کنید  $n$  یک عدد طبیعی فرد باشد. ثابت کنید  $2^{n!} \equiv 1 \pmod{n}$ .

۱.۴۰ نمره

۵- اگر تابع حسابی  $\sum_{d|n} g(d)$  ضربی باشد، آنگاه تابع حسابی  $g(n)$  نیز ضربی است.

۱.۴۰ نمره

باسمہ صحیح  
نمبر  
سوال

1	ج
2	د
3	الف
4	الف
5	الف
6	د
7	الف
8	د
9	د
10	ب
11	ج
12	د
13	ج
14	ج
15	الف
16	الف
17	ج
18	الف
19	ب
20	ب

۱- کدام گزینه زیر همواره صحیح است؟

۱. اگر  $a, b$  دو عدد صحیح باشند و  $a|b$ ، آنگاه  $a \leq b$ .  
۲. اگر  $a|bc$ ، آنگاه  $a|b$  یا  $a|c$ .  
۳. اگر  $a|b$  و  $c|d$ ، آنگاه  $ac|bd$ .  
۴. برای هر  $a \in \mathbb{Z}$ ،  $0|a$ .

۲- فرض کنید  $a = 162$ ،  $(a, b) = 81$  و  $[a, b] = 172$ ، آنگاه مقدار  $b$  کدام است؟

۱. 86      ۲. 96      ۳. 182      ۴. 162

۳-  $20!$  به چند صفر ختم می شود؟

۱. 2      ۲. 3      ۳. 4      ۴. 5

۴- کدام گزینه همواره صحیح است؟

۱. اگر  $p|a^n$ ، آنگاه  $p^n|a^n$  که در آن  $n$  یک عدد طبیعی،  $a$  یک عدد صحیح و  $p$  یک عدد اول است.  
۲. فرض کنید  $p \geq 5$  یک عدد اول باشد، آنگاه  $p^2 + 2$  اول است.  
۳. اگر  $p|a^n$ ، آنگاه  $a|p$ .  
۴. اگر  $p|a+b$ ، آنگاه  $p|a$  یا  $p|b$ .

۵- کدام معادله سیاله زیر حل پذیر است؟

۱.  $3x + 6y = 7$       ۲.  $15x - 45y = 60$       ۳.  $-7x + 14y = 32$       ۴.  $-6x - 3y = 2$

۶- باقی مانده تقسیم  $1900$  بر 13 کدام گزینه است؟

۱.  $^{\circ}$       ۲. 1      ۳. 11      ۴. 12

۷- فرض کنید  $m, n \in \mathbb{N}$  و  $a, b, c$  اعداد صحیح باشند. در این صورت کدام گزینه همواره صحیح است؟

۱. اگر  $a \equiv b \pmod{m}$  و  $a \equiv b \pmod{n}$ ، آنگاه  $a \equiv b \pmod{n}$ .

۲. اگر  $a \equiv b \pmod{m}$ ، آنگاه  $\frac{a}{(a, b)} \equiv \frac{b}{(a, b)} \pmod{m}$ .

۳. اگر  $ac \equiv bc \pmod{m}$ ، آنگاه  $a \equiv b \pmod{m}$ .

۴. اگر  $a \equiv b \pmod{m}$  و  $c \in \mathbb{N}$ ، آنگاه  $ac \equiv bc \pmod{mc}$ .

۸- کدام مجموعه یک دستگاه مخفف مانده ها به هنگ 12 نیست؟

۱.  $\{1, 5, 7, 11\}$  ۲.  $\{1, 3, 5, 7\}$  ۳.  $\{5, 25, 35, 55\}$  ۴.  $\{13, 17, 19, 23\}$

۹- عکس حسابی 22- به هنگ 3 کدام گزینه است؟

۱. 2 ۲. 3 ۳. 4 ۴. 1

۱۰- کدام یک از معادلات همنهشتی زیر حل پذیر است؟

۱.  $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{7}$  ۲.  $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{11}$  ۳.  $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{13}$  ۴.  $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{23}$

۱۱- جواب دستگاه زیر کدام گزینه است؟

$$\begin{cases} x \equiv 5 \pmod{11} \\ x \equiv 7 \pmod{10} \end{cases}$$

۱. 17 ۲. 27 ۳. 37 ۴. 47

۱۲- کدام گزینه در مورد معادله همنهشتی  $x^4 \equiv 1 \pmod{17}$  صحیح است؟

۱. این معادله دقیقاً 4 جواب ناهمنهشت به هنگ 17 دارد.  
۲. این معادله حداکثر 4 جواب ناهمنهشت به هنگ 17 دارد.  
۳. این معادله حداقل 4 جواب ناهمنهشت به هنگ 17 دارد.  
۴. این معادله جواب ندارد.

۱۳- مرتبه 123 به هنگ 11 برابر کدام گزینه است؟

۱. 2 ۲. 5 ۳. 8 ۴. 10

۱۴- کدام یک از اعداد زیر ریشه اولیه دارد؟

۱. 30 ۲. 40 ۳. 50 ۴. 60

۱۵-  $\sum_{d|30} \mu(d)$  برابر کدام گزینه است؟

۱. ۰ ۲. 1 ۳. -1 ۴. 2

۱۶- کدام عدد، یک عدد تام است؟

۱. 18 ۲. 20 ۳. 494 ۴. 496

۱۷- اگر  $p \equiv \pm 5 \pmod{12}$ ، آنگاه  $\left(\frac{3}{p}\right)$  برابر کدام گزینه است؟

۱.  $\left(\frac{3}{p}\right)$       ۲.  $-\left(\frac{p}{3}\right)$       ۳. 1      ۴. -1

۱۸-  $ord_{7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19} 25$  برابر کدام گزینه است؟

۱. 10      ۲. 15      ۳. 20      ۴. 25

۱۹- کسر مسلسل عدد  $\frac{99}{43}$  برابر کدام گزینه است؟

۱.  $\langle -3, 1, 2, 3, 3 \rangle$       ۲.  $\langle -3, 1, 2, 2, 3 \rangle$       ۳.  $\langle -3, 1, 2, 3, 4 \rangle$       ۴.  $\langle -3, 1, 2, 3, 1 \rangle$

۲۰- مقدار کسر مسلسل ساده نامتناهی  $\langle 1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots \rangle$  کدام است؟

۱.  $\sqrt{2}$       ۲.  $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$       ۳.  $\sqrt{5}$       ۴.  $\sqrt{7}$

### سوالات تشریحی

۱.۴۰ نمره

۱- نشان دهید بی نهایت عدد اول وجود دارد.

۱.۴۰ نمره

۲- قضیه ویلسن را بیان و اثبات کنید.

۱.۴۰ نمره

۳- معادله همنهشتی  $x^3 - 4x^2 + 4x \equiv 0 \pmod{9}$  را حل کنید.

۱.۴۰ نمره

۴- اگر تابع حسابی  $f(n) = \sum_{d|n} g(d)$  ضربی باشد، آنگاه تابع حسابی  $g(n)$  هم ضربی است.

۱.۴۰ نمره

۵- فرض کنید  $p$  یک عدد اول فرد باشد و  $(a, p) = 1$ . نشان دهید  $a$  یک مانده درجه دوم به هنگ  $p$

است اگر و فقط اگر  $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$

نمبر سوال	يـاـسـخـ صـحـيـح
1	ج
2	الف
3	ج
4	الف
5	ب
6	ج
7	د
8	ب
9	الف
10	ج
11	ب
12	الف
13	د
14	ج
15	الف
16	د
17	د
18	ب
19	ج
20	ب



۱- اصل خوش ترتیبی بیان می کند که؛

۱. مجموعه اعداد طبیعی ناشمارا هستند.

۲. هر زیر مجموعه غیر تهی از اعداد طبیعی دارای کوچکترین عضو است.

۳. مجموعه اعداد طبیعی شمارای نامتناهی اند.

۴. عدد اصلی مجموعه اعداد طبیعی از عدد اصلی اعداد حقیقی کوچکتر است.

۲- کدام گزینه صحیح می باشد؟

۱. برای هر  $a, n, m$  از اعداد طبیعی  $(a^{2^n} + 1, a^{2^m} + 1) = 1$

۲. اگر  $(a, b, c) = 1$  آنگاه  $(a + b, b, c) = 1$

۳. اگر  $(a, b) = 1$  آنگاه  $(a + b, a - b) = 1$

۴. اگر  $(a, b) = 1$  آنگاه  $(a + 2b, 2a + b) = 1$

۳- کدام یک از اعداد زیر نمی تواند رقم یکان مربع عدد صحیحی باشد؟

۱. ۳      ۲. ۴      ۳. ۵      ۴. ۶

۴- بزرگترین عدد  $\alpha$  که در رابطه  $7^\alpha | (125)!$  صدق می کند کدام است؟

۱. ۱۵      ۲. ۱۷      ۳. ۱۹      ۴. ۲۱

۵- باقیمانده تقسیم  $1^{13} + 2^{13} + \dots + (12)^{13}$  بر ۱۳ کدام گزینه است؟

۱. ۱      ۲. صفر      ۳. ۲      ۴. -۱

۶- اگر  $m$  و  $d$  اعداد طبیعی و  $d | m$ ، آنگاه تعداد اعداد صحیح  $k$  بطوریکه  $(k, m) = d$  چند تا است؟

۱.  $\varphi(m)$       ۲.  $\varphi(d)$       ۳.  $\varphi(\frac{m}{d})$       ۴.  $\frac{m}{d}$

۷- اگر  $a^*$  یک عکس حسابی  $a$  به هنگ  $m$  و  $b \in \mathbb{Z}$  باشد آنگاه کدام گزینه مغایر با بقیه است؟

۱.  $b$  یک عکس حسابی  $a$  به هنگ  $m$  است.      ۲.  $b \equiv a^* \pmod{m}$

۳.  $(b, m) = 1$       ۴.  $b \in \overline{a^*}$

۸- اگر  $P$  یک عدد اول فرد باشد بطوریکه  $P \equiv 3 \pmod{4}$ ، آنگاه

$$\frac{P-1}{2}! \equiv \pm 1 \pmod{P} \quad .1$$

$$\left(\frac{P-1}{2}!\right)^2 \equiv -1 \pmod{P} \quad .2$$

۳. معادله  $x^2 \equiv -1 \pmod{P}$  حلپذیر است.

$$(-1)^{\frac{P-1}{2}} \equiv 1 \pmod{P} \quad .4$$

۹- مرتبه عدد 3 به هنگ 11 کدام است؟

۱. 5      ۲. 10      ۳. 11      ۴. 12

۱۰- کدام گزینه نادرست است؟

۱. اگر  $(a, m) = (a, n) = 1$  آنگاه  $ord_{[m, n]}^a = [ord_m^a, ord_n^a]$

۲. اگر  $(a, m) = (b, m) = 1$  آنگاه  $ord_m^{ab} \mid [ord_m^a, ord_m^b]$

۳. اگر  $(a, m) = (b, m) = 1$  آنگاه  $ord_m^{ab} = ord_m^a \times ord_m^b$

۴. اگر  $(a, m) = (b, ord_m^a) = 1$  آنگاه  $ord_m^{a^b} = ord_m^a$

۱۱- بنا به قضیه لاگرانژ معادله همنهشتی  $x^5 \equiv 1 \pmod{17}$  حداکثر چند جواب دارد؟

۱. 4      ۲. 5      ۳. 16      ۴. 17

۱۲- کدام یک از توابع زیر ضربی است؟

۱.  $n^2 + 1$       ۲.  $\frac{n+1}{n^2}$       ۳.  $\frac{1}{n^3}$       ۴.  $\sqrt{n^2 + n}$

۱۳- حاصل  $\sum_{n=1}^{10} \tau(n)$  که در آن  $\tau$  تعداد مقسوم علیه مثبت  $n$  می باشد کدام است؟

۱. 24      ۲. 27      ۳. 10      ۴. 17

۱۴- اگر  $\varphi$  تابع فی اویلر و  $\tau$  تعداد مقسوم علیه عدد  $n$  باشد آنگاه  $(\varphi * \tau)(n)$  کدام است؟

۱.  $n$       ۲.  $n^2$       ۳.  $\mu(n)$       ۴.  $\sigma(n)$

۱۵- در مورد نماد لژاندر  $\left(\frac{39}{17}\right)$  و  $\left(\frac{17}{13}\right)$  کدام گزینه صحیح است؟

۱. هر دو 1 می باشند
۲. هر دو -1 می باشند
۳. اولی 1 و دومی -1 می باشد
۴. اولی -1 و دومی 1 می باشد

۱۶- مقدار عبارت  $\sum_{a=1}^{12} \left(\frac{a}{13}\right)$  کدام گزینه است؟

۱. 1
۲. -1
۳. صفر
۴. 2

۱۷- کدام یک از گزینه های زیر یک مانده درجه دوم به هنگ داده شده است؟

۱.  $n=3$  به هنگ 13.
۲.  $n=5$  به هنگ 43.
۳.  $n=2$  به هنگ 13.
۴.  $n=6$  به هنگ 11.

۱۸- کسر مسلسل  $\langle 3, 2, 1, 2, 1, \dots \rangle$  مربوط به کدام عدد اصم است.

۱.  $\frac{5-\sqrt{3}}{2}$
۲.  $\frac{5+\sqrt{3}}{2}$
۳.  $\frac{5-\sqrt{2}}{3}$
۴.  $\frac{5+\sqrt{2}}{3}$

۱۹- مقدار  $p_k q_{k-1} - q_k p_{k-1} = ?$  عبارت است از

۱.  $(-1)^{k-1} a_k$
۲.  $(-1)^k$
۳.  $(-1)^k a_{k-1}$
۴.  $(-1)^{k-1}$

۲۰- کدام یک از اعداد اصم زیر درجه دوم نیست؟

۱.  $\frac{3}{1+\sqrt{5}}$
۲.  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$
۳.  $3 - \sqrt{3}$
۴.  $3\sqrt{2}$

### سوالات تشریحی

۱- معادله سیاله  $35x + 21y + 15z = 4$  را حل کنید. ۱.۴۰ نمره

۲- فرض کنید  $m$  یک عدد طبیعی و  $a$  یک عدد صحیح باشد بطوریکه  $(a, m) = 1$ ، ثابت کنید  $a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$ . ۱.۴۰ نمره

۳- ثابت کنید اگر  $g$  یک ریشه اولیه به هنگ عدد اول  $P$  باشد به طوری که  $g^{P-1}$  همنهشت عدد 1 به هنگ  $P^2$  نباشد آنگاه برای هر عدد طبیعی  $\alpha \geq 2$ ،  $g^{\phi(P^{\alpha-1})}$  همنهشت عدد 1 به هنگ  $P^{\alpha}$  نمی باشد.  $\phi$  تابع فی اویلر است. ۱.۴۰ نمره

اگر یک  $P$  عدد اول و فرد و  $a$  یک عدد صحیح فرد باشد بطوریکه  $(a, p) = 1$  انگاه  $\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^{\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{ka}{p}\right]}$

عدد اصم  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  را به صورت کسر مسلسل ساده نامتناهی بنویسید.

نمبر سوال	جواب صحيح
1	ب
2	ب
3	الف
4	ج
5	ب
6	ج
7	ج
8	الف
9	الف
10	ج
11	ب
12	ج
13	ب
14	د
15	د
16	ج
17	الف
18	ب
19	د
20	ب

۱-  $\varphi(675)$  کدام است؟

۱. ۶۶۰      ۲. ۷۲۰      ۳. ۳۶۰      ۴. ۳۴۵

۲- مقدار  $a$  در همنهشتی  $1^{11} + 2^{11} + 3^{11} + \dots + 10^{11} \equiv a \pmod{11}$  کدام است؟

۱. ۰      ۲. ۱      ۳. ۵      ۴. ۶

۳- اگر  $a$  و  $b$  اعداد طبیعی و  $[a, b] = (a, b)$  آنگاه:

۱.  $a|b$       ۲.  $b|a$       ۳.  $a = b$       ۴.  $a - b = 1$

۴- اگر  $a = bq + r$  آنگاه:

۱.  $(a, b) = (q, b)$       ۲.  $(a, b) = r$       ۳.  $(a, b) = (a, r)$       ۴.  $(a, b) = (r, b)$

۵- بزرگترین توان ۵ در  $32!$  کدام است؟

۱. ۳      ۲. ۵      ۳. ۱۵      ۴. ۷

۶- باقیمانده ی  $2^{p-1}(p-1)!$  بر  $p$  وقتی که  $p$  یک عدد اول و فرد است برابر است با:

۱. ۱      ۲. -۲      ۳. -۱      ۴. ۰

۷- باقیمانده ی تقسیم  $1! + 2! + \dots + 20!$  بر ۶ کدام است؟

۱. ۰      ۲. ۱      ۳. ۲      ۴. ۳

۸- فرض کنید  $m, d \in \mathbb{N}$  و  $d|m$ . تعداد اعداد صحیح  $k$  به طوری که  $(k, m) = d$  برابر است با:

۱.  $\varphi(m)$       ۲.  $\varphi(d)$       ۳.  $\varphi(\frac{m}{d})$       ۴.  $\varphi(\frac{k}{d})$

۹- جواب های معادله همنهشتی  $x^2 \equiv -1 \pmod{13}$  کدام است؟

۱.  $x \equiv 5 \pmod{13}$       ۲.  $x \equiv 8 \pmod{13}$       ۳.  $x \equiv 4 \pmod{13}$       ۴. موارد ۱ و ۲

۱۰- اگر  $\text{ord}_p^a = 3$  آنگاه  $\text{ord}_p^{a+1}$  کدام است؟ ( $p$  عددی اول است)

۱. ۶      ۲. ۵      ۳. ۴      ۴. ۳

۱۱- کدام یک از اعداد زیر دارای ریشه ی اولیه هستند؟

۱. ۲۱      ۲. ۷      ۳. ۶      ۴. ۱۵

۱۲- تعداد ریشه های اولیه به هنگ ۱۹ چند تا است؟

۱. ۱۸      ۲. ۶      ۳. ۱۲      ۴. ۱۵

۱۳- معادله ی همنهشتی  $x^8 - 1 \equiv 0 \pmod{17}$  دقیقا دارای چند جواب ناهمنهشت است؟

۱. ۱۶      ۲. ۷      ۳. ۸      ۴. ۱۷

۱۴- اگر  $n = 2^4 \times 3^5 \times 5 \times 7$  آنگاه  $\tau(n)$  کدام است؟

۱. ۱۲۰      ۲. ۶۰      ۳. ۲۴۰      ۴. ۱۸۰

۱۵- اگر  $p = 13$  باشد، آنگاه  $\sum_{a=1}^{12} \left( \frac{a}{p} \right) = ?$

۱. ۱      ۲. ۲      ۳. ۰      ۴. -۲

۱۶- کدام یک از معادلات همنهشتی زیر حل پذیر است؟

۱.  $x^2 \equiv 5 \pmod{2^7 \times 3^4 \times 5^6}$       ۲.  $x^2 \equiv 5 \pmod{11^2 \times 7^2}$

۳.  $x^2 \equiv 3 \pmod{2^2 \times 5^2 \times 7^3}$       ۴.  $x^2 \equiv -2 \pmod{3^2 \times 11^2}$

۱۷- اگر  $f(n)$  و  $g(n)$  دو تابع ضربی باشند آنگاه کدام تابع زیر ضربی است؟

۱.  $f(n) + g(n)$       ۲.  $f(n) - g(n)$       ۳.  $f(n).g(n)$       ۴.  $3f(n)$

۱۸- اگر  $n$  عددی فرد و بزرگتر از یک باشد و  $(2, n) = 1$  ، آنگاه :

۱. همواره  $\left( \frac{2}{n} \right) = 1$       ۲. اگر  $n \equiv 5 \pmod{8}$  آنگاه  $\left( \frac{2}{n} \right) = -1$

۳. اگر  $n \equiv 1 \pmod{8}$  آنگاه  $\left( \frac{2}{n} \right) = -1$       ۴. اگر  $n \equiv -5 \pmod{8}$  آنگاه  $\left( \frac{2}{n} \right) = 1$

۱۹- کسر مسلسل  $\langle 1, 2, 1, 2, \dots \rangle$  برابر است با :

۱.  $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$       ۲.  $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$       ۳.  $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$       ۴.  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$



۲۰- کدام یک از اعداد اصم زیر درجه دوم نیست؟

۱.  $\frac{3}{1+\sqrt{5}}$

۲.  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

۳.  $3 - \sqrt{3}$

۴.  $3\sqrt{2}$

### سوالات تشریحی

۱.۴۰ نمره

۱- معادله سیاله  $35x + 21y + 15z = 4$  را حل کنید.

۱.۴۰ نمره

۲- نشان دهید اگر  $p$  یک عدد اول باشد  $a \in \mathbb{Z}$  و  $p \nmid a$ ، آنگاه  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ .

۱.۴۰ نمره

۳- نشان دهید اگر  $g(n)$  یک تابع حسابی ضربی باشد و  $f(n)$  را به صورت زیر تعریف کنیم

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d)$$

آنگاه تابع حسابی  $f$  هم ضربی است.

۱.۴۰ نمره

۴- معادله ی همنهشتی  $3x^2 + 3x + 4 \equiv 0 \pmod{5}$  را حل کنید.

۱.۴۰ نمره

۵- عدد اصم  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  را به صورت کسر مسلسل ساده نامتناهی بنویسید.

شماره سوال	پاسخ صحیح
1	ج
2	الف
3	ج
4	د
5	د
6	ج
7	د
8	ج
9	د
10	الف
11	ب
12	ب
13	ج
14	الف
15	ج
16	د
17	ج
18	ب
19	الف
20	ب

۱- کدام گزینه همواره صحیح است؟

۱. اگر  $a|bc$  آنگاه  $a|b$  یا  $a|c$  .  
۲. اگر  $a|b$  و  $c|b$  آنگاه  $a+c|b+d$  .  
۳. اگر  $a|b$  و  $c \neq 0$  آنگاه  $ac|b$  .  
۴. اگر  $bc|a$  آنگاه  $b|a$  و  $c|a$  .

۲- باقی مانده تقسیم مربع هر عدد فرد بر ۸ برابر است با:

۱. صفر  
۲. ۱  
۳. ۲  
۴. ۱-۲

۳- اگر  $m$  و  $n$  اعداد طبیعی باشند، در این صورت کدام گزینه همواره صحیح است؟

۱.  $\frac{(m!)^n}{(mn)!} \in \mathbb{N}$  .  
۲.  $(m!)^n | (mn)!$  .  
۳. باقی مانده  $(m+1)^n - 1$  بر  $m$  برابر با یک است.  
۴.  $m^2 + n^2$  مضربی از ۲ است.

۴- مقدار  $a$  در معادله ی  $[a, 6](a, 6) = 24$  کدام است؟

۱. ۴  
۲.  $\pm 2$   
۳.  $\pm 4$   
۴. ۲

۵- کدام یک از معادلات زیر حل پذیر است؟

۱.  $5x + 10y = 12$  .  
۲.  $-3x + 6y = 2$  .  
۳.  $15x + 21y + 6z = 4$  .  
۴.  $x + 2y = 40$  .

۶- کدام گزینه یک عدد اول مرسن است؟

۱. ۶۳  
۲. ۱۲۷  
۳. ۱۷  
۴. ۱۹

۷-  $10!$  به چند صفر ختم می شود؟

۱. ۴  
۲. ۲  
۳. ۶  
۴. ۸

۸- کدام گزینه عکس قضیه ویلسن است؟

۱. برای هر عدد طبیعی  $m$ ،  $(m-1)! \equiv -1 \pmod{m}$  آنگاه  $m$  اول است.  
۲. برای هر عدد طبیعی  $m \geq 1$ ،  $(m-1)! \equiv -1 \pmod{m}$  آنگاه  $m$  اول است.  
۳. برای هر عدد طبیعی  $m \geq 2$ ،  $(m-1)! \equiv -1 \pmod{m}$  آنگاه  $m$  اول است.  
۴. برای هر عدد طبیعی  $m > 2$ ،  $(m-1)! \equiv -1 \pmod{m}$  آنگاه  $m$  اول است.

۹-  $\sum_{d|n} \psi(d) = 25$  مقدار  $n$  کدام است؟ اگر

۱. ۲۰      ۲. ۱۵      ۳. ۲۵      ۴. ۳۰

۱۰- کدام گزینه همواره درست است؟ ( $\varphi$  تابع اویلر است)

۱.  $m|n$  اگر و فقط اگر  $\varphi(m)|\varphi(n)$  .  
 ۲. برای هر عدد طبیعی  $n$ ،  $\varphi(n) | n!$  .  
 ۳.  $\varphi(3n) = \varphi(2n)$  اگر و فقط اگر  $3|n$  .  
 ۴. برای  $m \geq 3$ ،  $\varphi(m)$  زوج است.

۱۱- کدام گزینه در مورد معادله ی  $x^2 \equiv 1 \pmod{7}$  صحیح است؟

۱. دقیقاً دارای یک جواب ناهمنهشت به پیمانه ۷ است.  
 ۲. دقیقاً دو جواب ناهمنهشت به پیمانه ۷ دارد.  
 ۳. حداقل سه جواب ناهمنهشت به پیمانه ۷ دارد.  
 ۴. حداکثر یک جواب ناهمنهشت به پیمانه ۷ دارد.

۱۲- کدام گزینه همواره صحیح است؟

۱. هر عدد اول  $P$  ریشه ای اولیه دارد.  
 ۲. اعداد طبیعی ۱، ۲، ۳، ۴ ریشه اولیه دارند.  
 ۳. اگر  $m = 2^\alpha$  و  $\alpha \geq 3$  آنگاه  $m$  ریشه اولیه دارد.  
 ۴. هر ریشه اولیه فرد از  $p^\alpha$  یک ریشه اولیه برای  $2p^\alpha$  ( $\alpha \geq 1$ ) است.

۱۳- مقدار  $\text{ord}_{7 \times 11 \times 14}^{25}$  کدام است؟

۱. ۱۵      ۲. ۲۰      ۳. ۱۰      ۴. ۲۵

۱۴- کدام یک از توابع زیر ضربی است؟

۱.  $n^2 + 1$       ۲.  $\frac{n+1}{n^2}$       ۳.  $\frac{1}{n^3}$       ۴.  $\sqrt{n^2 + n}$

۱۵- کدام گزینه همواره درست است؟

۱. برای هر عدد طبیعی  $n$ ،  $n^2$  یک عدد تام است.

۲. هر عدد تام به ۶ یا ۲۸ ختم می شود.

۳. حاصل ضرب هر دو عدد اول فرد، یک عدد تام است.

۴. هر عدد تام زوج به صورت مجموع تعداد اولی از اعداد طبیعی متوالی است.

۱۶- کدام گزینه درست است؟

۱.  $(\frac{1}{13}) = -1$

۲.  $(\frac{2}{7}) = -1$

۳.  $(\frac{-3}{7}) = 1$

۴.  $(\frac{-2}{13}) = 1$

۱۷- کدام گزینه نادرست است؟

۱. اگر  $a$  یک عدد زوج باشد آنگاه  $x^2 \equiv a$  همواره حل پذیر است.

۲. اگر  $a \equiv 1$  آنگاه  $x^2 \equiv a$  حل پذیر است.

۳.  $x^2 \equiv a$  حل پذیر است اگر و فقط اگر  $a \equiv 1$

۴. معادله همنهشتی  $x^2 \equiv a$  به ازای هر عدد صحیح فرد  $a$  حل پذیر است.

۱۸- به ازای  $n \geq 1$  مقدار کسر مسلسل  $\langle n, 2n \rangle$  کدام است؟

۱.  $\sqrt{n^2 - 1}$

۲.  $\sqrt{n^2 + 1}$

۳.  $\sqrt{n + 1}$

۴.  $\sqrt{n - 1}$

۱۹- مقدار کسر مسلسل نامتناهی  $\langle 2, 2, 2, \dots \rangle$  کدام است؟

۱.  $1 - \sqrt{2}$

۲.  $\frac{1 + \sqrt{2}}{2}$

۳.  $1 + \sqrt{2}$

۴.  $\frac{1 - \sqrt{2}}{2}$

۲۰- کدام کسر مسلسل ساده نامتناهی از اعداد اصم زیر متناوب محض است؟

۱.  $\frac{3}{2} + \sqrt{6}$

۲.  $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$

۳.  $\frac{1 + \sqrt{2}}{3}$

۴.  $-1 + 3\sqrt{2}$

### سوالات تشریحی

۱- ثابت کنید بی نهایت عدد اول وجود دارد.

۱.۴۰ نمره

۲- فرض کنید  $(m, n) = 1$ ، در این صورت ثابت کنید:  $m^{\varphi(n)} + n^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{mn}$

۱.۴۰ نمره

۳- معادله ی همنهشتی  $x^2 + x + 7 \equiv 0 \pmod{189}$  را حل کنید.

۱.۴۰ نمره

۴- نشان دهید برای هر عدد طبیعی  $n$ ،  $\sum_{d|n} \frac{1}{d} = \frac{\sigma(n)}{n}$

۱.۴۰ نمره

۵- فرض کنید  $p$  یک عدد اول فرد است و  $(a, p) = 1$ ، در این صورت نشان دهید  $a$  یک مانده درجه دوم به پیمانه  $p$  است اگر فقط اگر  $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$

شماره سوال	پاسخ صحیح
1	د
2	ب
3	ب
4	ج
5	د
6	ب
7	ب
8	ج
9	ج
10	د
11	ب
12	د
13	الف
14	ج
15	د
16	ج
17	الف
18	ب
19	ج
20	الف



۱- کدام گزینه درست است؟

۱. اگر  $a \mid b_1 b_2 \dots b_n$  آنگاه به ازای حداقل یک  $a \mid b_i, 1 \leq i \leq n$

۲. اگر  $a_1 + a_2 + \dots + a_n \mid b$  آنگاه به ازای حداقل یک  $a_i \mid b, 1 \leq i \leq n$

۳. اگر  $a \mid b_1 + b_2 + \dots + b_n$  آنگاه به ازای حداقل یک  $a \mid b_i, 1 \leq i \leq n$

۴. اگر  $a_1 a_2 \dots a_n \mid b$  آنگاه به ازای هر  $a_i \mid b, 1 \leq i \leq n$

۲- اگر  $a$  و  $b$  و  $c$  اعداد صحیح غیر صفر باشند آنگاه مقدار  $[[a, b], c]$  کدام گزینه است؟

۱.  $\frac{|abc|}{(ab, ac, bc)}$  ۲.  $\frac{|abc|}{(ac, bc, abc)}$  ۳.  $\frac{|abc|}{(a, b, abc)}$  ۴.  $\frac{|abc|}{(a, b, c)}$

۳- عدد  $31!$  به چند صفر ختم می شود؟

۱. ۵ ۲. ۶ ۳. ۷ ۴. ۸

۴- تعداد جوابهای مثبت معادله سیاله  $3x + 5y = 52$  چند تاست؟

۱. ۵ ۲. ۴ ۳. ۳ ۴. ۲

۵- اگر عدد  $a = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$  بر ۱۱ بخشپذیر باشد آنگاه کدام گزینه به هنگ ۱۱ همنهشت صفر است؟

۱.  $a_0 + a_1 + a_2 \dots + a_n$  ۲.  $a_0 - a_1 + a_2 \dots + (-1)^n a_n$

۳.  $a_2 a_1 a_0$  ۴.  $a_2 + a_1 + a_0$

۶- اگر  $f(x) = 12x^5 - 7x^4 + 8x^2 - 3$  باشد آنگاه  $f(18)$  به هنگ ۵ همنهشت کدام عدد است؟

۱. ۱ ۲. ۲ ۳. ۳ ۴. ۴

۷- اگر  $m$  یک عدد طبیعی و  $\varphi$  همان تابع فی اوایلر باشد آنگاه  $\sum_{d \mid m} \varphi(d)$  برابر است با

۱.  $m$  ۲.  $m^2$  ۳.  $\frac{1}{2} m \varphi(m)$  ۴.  $\varphi(m)$

۸- باقیمانده تقسیم عدد  $10^{200}$  بر ۲۷ کدام گزینه است؟

۱. ۱۶ ۲. ۱۷ ۳. ۱۸ ۴. ۱۹

۹- اگر  $P$  یک عدد اول فرد باشد بطوریکه  $p \equiv 3 \pmod{4}$  ، آنگاه

۱.  $\frac{p-1}{2}! \equiv \pm 1 \pmod{p}$  ۲.  $(\frac{p-1}{2}!)^2 \equiv -1 \pmod{p}$

۳. معادله  $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$  حلپذیر است. ۴.  $(-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$

۱۰- کدام یک از دستگاههای معادلات زیر حلپذیر است؟

۱.  $\begin{cases} 3x \equiv 1 \pmod{4} \\ 5x \equiv 4 \pmod{6} \end{cases}$  ۲.  $\begin{cases} 8x \equiv 4 \pmod{14} \\ 5x \equiv 3 \pmod{11} \end{cases}$  ۳.  $\begin{cases} 3x \equiv 2 \pmod{14} \\ 5x \equiv 4 \pmod{7} \end{cases}$  ۴.  $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{6} \\ x \equiv 3 \pmod{9} \end{cases}$

۱۱- کدام یک از معادلات همنهشتی زیر دقیقاً به اندازه درجه چند جمله ای و به هنگ داده شده، جواب همنهشت دارد؟

۱.  $x^5 + x + 1 \equiv 0 \pmod{7}$  ۲.  $x^7 + x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{3}$  ۳.  $x^3 - 1 \equiv 0 \pmod{4}$  ۴.  $x^4 - x^3 + x^2 - x \equiv 0 \pmod{5}$

۱۲- کدام یک از هنگهای زیر دارای ریشه اولیه می باشد؟

۱. ۱۲ ۲. ۲۰ ۳. ۱۴ ۴. ۱۵

۱۳- کدام گزینه یک عدد ناقص است؟

۱. ۶ ۲. ۱۰ ۳. ۲۸ ۴. ۳۶

۱۴- اگر  $n$  عدد تام باشد آنگاه  $\sum_{d|n} \frac{1}{d}$  برابر است با

۱. ۲ ۲.  $2n$  ۳.  $\sigma(n)$  ۴.  $n$

۱۵-  $ind_3^{-13}$  به هنگ ۱۰ کدام گزینه می باشد؟

۱. ۱ ۲. ۲ ۳. ۳ ۴. ۴

۱۶- کدام یک از معادلات همنهشتی زیر حلپذیر است؟

۱.  $x^2 \equiv -6 \pmod{13}$  ۲.  $x^2 \equiv 264 \pmod{173}$  ۳.  $x^2 \equiv 5 \pmod{43}$  ۴.  $x^2 \equiv 3 \pmod{13}$

۱۷- اگر  $p$  یک عدد اول فرد و  $a$  یک عدد صحیح دلخواه باشد بطوریکه  $(a, p) = 1$ ، آنگاه کدام گزینه با بقیه گزینه معادل نیست؟

۱.  $a$  یک مانده درجه دوم به هنگ  $p$  است. ۲. معادله همبستگی  $x^2 \equiv a \pmod{p}$  حلپذیر است.

۳.  $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$  ۴.  $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$

۱۸- مقدار کدام گزینه با مقدار بقیه گزینه ها متفاوت است؟

۱.  $\left(\frac{5}{9}\right)\left(\frac{9}{5}\right)$  ۲.  $\left(\frac{3}{11}\right)\left(\frac{11}{3}\right)$  ۳.  $\left(\frac{3}{13}\right)\left(\frac{13}{3}\right)$  ۴.  $\left(\frac{5}{7}\right)\left(\frac{7}{5}\right)$

۱۹-

بسط به صورت کسر مسلسل ساده نا متناهی متناوب عدد اصم درجه دوم  $\frac{3+\sqrt{3}}{4}$  کدام گزینه است؟

۱.  $\langle 1, 5, 2, \overline{6} \rangle$  ۲.  $\langle 1, 5, 2, \overline{6} \rangle$  ۳.  $\langle 0, 5, 2, \overline{6} \rangle$  ۴.  $\langle 0, 5, 2, \overline{6} \rangle$

۲۰- همگرای  $-4$  ام کسر مسلسل ساده متناهی  $\langle 1, 2, 1, 1, 3, 5 \rangle$  کدام گزینه است؟

۱.  $\frac{4}{3}$  ۲.  $\frac{7}{5}$  ۳.  $\frac{25}{18}$  ۴.  $\frac{132}{95}$

### سوالات تشریحی

۱.۴۰ نمره

۱- ثابت کنید که اگر  $m \geq 2$ ، آنگاه مجموع عناصر دستگاه مخفف مانده های  $A = \{a \in N \mid 1 \leq a \leq m, (a, m) = 1\}$  به هنگ  $m$  برابر  $\frac{1}{2}m\varphi(m)$  است.

۱.۴۰ نمره

۲- معادلات همبستگی زیر را حل کنید.

الف)  $4x + 6y \equiv 10 \pmod{14}$

ب)  $x^2 \equiv 6 \pmod{13}$

۱.۴۰ نمره

۳- ثابت کنید اگر  $m$  و  $n$  اعداد طبیعی باشند و  $m$  ریشه اولیه داشته باشد و  $a$  عدد صحیحی باشد بطوریکه

$(a, m) = 1$ ، آنگاه معادله همبستگی  $x^n \equiv a \pmod{m}$  حلپذیر است اگر و تنها اگر  $a^{\frac{\varphi(m)}{(n, \varphi(m))}} \equiv 1 \pmod{m}$

۱.۴۰ نمره

۴- ثابت کنید اگر  $P$  یک عدد اول فرد باشد آنگاه  $\sum_{a=1}^{p-1} \left(\frac{a}{p}\right) = 0$ .

۱.۴۰ نمره

۵- مقدار کسر مسلسل متناوب  $\alpha = \langle 2, \overline{1, 1, 2} \rangle$  را بدست آورید.

ياشيخ صحيح  
شماره  
سواب

1	د
2	الف
3	ج
4	ج
5	ب
6	ج
7	الف
8	د
9	الف
10	ب
11	د
12	ج
13	ب
14	الف
15	ج
16	د
17	د
18	ب
19	الف
20	ج